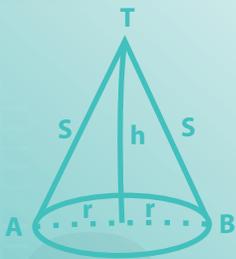
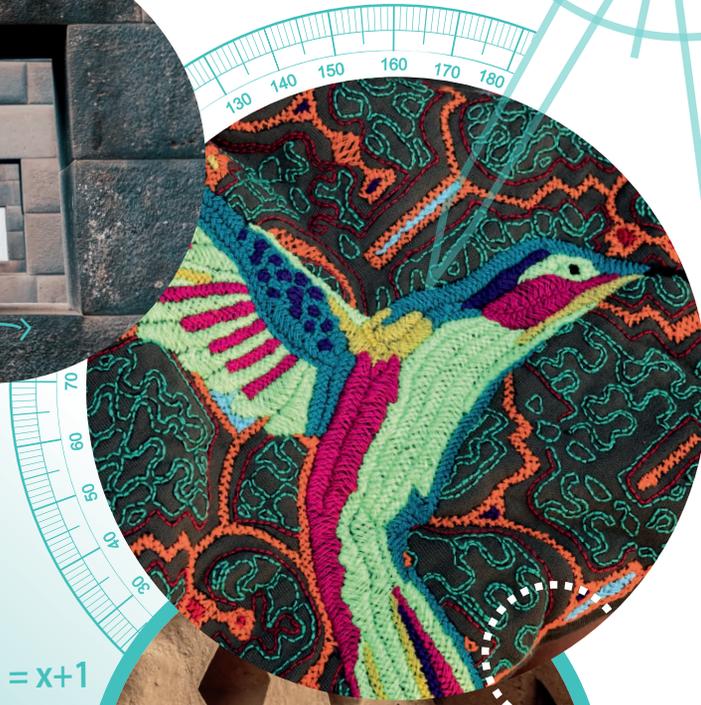
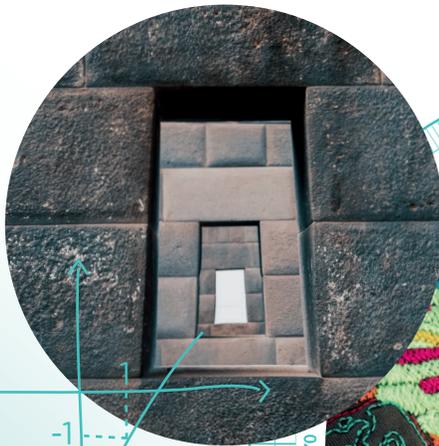


Fichas de MATEMÁTICA



$$f^{-1}(x) = x+1$$



5



La ciudadana y el ciudadano que queremos

Se **reconoce** como persona valiosa y se identifica con su cultura en diferentes contextos.

Desarrolla procesos autónomos de aprendizaje.

Gestiona proyectos de manera ética.

Interpreta la realidad y toma decisiones con conocimientos matemáticos.

Propicia la vida en democracia comprendiendo los procesos históricos y sociales.

Indaga y comprende el mundo natural y artificial utilizando conocimientos científicos en diálogo con saberes locales.

Perfil de egreso

Se **comunica** en su lengua materna, en castellano como segunda lengua y en inglés como lengua extranjera.

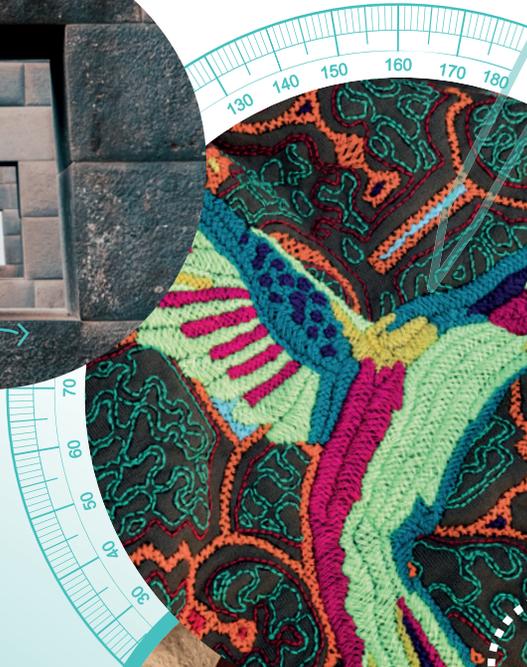
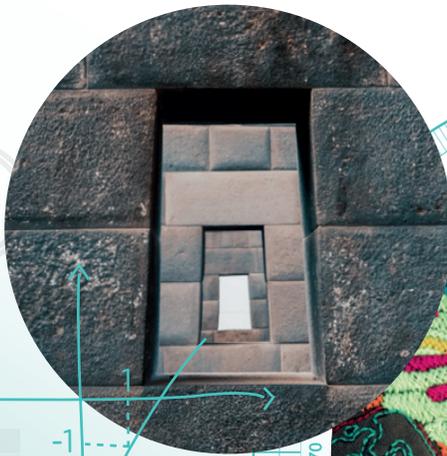
Aprovecha responsablemente las tecnologías.

Comprende y aprecia la dimensión espiritual y religiosa.

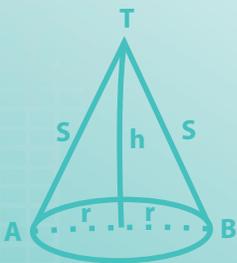
Aprecia manifestaciones artístico-culturales y crea proyectos de arte.

Practica una vida activa y saludable.

Fichas de MATEMÁTICA



$$f^{-1}(x) = x + 1$$



5



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Fichas de Matemática 5

Este material educativo, *Fichas de Matemática 5* para estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria, ha sido elaborado por la Dirección de Educación Secundaria para promover el desarrollo de las competencias “Resuelve problemas de cantidad”, “Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio”, “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” y “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” propuestas en el Currículo Nacional de Educación Básica.

Edición

© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.º 193, San Borja
Lima 15021, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Elaboración de contenidos

Larisa Mansilla Fernández
Ólber Muñoz Solís
Juan Carlos Chávez Espino
Hugo Luis Támara Salazar
Hubner Luque Cristóbal Jave
Enrique García Manyari
Richard Del Pino Vásquez

Especialista en edición

Oscar Emiliano Palomino Flores

Revisión pedagógica

José Luis Maurtua Aguilar

Diseño y diagramación

Carlos Héctor Boza Loayza
Daniel Zavala Agapito

Corrección de estilo

Carlos Alberto Zavala Félix
Marco Antonio Vigo Esqueche

Primera edición: septiembre de 2017

Segunda edición: junio de 2019

Primera reimpresión: agosto de 2020

Segunda reimpresión: diciembre de 2020

Tercera reimpresión: agosto de 2021

Tercera edición: noviembre de 2022

Cuarta edición: octubre de 2023

Tiraje

472 051 ejemplares

Impresión

Se terminó de imprimir en noviembre de 2023, en los talleres gráficos de Quad/ Graphics Perú S. R. L., sito en Av. Los Frutales 344, Urb. Los Artesanos, Ate, Lima-Perú. RUC N.º 20371828851

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de este material educativo por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso del Ministerio de Educación.

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.º 2023-07502

Impreso en el Perú / Printed in Peru



En este material se usan términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor” y sus respectivos plurales, así como las palabras equivalentes en el contexto educativo, para referirse a hombres y mujeres. Esta opción considera la diversidad y respeta el lenguaje inclusivo, y se emplea para promover una lectura fluida y facilitar la comprensión del texto.



PRESENTACIÓN

Estimado estudiante:

Nos complace poner en tus manos el material educativo ***Fichas de Matemática 5***, que, estamos seguros, te ayudará a descubrir la presencia de la matemática en la vida cotidiana y a utilizarla de manera adecuada y creativa en la resolución de problemas vinculados a la realidad.

En su estructura, te proponemos algunos ejemplos de estrategias heurísticas para que las puedas emplear en cada una de las fichas, las cuales se encuentran organizadas en tres secciones: *Construimos nuestros aprendizajes*, *Comprobamos nuestros aprendizajes* y *Evaluamos nuestros aprendizajes*.

En la primera sección, *Construimos nuestros aprendizajes*, te presentamos una situación relacionada con la vida cotidiana, que será abordada a través de interrogantes que pretenden movilizar tus capacidades y conocimientos, lo cual te ayudará a comprender el problema, diseñar o seleccionar una estrategia o plan, ejecutar la estrategia y reflexionar sobre lo desarrollado. En esta y las demás secciones vas a contar con información, datos, conocimientos, entre otros, que te ayudarán a gestionar tus aprendizajes de manera autónoma.

En la segunda sección, *Comprobamos nuestros aprendizajes*, te planteamos tres situaciones de contexto, en cuyo desarrollo podrás explicar el proceso de resolución, identificando las estrategias y describiendo los procedimientos utilizados. Este análisis te permitirá plantear otros caminos de resolución, así como identificar errores, aprender de estos y realizar tu propia corrección.

En la tercera sección, *Evaluamos nuestros aprendizajes*, te presentamos situaciones de diversos grados de complejidad en contextos variados y apoyadas en gráficos. Al desarrollar las actividades que contienen, podrás medir tu progreso teniendo en cuenta criterios de evaluación conocidos de antemano por ti.

Finalmente, puedes desglosar las fichas para desarrollarlas y organizarlas en tu portafolio, de manera que tu docente te brinde retroalimentación u orientación para que puedas seguir mejorando.

Esperamos que con esta experiencia sientas que hacer matemática es un reto posible de alcanzar. Disfrútala.

Ministerio de Educación

CONTENIDO

• Conociendo algunas estrategias

5

¿Cómo aplicamos los descuentos y aumentos sucesivos en nuestra vida cotidiana?

Ficha 1

Resuelve problemas de cantidad.

- Construimos nuestros aprendizajes 11
- Comprobamos nuestros aprendizajes 15
- Evaluamos nuestros aprendizajes 19

¿Cómo aplicamos las tasas de interés simple y compuesto en nuestra vida cotidiana?

Ficha 5

Resuelve problemas de cantidad.

- Construimos nuestros aprendizajes 51
- Comprobamos nuestros aprendizajes 55
- Evaluamos nuestros aprendizajes 59

¿Cómo aplicamos los sistemas lineales en nuestra vida cotidiana?

Ficha 2

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

- Construimos nuestros aprendizajes 21
- Comprobamos nuestros aprendizajes 25
- Evaluamos nuestros aprendizajes 29

¿Cómo optimizamos recursos en la vida cotidiana mediante la función cuadrática?

Ficha 6

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

- Construimos nuestros aprendizajes 61
- Comprobamos nuestros aprendizajes 66
- Evaluamos nuestros aprendizajes 71

¿Qué utilidad tienen los sólidos de revolución en nuestra vida cotidiana?

Ficha 3

Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

- Construimos nuestros aprendizajes 31
- Comprobamos nuestros aprendizajes 35
- Evaluamos nuestros aprendizajes 39

¿Cómo aplicamos las razones trigonométricas en nuestra vida cotidiana?

Ficha 7

Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

- Construimos nuestros aprendizajes 73
- Comprobamos nuestros aprendizajes 78
- Evaluamos nuestros aprendizajes 82

¿Cómo nos ayudan las medidas de dispersión para la toma de decisiones?

Ficha 4

Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

- Construimos nuestros aprendizajes 41
- Comprobamos nuestros aprendizajes 45
- Evaluamos nuestros aprendizajes 49

¿Cómo aplicamos las probabilidades en nuestra vida cotidiana?

Ficha 8

Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre.

- Construimos nuestros aprendizajes 84
- Comprobamos nuestros aprendizajes 89
- Evaluamos nuestros aprendizajes 93

CONOCIENDO ALGUNAS ESTRATEGIAS

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

1. Estrategias de comprensión

Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y, luego, establecer cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuáles son las condiciones del texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que cada estudiante se familiarice con el problema y le pierda temor a resolverlo.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del problema, y aporta al proceso de solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar tips para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema).

En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde. Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que se realice una lectura analítica de los problemas, que el estudiante produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado.

Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones y los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

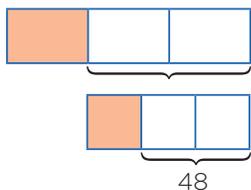
Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y $\frac{1}{3}$ del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.

Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	x	18
Felipe	x	8	$x + 5$	
TOTAL		8		

Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

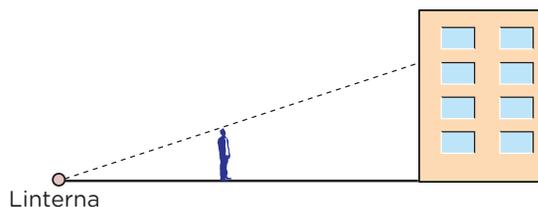
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una linterna sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

Resolución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



Diagramas de flujo

Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

Resolución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.



Diagramas conjuntistas

Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

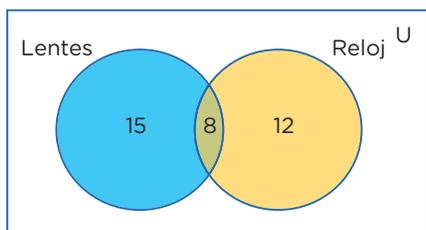
Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes y 20 reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

Resolución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.

Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



Diagramas cartesianos

Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

Ejemplo:

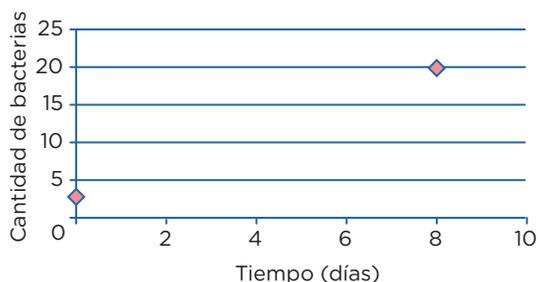
El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

Resolución:

Cantidad:

Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.

Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

Resolución:

Tomás, Ana, Lidia, Roberto.

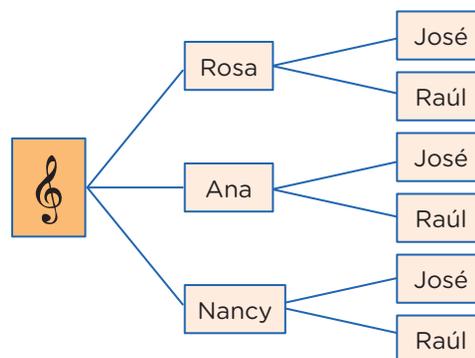


Diagrama de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

Ejemplo:

Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



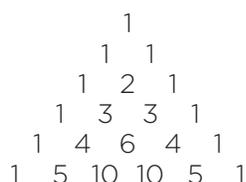
3. Otras estrategias

Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.



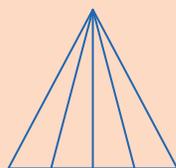
Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número 20?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

Haz una lista sistemática

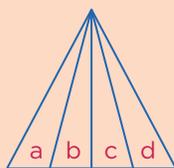
En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor.



Resolución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:
 Triángulos con una letra: a-b-c-d
 Triángulos con dos letras: ab-bc-cd
 Triángulos con tres letras: abc-bcd
 Triángulos con cuatro letras: abcd
- En total tenemos: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ triángulos.

Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce

como la *paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

Ejemplo:

Halla el valor de $(234\ 756\ 474)^2 - (234\ 756\ 473)^2$.

Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

$$(n + 1)^2 - n^2, \text{ cuando } n \text{ vale } 234\ 756\ 473$$

- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

$$(n + 1 + n)(n + 1 - n) = (n + 1) + n$$

- Luego, podemos afirmar que, para cualquier n entero positivo, se cumple:

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$$

- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

Entonces:

$$(234\ 756\ 474)^2 - (234\ 756\ 473)^2 = 469\ 512\ 947$$

Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

Solución:

- Particularicemos para algunos casos: si el artículo vale $S/100$ y elijo primero el descuento, termino pagando $S/106$. Pero, si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.



- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

Solución:

Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 3 cm por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

Solución:

- “3 cm debajo de su mitad” se interpreta como $\div 2, -3$.
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:
 $x \rightarrow (\div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3) \rightarrow 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos: $x = 90$

Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poder aplicarla con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

Tiene que verificarse; por tanto:

$$L - (1/4)Lx = 2 [L - (1/3)Lx]; \text{ simplificando:}$$

$$1 - (1/4)x = 2 - (2/3)x; \text{ de donde } x = 2,4 \text{ horas}$$

- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.



Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 33 millones de habitantes y la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?



Fuente: Shutterstock

Solución:

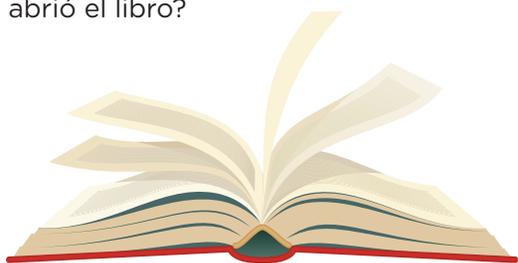
La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población y, solo después de formada, se igualará a 66 millones. Si bien aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando, cada vez, los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?



Fuente: Shutterstock

Solución:

- Primero se observa que $50 \times 50 = 2500$, número que no llega; y que $60 \times 60 = 3600$, el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- 55×56 no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar $53 \times 54 = 2862$, el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con $56 \times 57 = 3192$, se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

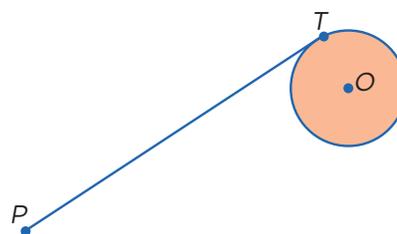
Supón el problema resuelto

Ejemplo:

Usando solo regla y compás, construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto T es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos O con T , tendremos que OT es perpendicular a PT .
- Además, como tenemos tres puntos involucrados, P , T y O , es posible hacer un triángulo uniendo el punto P con el punto O . Se observa que el triángulo es rectángulo.

¿Cómo aplicamos los descuentos y aumentos sucesivos en nuestra vida cotidiana?

Construimos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre datos y acciones de comparar e igualar cantidades, y las transformamos en expresiones numéricas que incluyen operaciones con descuentos sucesivos. Además, seleccionamos y combinamos estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar descuentos sucesivos.



Evaluamos las grandes ofertas



Fuente: Shutterstock

Un cliente desea comprar una *tablet*, cuyo precio de lista en ambas tiendas es S/600, y cuenta con dos tarjetas: Feliz y De la Suerte. Respecto a la información brindada, responde:

- ¿En cuál de las tiendas obtendrá un mayor descuento por dicha *tablet*?
- ¿Cuál es el precio que pagaría?
- ¿A qué tanto por ciento equivalen los descuentos sucesivos en La Económica?
- ¿Cuál es el descuento equivalente a los descuentos sucesivos en La Casera?

Ayuda al cliente a tomar la mejor decisión.



Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 1.



Comprendemos el problema

1. ¿Cuáles son los datos que se tienen en la situación?

2. ¿Qué te solicitan determinar en la situación?

3. ¿Qué significa la oferta del 40 % + 30 % con la tarjeta Feliz?

4. ¿Significan lo mismo los descuentos de 40 % + 30 % y 50 % + 20 %? Justifica tu respuesta.



Ten en cuenta

El **tanto por ciento** es el número de partes que se toma de una cantidad que se ha dividido en 100 partes iguales. Si se toman *a* partes de las 100 partes, entonces se dice "a por ciento".

Se denota así: $a \% = \frac{a}{100}$

Por ejemplo:

- El $20 \% = \frac{20}{100}$ significa que se toman 20 partes iguales de las 100.

- El tanto por ciento también se puede expresar así:

$$20 \% = \frac{20}{100} = 0,20$$

$$30 \% = \frac{30}{100} = 0,30$$

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

5. Si el cliente compra la *tablet* en la tienda La Económica y no cuenta con la tarjeta Feliz, ¿cuánto es el monto que debe pagar por la compra? Explica tu procedimiento con la ayuda de la siguiente cuadrícula:

- Costo de la *tablet*:
- Descuento: %
- Cada cuadrícula representa el %, que equivale a S/.....
- Por lo tanto, el descuento es S/..... y solo pagará S/.....

6. Si el segundo descuento en la tienda La Económica fuera del 10 % y el cliente solo tuviera la tarjeta Feliz, ¿le convendría comprar la *tablet* en dicha tienda? Explica.

7. Explica el procedimiento que seguirías para responder las preguntas de la situación inicial.



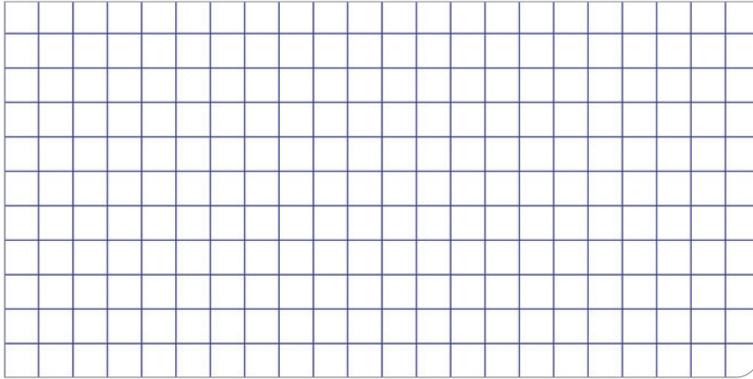
Recuerda

El **porcentaje** es el resultado de aplicar el tanto por ciento a un número o cantidad. Por ejemplo:

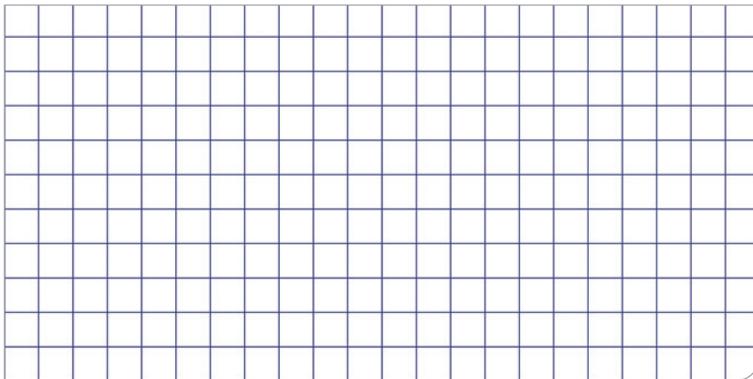
- El 20 % de S/250 es S/50.
- El 40 % de S/600 es S/240.

Ejecutamos la estrategia o plan

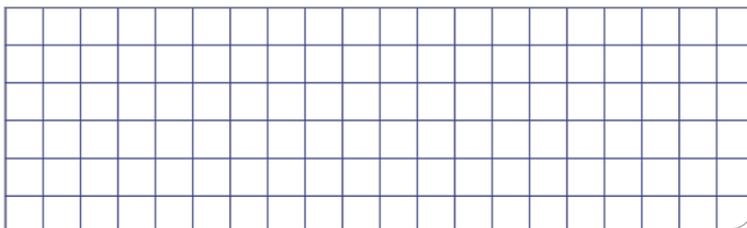
8. Desarrolla la estrategia presentada en “Ten en cuenta” para hallar el descuento en la tienda La Casera y el precio final a pagar.



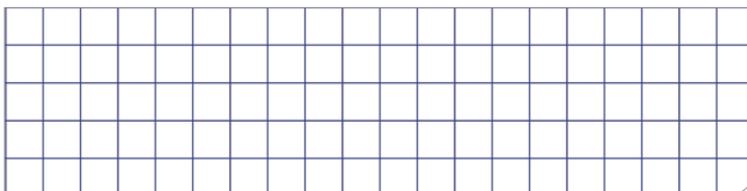
9. Obtén el descuento total que otorga La Económica y el precio a pagar con descuento.



10. Responde las preguntas **a** y **b** de la situación inicial.



11. Determina a qué tanto por ciento equivalen los descuentos sucesivos en La Económica y responde la pregunta **c** de la situación inicial.

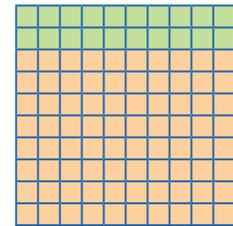
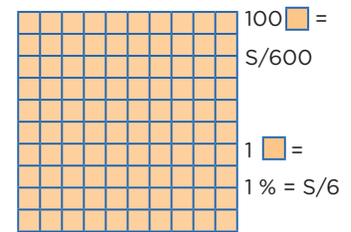


Ten en cuenta

Para realizar dos descuentos sucesivos, te puedes ayudar de las cuadrículas (representaciones figurales).

Por ejemplo, si en una tienda el descuento es del 20 % + 15 %, ¿cuánto pagaría el cliente por la *tablet*?

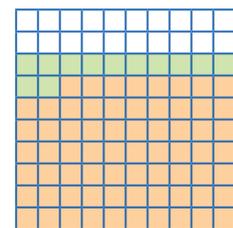
Primer descuento



Primer descuento: 20 % = 20
Descuento = 20 × S/6 = S/120
Entonces, el tanto por ciento a pagar es 80 % = 80
Total a pagar: 80 × S/6 = S/480



Segundo descuento



Segundo descuento:
15 % = 12
Descuento = 12 × S/6 = S/72
Entonces, el tanto por ciento a pagar es 85 % = 68
Total a pagar:
68 × S/6 = S/408



Comprobamos nuestros aprendizajes



Propósito

Expresamos con diversas representaciones y lenguaje numérico nuestra comprensión sobre las operaciones con descuentos porcentuales y la empleamos para interpretar las condiciones de un problema en su contexto. Además, planteamos afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con descuentos porcentuales.

Situación A: Tiempo de duración de las figuras musicales

En la tabla se aprecian los símbolos de las figuras musicales y su tiempo de duración expresado en segundos.

Nombre	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea
Símbolo					
Duración (s)	100 % de 1 s	50 % de 1 s	25 % de 1 s	12,5 % de 1 s	6,25 % de 1 s

Además, los puntillos de prolongación, colocados al lado derecho de las figuras, son signos musicales que se utilizan para aumentar la duración de una figura en el 50 % de su valor. Según la información proporcionada, completa la siguiente tabla:

Nombre	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea
Símbolo					
Duración (s)					

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

Considerando que nos han proporcionado la duración en segundos de cada figura musical y que, además, los puntillos de prolongación incrementan la duración de la figura musical respectiva en un 50 %, emplearemos esta información para completar la tabla.

Figura musical	Duración (s)
Redonda .	$100 \% + 50 \% = 150 \%$
Blanca .	$50 \% + 25 \% =$
Negra .	$25 \% + 12,5 \% =$
Corchea .	$12,5 \% + 6,25 \% = 18,75 \%$
Semicorchea

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué utilidad tuvo la primera tabla en la resolución del problema? ¿Qué procedimiento se siguió para completar la tabla?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. ¿Qué diferencia presentan la forma de aplicar el tanto por ciento en esta situación y la correspondiente a la situación de la sección “Construimos nuestros aprendizajes”?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Recuerda

Puedes realizar operaciones con los tantos por ciento así:

- $20 \% + 15 \% = 35 \%$
- $40 \% - 15 \% = 25 \%$
- $30 \% \times 10 \%$
 $= \frac{30}{100} \times 10 \% = 3 \%$

Situación B: La promoción del 2 × 1

Carla observa en una tienda la promoción 2 × 1 en juegos de sábanas. Asimismo, advierte que, si tiene la tarjeta de esta tienda, hay un descuento adicional del 20 %. Si se sabe que el precio de lista del juego de sábanas es S/129, ¿cuánto debería pagar Carla por 8 juegos de sábanas?



Fuente: Shutterstock



¿Sabías que...?

Cuando en publicidad los negocios utilizan frases como “2 × 1”, “3 × 2” o “lleve 2 productos y pague solo la mitad por el segundo”, se trata de promociones que ofrecen descuentos o rebajas para llamar la atención de los clientes y así impulsar sus ventas.



Ten en cuenta

Si Carla recibiera un descuento del 30 %, ella solo pagaría el 70 % del precio de lista.

$$P_f = (100\% - 30\%) \cdot P_l$$

$$P_f = 70\% \cdot P_l$$

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

Como no sabemos si Carla tiene la tarjeta de la tienda, empezaremos a calcular el precio sin descuento.

Ya que va a comprar 8 juegos, entonces comprará $\frac{8}{2} = \dots\dots\dots$ promociones.

- Como un juego cuesta S/129, entonces Carla pagaría por 4 promociones $4 \times S/129 = \dots\dots\dots$
- Si pagase con la tarjeta de la tienda, le descontarían el 20 % de $\dots\dots\dots$, es decir, $0,2 \times \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$
- Con el descuento pagaría $\dots\dots\dots - \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Respuesta: Carla podría pagar $\dots\dots\dots$ o $\dots\dots\dots$

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿La información proporcionada permite dar un solo valor como respuesta?, ¿por qué?

2. ¿A qué descuento único porcentual equivale la promoción 2 × 1?

3. Emplea otro procedimiento que te permita responder la situación.

4. ¿Qué descuento total porcentual recibiría Carla si pagara su compra con la tarjeta de esta tienda?

Aprendemos a partir del error

Situación C: Compra de un departamento

Diego y Sonia planean comprar un departamento mediante el programa de vivienda Nuestra Casa. El precio del departamento es S/182 003. Al momento de concretar la compra, depositan el 30 % como cuota inicial, por lo cual se les descuenta el bono del buen pagador equivalente a S/17 000. Diego cree que pueden cancelar el saldo por medio de un **crédito hipotecario** en 10 años con una tasa de interés simple del 1,5 % mensual. ¿Qué porcentaje representa el precio final del departamento respecto al precio inicial?



Fuente: Shutterstock

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

- Precio del departamento: S/182 003
- Calculamos la cuota inicial, que es igual al 30 % del precio del departamento; es decir:
$$\text{Cuota inicial} = 30 \% \times \text{S}/182\ 003$$
$$= 0,3 \times \text{S}/182\ 003 = \text{S}/54\ 600,90$$
- Calculamos el saldo del crédito hipotecario, que es igual al precio del departamento menos la cuota inicial:
$$\text{S}/182\ 003 - \text{S}/54\ 600,90 = \text{S}/127\ 402,10$$
- Para hallar los intereses, debemos expresar el tiempo en meses:
$$\text{Tiempo} = 10 \times 12 \text{ meses} = 120 \text{ meses}$$
- La tasa de interés mensual es 1,5 % = 0,015.
- Calculamos el interés:
$$\text{Interés} = \text{S}/127\ 402,10 \times 120 \times 0,015 = \text{S}/229\ 323,78$$
- Entonces, el monto final del crédito hipotecario sería
$$\text{Monto final} = \text{S}/127\ 402,10 + \text{S}/229\ 323,78 - \text{S}/17\ 000$$
$$= \text{S}/339\ 665,88$$
- Luego, el precio final del departamento sería
$$\text{Precio final} = \text{S}/54\ 600,10 + \text{S}/339\ 665,88 + \text{S}/17\ 000$$
$$= \text{S}/411\ 265,98$$
- Por regla de tres simple, calculamos el tanto por ciento:
$$\begin{array}{l} \text{S}/182\ 003 \quad \rightarrow 100 \% \\ \text{S}/411\ 265,98 \quad \rightarrow x \end{array}$$

$$x = \frac{\text{S}/411\ 265,98 \times 100 \%}{\text{S}/182\ 003} = 225,97 \%$$

Respuesta: El precio final es el 225,97 % del precio inicial.



Glosario

El **crédito hipotecario** es un préstamo a mediano o largo plazo que se otorga a una persona para la compra, ampliación, reparación o construcción de una vivienda, para lo cual se pone como garantía la misma vivienda.



Recuerda

La **tasa de interés** es la ganancia que se obtiene por cada 100 unidades monetarias prestadas en una unidad de tiempo (generalmente un año). Por ejemplo, una tasa del 5 % anual implica que cada año se ganarán S/5 por cada S/100 prestados.

Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre datos y las transformamos en expresiones con descuentos sucesivos. Expresamos con diferentes representaciones nuestra comprensión empleando diversas estrategias de cálculo y procedimientos; y, a partir de allí, planteamos afirmaciones.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

Una tienda vende los celulares que se muestran a continuación:



Fuente: Shutterstock

Para incentivar la compra de estos productos, el establecimiento realiza la siguiente promoción:

Equipo	1	2	3
Descuento	20 %	30 %	15 %

Con la información dada, responde las preguntas 1, 2, 3 y 4.

- Para promocionar el equipo 1, lo ofrecen al precio de lista del equipo 3. ¿Qué porcentaje descuentan al precio de lista del equipo 1?

a) 20 % b) 4 % c) 40 % d) 4,2 %
- Por efectos de la inflación, el equipo 1 incrementa su precio de lista hasta costar tanto como el precio actual del equipo 2. ¿En qué porcentaje se incrementó el precio de lista del equipo 1?

a) 10,1 % b) 11 % c) 10 % d) 1 %
- Si esta semana todos los productos de la tienda sufrieron un incremento del 5 % en su precio de lista, ¿qué expresión representa el precio que se debe pagar por el equipo 3 esta semana?

a) $864 + 864 \left(\frac{5}{100} \right) - 864 \left(\frac{105}{100} \right) \left(\frac{15}{100} \right)$

b) $864 + 864 \left(\frac{5}{100} \right) - 864 \left(\frac{95}{100} \right) \left(\frac{15}{100} \right)$

c) $864 + 864 \left(\frac{0,5}{100} \right) - 864 \left(\frac{100,5}{3} \right) \left(\frac{3}{100} \right)$

d) $864 + 864 \left(\frac{3}{100} \right) - 864 \left(\frac{97}{100} \right) \left(\frac{50}{100} \right)$
- Si el precio de lista del equipo 1 sufre un incremento del 10 % y luego un descuento del 15 %, ¿a qué precio se estará vendiendo este equipo?



Recuerda

La **variación** (V) es la diferencia entre el valor final (V_f) y el valor inicial (V_i) de una magnitud. Si el número es positivo, entonces hay un incremento; si es negativo, hay un decremento o disminución.

$$V = V_f - V_i$$

La **variación porcentual** ($V\%$) representa la diferencia entre el valor final y el valor inicial en términos de un porcentaje respecto al valor inicial.

$$V_i \rightarrow 100 \%$$

$$(V_f - V_i) \rightarrow V\%$$

Multiplica en aspa:

$$V\% (V_i) = (V_f - V_i) 100 \%$$

Despeja $V\%$:

$$V\% = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100 \%$$



Ten en cuenta

El reparto inversamente proporcional consiste en darle al mayor número la menor parte y al menor número la mayor parte.

Por ejemplo, reparte $S/35$ en partes inversamente proporcionales a 2 y 3.

Solución:

I. P. \rightarrow D. P.

$$1.^{\text{a}} \text{ parte: } \frac{1}{2} \times 6k = 3k$$

$$2.^{\text{a}} \text{ parte: } \frac{1}{3} \times 6k = 2k$$

Donde k es la constante de proporcionalidad.

$$\text{mcm}(2, 3) = 6$$

Suma e iguala a $S/35$ para hallar k :

$$3k + 2k = S/35$$

$$5k = S/35 \rightarrow k = S/7$$

Halla las partes:

$$1.^{\text{a}} \text{ parte} = 3k = 3(S/7) = S/21$$

$$2.^{\text{a}} \text{ parte} = 2k = 2(S/7) = S/14$$

Mistura es una feria gastronómica que convoca a los mejores cocineros del país y los exquisitos potajes de la costa, la sierra y la selva del Perú. La décima edición de Mistura convocó a más de 400 000 visitantes durante los 10 días. Esta cifra significó un 20 % más de comensales respecto al 2014, en que se contabilizó un total de 321 000 *tickets* vendidos.

Con la información dada, responde las preguntas 5, 6 y 7.

5. Haciendo el recuento oficial de *tickets* vendidos en la feria Mistura 2017, se obtiene que se vendieron 405 000. ¿Cuál fue el porcentaje aproximado de incremento de los *tickets* vendidos en el 2017 con relación al 2014?
- a) 20 % b) 26 % c) 21 % d) 8,4 %
6. Si para el 2018 hubo una proyección de incremento del 1 % de los *tickets* vendidos en el 2017, ¿en cuánto pudo haber variado la cantidad de *tickets* proyectados para el 2018 respecto al 2014?
- a) 30,48 % b) 29,71 % c) 25,34 % d) 27,43 %
7. Pierina afirma que, si en el 2014 se vendieron 321 000 *tickets* de entrada y en el 2017 se vendieron 405 000, no sería cierto que se ha incrementado la concurrencia a Mistura en un 20 %, sino en un 24,6 %. Según ella, la aproximación hecha es inexacta, ya que estaría dejando de considerar cierta cantidad de *tickets* vendidos. ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Pierina? Justifica tu respuesta.
8. Rocío paga S/94,50 por un par de zapatos. Si se sabe que este precio es producto de dos descuentos sucesivos del 10 % y 30 %, ¿qué precio tenía el par de zapatos originalmente? ¿Cuál sería el descuento único?

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y las transformé en expresiones numéricas que incluyen operaciones con descuentos sucesivos.			
Expresé con diversas representaciones y lenguaje numérico mi comprensión sobre los descuentos sucesivos para interpretar las condiciones de un problema según el contexto.			
Seleccioné y combiné estrategias de cálculo y procedimientos para realizar descuentos sucesivos.			
Planteé afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con descuentos porcentuales.			

¿Cómo aplicamos los sistemas lineales en nuestra vida cotidiana?



Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos, y las transformamos en ecuaciones diofánticas o sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Asimismo, combinamos y adaptamos los procedimientos para dar solución a un sistema de ecuaciones.



Abastecemos con gas natural a los vehículos en el Perú

El uso de gas natural vehicular (GNV) como combustible disminuye la emisión de gases contaminantes, como el monóxido de carbono (CO), los hidrocarburos (HC) y el dióxido de carbono (CO₂), que se emiten con el uso de la gasolina y demás combustibles. De esta manera, la utilización de gas natural contribuye a la reducción de las enfermedades respiratorias y del calentamiento global; así mejora la calidad medioambiental.



Fuente: Andina

En el Perú, cada día hay más personas que convierten sus vehículos a GNV, y actualmente alrededor de 350 000 peruanos utilizan este combustible, como es el caso de Laura. Ella, cuando abasteció su auto de gas en un grifo de la ciudad, pidió que completaran el tanque con GNV y, luego, cuando miró la pantalla del surtidor, se dio cuenta de que la venta total por consumo fue de S/19. Laura pagó con un billete de S/100, pero José, la persona que atiende, se percató de que solo contaba con monedas de S/2 y S/5.

Respecto a la situación presentada, responde las siguientes preguntas:

- ¿De cuántas formas diferentes José puede dar el vuelto a Laura?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que modela el vuelto que entregará José?
- ¿Qué dato agregarías a la situación para que José solo tenga una forma posible de dar el vuelto a Laura?
- ¿Cuál sería la representación algebraica del nuevo dato? ¿Cómo daría José el vuelto a Laura en este caso? ¿Cómo puedes ayudar a José a dar el vuelto?



Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 2.



Comprendemos el problema

- ¿Qué datos se presentan en la situación inicial?
- ¿Qué te piden hallar las preguntas de la situación inicial?
- ¿Tienes información suficiente para responder la pregunta **a** de la situación inicial? Explica.
- Si José solo tuviera monedas de S/2, ¿podrá dar el vuelto a Laura? Y, si tuviera solo monedas de S/5, ¿lo podrá hacer? Justifica tu respuesta.



Recuerda

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una igualdad algebraica del tipo $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas, y los coeficientes a , b y c son números reales.

- Por ejemplo:
- $5x + 4y = 9$
 - $2x + 3y = 21$

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

- Si José tiene una moneda de S/5 y las demás monedas de S/2, ¿podrá dar el vuelto? Completa la tabla y justifica tu respuesta.

N.º de monedas de 5 soles	N.º de monedas de 2 soles	Vuelto (S/)	Podrá dar vuelto (Sí/No)
1 moneda de S/5	1 moneda de S/2	$1(5) + 1(2) = 7$	No
1 moneda de S/5	5 monedas de S/2	$1(5) + 5(2) =$	
	30 monedas de S/2	$= 65$	
1 moneda de S/5		$= 71$	
			Sí
	40 monedas de S/2		No

- Tomando en cuenta tus respuestas anteriores, responde: ¿cuál de las siguientes estrategias te ayudará a resolver la situación inicial? Argumenta tu respuesta.

a) Usar un diagrama de flujo

c) Emplear el ensayo y error

b) Plantear una ecuación

d) Hacer un esquema

Situación 8: Mezcla de soluciones

Un técnico laboratorista requiere preparar 100 mL de solución azucarada al 50 % utilizando **soluciones** al 35 % y 60 %. ¿Qué cantidad de cada una de estas soluciones deberá mezclar para obtener la concentración deseada?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

Organizamos y completamos los datos en la siguiente tabla:

	Solución al 35 %	Solución al 60 %	Se desea obtener al 50 %
Volumen	x	y	100 mL
Concentración	0,35		0,50

- Plantreamos las siguientes ecuaciones:

$$x + y = 100 \dots (I)$$

$$0,35x + 0,60y = \dots = \dots \dots (II)$$

- Multiplicamos la ecuación (I) por $-0,35$:

$$-0,35x - 0,35y = -35$$

$$0,35x + 0,60y = \dots$$

- Reducimos y obtenemos $0,25y = 15 \rightarrow y = \dots$
- Reemplazamos $y = 60$ en la ecuación (I):

$$x + 60 = 100 \rightarrow x = \dots$$

Por lo tanto, el técnico necesita mezclar mL de la solución al 35 % y mL de la solución al 60 %.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Qué estrategia te ayudó a plantear el sistema de ecuaciones?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- Expresa de manera sencilla la siguiente ecuación:
 $0,35x + 0,60y = 0,50$

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- ¿Por qué se multiplicó la ecuación (I) por $-0,35$? Explica.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- ¿Por qué se tuvo que reemplazar en la ecuación (I) el valor hallado?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Glosario

Las **soluciones** químicas son mezclas homogéneas de una o más sustancias disueltas en otra sustancia en mayor proporción.

Las soluciones se obtienen mezclando el soluto, que es la sustancia a disolver, y el solvente, que es la sustancia en que será disuelto el soluto. Por ejemplo, el agua azucarada es una solución, ya que el azúcar (soluto) se ha disuelto en el agua (solvente).

Ten en cuenta

Para comprobar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, reemplaza en cada ecuación los valores de las variables obtenidos y verifica las igualdades. Por ejemplo, en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 19 \dots (I) \\ x + 2y = 17 \dots (II) \end{cases}$$

El conjunto solución es $\{(7; 5)\}$.

Al reemplazar se tiene

$$2(7) + 5 = 19 \rightarrow 19 = 19 (V)$$

$$7 + 2(5) = 17 \rightarrow 17 = 17 (V)$$

Como las igualdades son verdaderas, el conjunto solución es correcto.

Aprendemos a partir del error

Situación C: Compra de sándwiches y refrescos

Daniela y sus amigas pagaron esta semana S/120 por 4 sándwiches de pollo y 8 vasos de chicha morada en una cafetería, pero la semana anterior consumieron 2 sándwiches de pollo y 2 vasos de chicha morada en el mismo lugar, y la cuenta fue de S/44. ¿Cuál es el costo del sándwich y del vaso de chicha morada?

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

- Representamos los datos de la situación:
 - x : precio de un sándwich de pollo
 - y : precio de un vaso de chicha morada
 - La semana anterior pagaron $4x + 8y = \dots\dots\dots$ (I)
 - La semana actual pagaron $2x + 2y = 44$... (II)
- Conformamos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 4x + 8y = 120 \dots (I) \\ 2x + 2y = 44 \dots (II) \end{cases}$$
- Aplicamos el método de reducción; para ello, multiplicamos la ecuación (II) por -2 :

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= 120 \\ -4x - 4y &= -44 \end{aligned}$$
- Sumamos ambas ecuaciones y obtenemos $4y = 76 \rightarrow y = \dots\dots\dots$
- Reemplazamos en la ecuación (II): $2x + 2(19) = 44 \rightarrow x = \dots\dots\dots$
- Para interpretar la solución, tabulamos y graficamos las intersecciones de cada ecuación con los ejes del plano cartesiano. Luego, hallamos el punto de intersección de ambas rectas.

$$4x + 8y = 120 \dots (I)$$

$$2x + 2y = 44 \dots (II)$$

x	0	30
y	15	

x	0	22
y		0



Por lo tanto, el sándwich de pollo costó S/3, y el vaso de chicha morada, S/19.



¿Sabías que...?

Para aplicar el método de reducción, debes hacer que los coeficientes de las variables x o y sean números opuestos.



Ten en cuenta

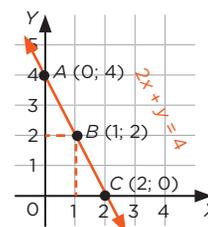
Puedes representar las ecuaciones lineales con dos incógnitas en el plano cartesiano mediante rectas de la forma $y = ax + b$, donde x , y , a y $b \in \mathbb{R}$. Para graficarlas, es suficiente tabular y ubicar algunos puntos de estas.

Por ejemplo:

$$2x + y = 4 \rightarrow y = 4 - 2x$$

Tabula algunos valores:

x	0	1	2
y	4	2	0



Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos para transformarlas en sistemas de ecuaciones; expresamos con lenguaje algebraico la comprensión de sus soluciones combinando procedimientos para plantear afirmaciones justificadas con conocimientos, y corregimos errores si los hubiera.

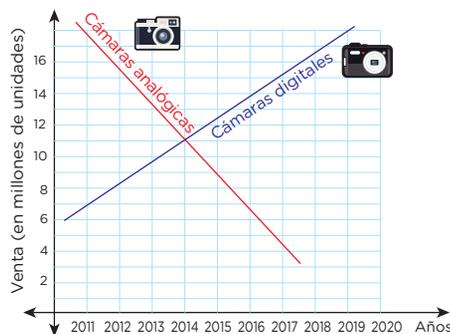


Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

- El director de una institución educativa organizó un proyecto de presentación teatral con sus estudiantes de quinto grado de secundaria, con la finalidad de reunir fondos y terminar de construir el comedor estudiantil.
El costo de las entradas fue de S/30 para los adultos y S/20 para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se recaudó S/5930, ¿cuántos adultos y cuántos niños asistieron a esa función?
 (a) 151 y 97 (b) 124 y 124 (c) 97 y 151 (d) 69 y 179

El siguiente gráfico muestra cómo la venta de cámaras analógicas ha bajado desde que aparecieron las cámaras digitales en el mundo.

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.



- Durante el periodo 2011-2020, ¿en qué años la venta de cámaras digitales fue menor que la de cámaras analógicas? ¿A partir de qué año la venta de cámaras digitales superó a la de cámaras analógicas?
 (a) Del 2011 al cierre del 2013, la venta de cámaras digitales fue menor que la de cámaras analógicas y, después del cierre del 2016, la venta de cámaras digitales superó a la de cámaras analógicas.
 (b) Desde el 2015, se vendieron más cámaras digitales y, del 2011 al cierre del 2018, la venta de cámaras analógicas superó a las digitales.
 (c) Del 2011 al cierre del 2013, la venta de cámaras digitales fue menor que la de cámaras analógicas y, después del cierre del 2014, la venta de cámaras digitales superó a la de cámaras analógicas.
 (d) Del 2011 al cierre del 2012, la venta de cámaras digitales fue menor que la de cámaras analógicas y, después del cierre del 2013, la venta de cámaras digitales fue superior.
- Estima en qué año las ventas de los dos tipos de cámara fueron iguales, y la cantidad aproximada de cámaras que se vendieron.

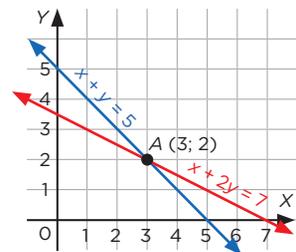


Recuerda

De acuerdo con la posición relativa de dos rectas en el plano cartesiano, el sistema de ecuaciones, según su solución, puede ser:

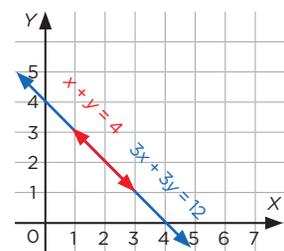
Compatible determinado

Tiene una solución.



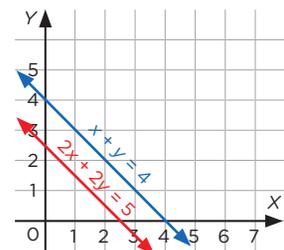
Compatible indeterminado

Tiene infinitas soluciones.



Incompatible

No tiene solución.





Ten en cuenta

Aplica el método gráfico para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \dots (I) \\ x + y = 5 \dots (II) \end{cases}$$

Tabula algunos valores:

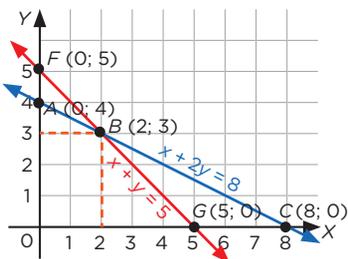
De la ecuación (I): $y = \frac{8 - x}{2}$

x	0	8
y	4	0

De la ecuación (II): $y = 5 - x$

x	0	5
y	5	0

Grafica las ecuaciones:



El conjunto solución es el punto de intersección B (2; 3). Es decir, $x = 2$ e $y = 3$.

4. Escribe V si es verdadero o F si es falso, según corresponda, en cada una de las siguientes proposiciones:
- Cuando dos rectas se cortan en un punto, es totalmente seguro que se encontró una solución al sistema de ecuaciones, al cual se le denomina sistema compatible determinado. ()
 - Cuando dos rectas son paralelas en un plano, existen infinitas soluciones al sistema de ecuaciones, al cual () cual se le denomina sistema indeterminado.
 - Un sistema de ecuaciones lineales que tiene más variables que ecuaciones posee infinitas () soluciones.
5. Un comerciante de algodón de azúcar gana S/0,40 por cada algodón vendido, pero, si no logra venderlo, pierde S/0,50. Un día en que preparó 120 algodones obtuvo una ganancia de S/39. ¿Cuántos algodones no logró vender ese día?
- (a) 10 (b) 7 (c) 9 (d) 12
6. En el río Amazonas, un barco recorre 76 km en 1 h con la corriente a su favor. De regreso, con la corriente en contra, tarda 4 h para recorrer la misma distancia. ¿Cuál es la rapidez promedio de la corriente, si se sabe que la distancia se calcula con la expresión $d = v \cdot t$, donde d : distancia, v : rapidez y t : tiempo?
- (a) 47,5 km/h (b) 28,5 km/h (c) 57 km/h (d) 19 km/h
7. Sergio contrató dos camiones cuyas capacidades de carga son, respectivamente, 3 y 4 toneladas, con los cuales realizó en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de varillas de hierro de construcción. Él necesita saber cuántos viajes hizo cada camión para adicionar los gastos por combustible. ¿Cuántos fueron? Justifica tu respuesta.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y valores desconocidos, y las transformé en sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.			
Expresé con lenguaje algebraico mi comprensión sobre las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.			
Adapté y combiné procedimientos para dar solución a sistemas de ecuaciones lineales.			
Planteé afirmaciones que justifiqué con ejemplos y conocimientos, y, cuando hubo errores, los corregí.			

¿Qué utilidad tienen los sólidos de revolución en nuestra vida cotidiana?



Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Leemos textos o gráficos que describen los sólidos de revolución compuestos y truncados, y establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Asimismo, empleamos diversas estrategias para determinar el área y el volumen de sólidos de revolución.



Fabricamos elementos de seguridad para la señalización vial

Juan es un emprendedor que fabrica elementos de seguridad para el rubro de la construcción. Él ha investigado que los conos de seguridad son de color anaranjado y deben ser reflectantes o tener dispositivos luminosos para que sean vistos en las noches; además, que se pueden usar en la señalización vial para distinguir los desvíos, pozos y obras en caminos, calles y carreteras. Él sabe que, para cumplir con este propósito, los conos deben tener como mínimo una altura de 47,5 cm.

Una municipalidad le ha hecho un pedido de 20 conos de seguridad de 48 cm de altura, cuyos diámetros de las bases mayor y menor son de 36 cm y 8 cm, respectivamente. Además, para usarlos por las noches, deben tener una banda reflectante de 10 cm de ancho ubicados a 12 cm de la base menor. Para cumplir con el pedido, Juan hace su cálculo a partir del análisis de la banda inferior de uno de los conos.



Fuente: Shutterstock

Con la información brindada, ayuda a Juan a cumplir con el pedido. Para ello, resuelve el problema y responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué área tendrá la superficie cubierta por la banda reflectante en cada uno de los conos de seguridad?
- ¿Cuál es el volumen de cada cono de seguridad?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

8. ¿Qué figura plana al rotar 360° genera el cono de seguridad?
- a) el rectángulo b) el semicírculo c) el trapecio recto
9. ¿Crees que realizar una representación (dibujo) te podrá ayudar a resolver la situación dada? Explica.

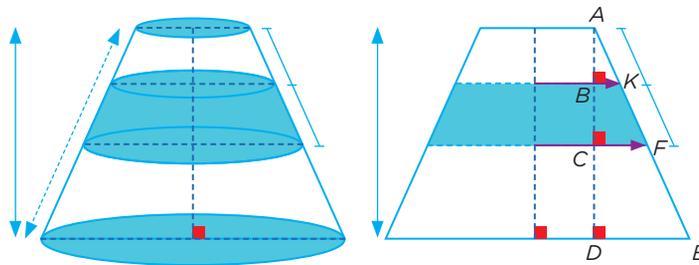
10. ¿Cuál de las siguientes estrategias te podrá ayudar a resolver la situación inicial?

- a) Plantear una ecuación c) El diagrama tabular
 b) El diagrama analógico d) El diagrama del árbol

11. Describe el procedimiento que realizarías para resolver la situación inicial dada y responder las preguntas.

Ejecutamos la estrategia o plan

12. Analiza gráficamente un cono de seguridad y completa con los datos presentados en la situación inicial.



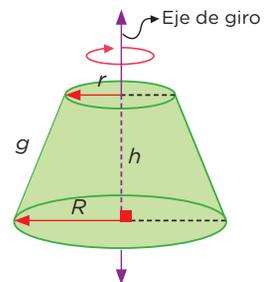
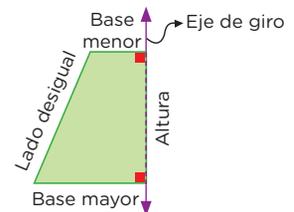
13. Utiliza la notación pertinente para los datos señalados en el gráfico.

14. Del gráfico trabajado, identifica las incógnitas y las propiedades que se aplicarán para conocer sus valores.



Ten en cuenta

El **tronco de cono recto** es el sólido generado al girar un trapecio rectángulo alrededor de su lado (eje de giro) perpendicular a las bases.



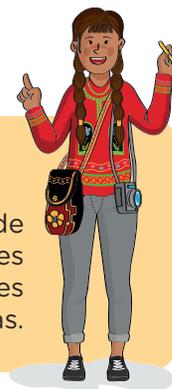
Donde
g: generatriz
h: altura
R, r: radios mayor y menor

Comprobamos nuestros aprendizajes



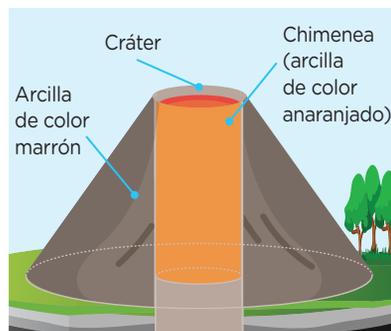
Propósito

Empleamos estrategias para determinar el área y el volumen de cuerpos de revolución. Asimismo, adaptamos procedimientos para describir las diferentes vistas de una forma tridimensional compuesta; además, planteamos afirmaciones sobre las relaciones que descubrimos entre los objetos y las formas geométricas.



Situación A: El volumen de un volcán

Los estudiantes de quinto grado realizaron un proyecto de investigación sobre un volcán de su región y representaron sus medidas en una maqueta a escala de 1:2000. Para ello, tomaron en cuenta que el diámetro del cráter mide 840 m; el diámetro de la base del volcán, 1800 m, y el ángulo de inclinación de la ladera del volcán, 37° . Para el tronco de cono, utilizaron arcilla de color marrón; para la chimenea, la cual tiene forma de cilindro, emplearon arcilla de color anaranjado, tal como se muestra en la figura. ¿En cuánto excede el volumen de arcilla de color marrón a la arcilla de color anaranjado utilizada?



Fuente: Shutterstock

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

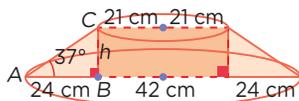
Resolución

- Utilizamos la escala 1:2000 y determinamos las medidas de la maqueta:

$$\text{Diámetro del cráter: } 840 \text{ m} = \frac{840 \times 100}{2000} = \dots\dots\dots \text{ cm}$$

$$\text{Diámetro de la base del volcán: } 1800 \text{ m} = \frac{\dots\dots\dots \times \dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots \text{ cm}$$

- Hacemos un dibujo de la situación:



Como el triángulo rectángulo ABC es notable (37° - 53°), se tiene que $AB = 4k = 24 \rightarrow k = 6$.

$$\text{Luego, } BC = 3k = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ cm} = h.$$

$$\text{También, } r = 21 \text{ cm, } R = \frac{\dots\dots\dots}{2} = \dots\dots\dots \text{ cm.}$$

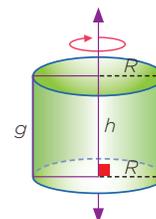
- Calculamos el volumen de la arcilla de color anaranjado:
 $V = \pi r^2 h = \pi(\dots\dots\dots)^2(\dots\dots\dots) = 7938\pi \text{ cm}^3$
- Calculamos el volumen de la arcilla de color marrón (volumen del cono truncado menos el volumen del cilindro):
 $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 18(45^2 + 21^2 + 45 \times 21) - 7938\pi$
 $V = 20\,466\pi - 7938\pi = \dots\dots\dots \pi \text{ cm}^3$

Por lo tanto, el volumen de la arcilla de color marrón excede al volumen de la arcilla de color anaranjado en $\dots\dots\dots \text{ cm}^3 - \dots\dots\dots \text{ cm}^3 = \dots\dots\dots \text{ cm}^3$.



Ten en cuenta

El **cilindro recto** se genera por la rotación de una región rectangular alrededor de uno de sus lados (eje de giro).



Área lateral (A_L):

$$A_L = 2\pi Rh$$

Área total (A_T):

$$A_T = 2\pi R(h + R)$$

Volumen (V):

$$V = \pi R^2 h$$

Donde

h : altura

R : radio

g : generatriz



Recuerda

La **escala** (E) es la relación de proporción entre las medidas reales de un objeto y las del dibujo expresadas en la misma unidad de medida. Así, la expresión 1:250 indica que 1 cm en el dibujo representa 250 cm en la realidad.

La escala se calcula dividiendo la medida del dibujo entre la medida real del objeto.

$$E = \frac{\text{medida del dibujo}}{\text{medida real}}$$



Ten en cuenta

Un sólido de revolución puede estar formado por sólidos de revolución parciales. El volumen de estos, juntos, es igual al volumen del sólido que lo contiene.



Por ejemplo, el volumen del cilindro es igual al volumen del sólido de color azul más el volumen del sólido de color verde.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. Si se quisiera hacer un dibujo cualquiera a escala en una hoja A4, ¿se mantendría la escala o pondrías otra?

2. ¿Qué procedimiento aplicarías para obtener las medidas de la maqueta?

3. ¿Qué procedimiento aplicarías para calcular la altura del tronco de cono?

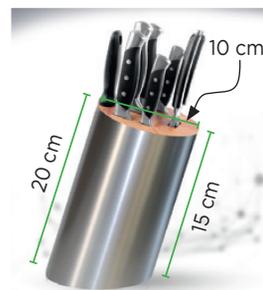
4. Explica cómo se procedió para calcular el volumen de la arcilla de color anaranjado (volumen del cilindro).

5. Describe la estrategia que se utilizó para resolver la **situación A** y responder la pregunta.

6. ¿Qué procedimientos semejantes encuentras en las resoluciones de la **situación A** y de la situación inicial? Explica.

Situación B: Elaboramos un portacuchillos

En el área de Educación para el Trabajo, los estudiantes elaboraron un portacuchillos con la forma de tronco de cilindro utilizando un pedazo de madera forrado con una lámina de aluminio, como se muestra en la imagen. Determina el volumen de madera que se empleó para elaborar el portacuchillos y el área de la lámina de aluminio para forrarlo.



Fuente: Shutterstock

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

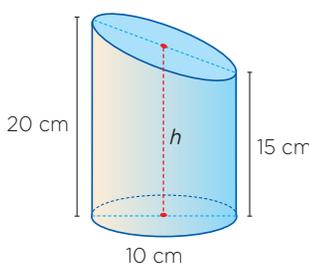
Resolución

- Hacemos un dibujo para visualizar mejor la situación e identificamos los datos de generatriz mayor (G), generatriz menor (g) y diámetro de la base (D).

$$G = 20 \text{ cm}$$

$$g = 15 \text{ cm}$$

$$D = \dots\dots\dots \text{ cm} \rightarrow R = \dots\dots\dots \text{ cm}$$



- Seleccionamos la fórmula que nos permita calcular el volumen (V) y reemplazamos los datos presentados en la situación:

$$V = \pi R^2 \left[\frac{G + g}{2} \right]$$

$$V = \pi(5)^2 \left[\frac{\dots\dots + \dots\dots}{2} \right]$$

$$V \approx (3,14)(25)(17,5) \rightarrow V \approx \dots\dots\dots \text{ cm}^3$$

- Reemplazamos los datos en la situación y hallamos el área lateral (A_L):

$$A_L = \pi R(G + g)$$

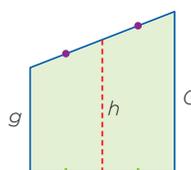
$$A_L \approx (3,14)(5)(\dots\dots\dots + \dots\dots\dots)$$

$$A_L \approx \dots\dots\dots \text{ cm}^2$$

- Por lo tanto, el volumen de la madera usada es $1373,75 \text{ cm}^3$ y el área de la lámina de aluminio mide $549,5 \text{ cm}^2$, aproximadamente.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. Observa la figura y responde: ¿la expresión $\frac{G + g}{2}$ es igual a h ? ¿por qué?

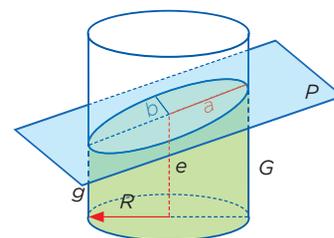


2. ¿Qué forma tiene la base oblicua? ¿Qué datos necesitas para calcular su superficie? Investiga y escribe la fórmula del área de una región elíptica.



Ten en cuenta

El **tronco de cilindro** de revolución es un sólido que se obtiene al cortar el cilindro de revolución por un plano no paralelo a sus bases.



Área lateral (A_L):

$$A_L = \pi R(G + g)$$

Volumen (V):

$$V = \pi \cdot R^2 \left[\frac{g + G}{2} \right]$$

Donde

G ; g : generatrices

R : radio

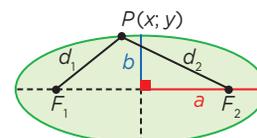
e : eje

P : plano de corte



Recuerda

Una de las bases del tronco de cilindro es una **elipse**, que es el lugar geométrico de los puntos P , de modo que la suma de las distancias (d_1 y d_2) desde P a dos puntos fijos F_1 y F_2 (llamados focos) es constante.



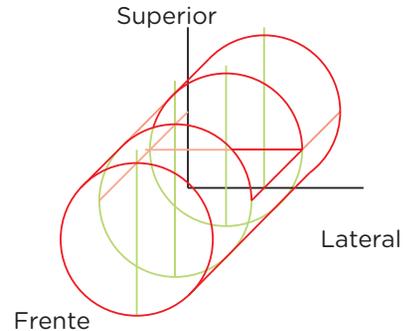
Donde $d_1 + d_2 = \text{constante}$



Aprendemos a partir del error

Situación C: Elaboramos piezas lúdicas

Luis diseña y elabora diversas piezas lúdicas de madera para encajar y armar, tales como los rompecabezas. Él elabora una nueva pieza, la cual se muestra en la figura. Al respecto, ¿cómo representarías las vistas de frente (proyección vertical), superior (proyección horizontal) y lateral (proyección lateral) de esta nueva pieza?



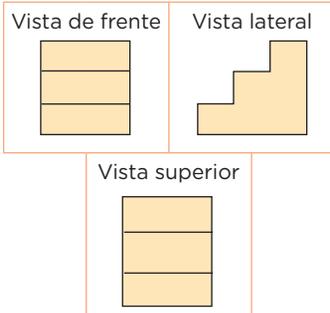
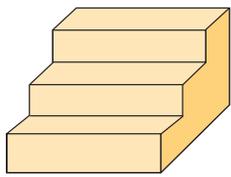
Ten en cuenta

La **vista de un objeto** se denomina **proyección**. Al proyectar vistas múltiples desde diferentes direcciones de manera sistemática, puedes describir por completo la forma de los objetos en tres dimensiones. Las vistas principales son las siguientes:

Vista superior: Proyección de un objeto visto desde arriba.

Vista de frente: Proyección de un objeto visto desde el frente.

Vista lateral: Proyección de un objeto visto desde uno de sus lados.

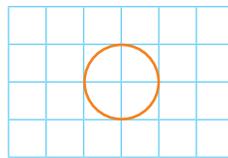


Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

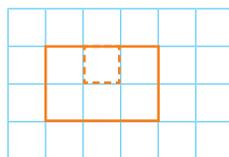
- Si observamos de frente el objeto (en un plano), se vería solo un círculo.

Representación de la vista de

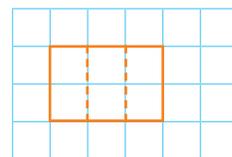


- Para la vista lateral, nos ubicamos a un costado (el derecho). Por último, mirando desde lo alto, obtenemos la vista superior.

Representación de la vista lateral



Representación de la vista



Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

- Si varias personas vieran solo las representaciones de las vistas, ¿crees que harían la misma imagen mostrada en la situación? Justifica empleando lenguaje matemático.

- Resuelve la situación utilizando otra técnica para verificar la solución o corregirla.

Evaluamos nuestros aprendizajes



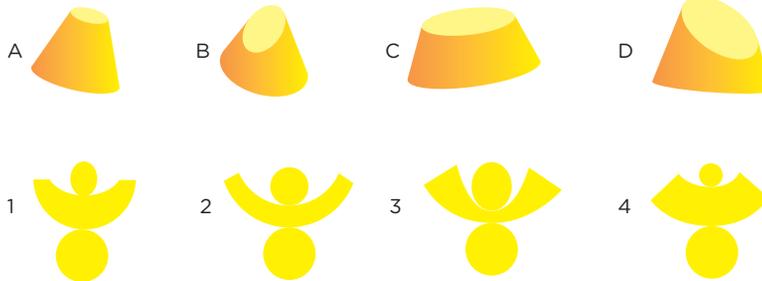
Propósito

Leemos textos que describen sólidos de revolución y establecemos relaciones entre sus atributos medibles. Empleamos estrategias para determinar el área y volumen de cuerpos de revolución, así como describir las vistas de formas tridimensionales; además, planteamos afirmaciones sobre las propiedades de un sólido de revolución.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Relaciona cada sólido con su respectivo desarrollo.

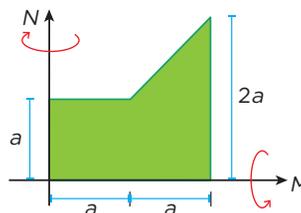


Andrés, al observar que su vaso tenía una forma cónica, tuvo curiosidad por saber la cantidad de chicha que había consumido. Entonces, le pidió a su amigo una regla y midió las dimensiones del vaso: el diámetro del fondo medía 4 cm; el de la parte superior, 6 cm, y la generatriz, 10 cm.

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.

2. ¿Cuál es el área lateral del vaso?
 a) $50\pi \text{ cm}^2$ b) $68\pi \text{ cm}^2$ c) $80\pi \text{ cm}^2$ d) $90\pi \text{ cm}^2$
3. ¿Qué volumen de chicha bebió Andrés?
 a) $187,82\pi \text{ cm}^3$ b) $124,16 \text{ cm}^3$ c) $63\pi \text{ cm}^3$ d) $50\pi \text{ cm}^3$
4. Un mecánico diseña dos piezas automotrices en el torno (herramienta que permite roscar, cortar, agujerear, cilindrar, desbastar y ranurar piezas de forma geométrica por revolución).

Para ello, él va a rotar la región del plano (color verde), primero alrededor del eje M y luego alrededor de N , como se muestra en la figura. Representa los sólidos obtenidos, según lo señalado.



5. Se tienen 30 macetas en forma de tronco de cono para sembrar una diversidad de plantas. Los radios de las bases de estas macetas miden 9 cm y 27 cm, respectivamente; y su generatriz, 30 cm. Si se llenaran al nivel de las $\frac{2}{3}$ partes de la generatriz de la maceta con gel para hidroponía, ¿cuántas bolsas de 5 litros de gel serán necesarias para habilitar todas las macetas? (Considera $\pi \approx 3,14$)



Recuerda

El **desarrollo plano de un cuerpo geométrico** es la representación de las partes de la figura en un solo plano horizontal.

El desarrollo plano de una figura geométrica se usará para visualizar las partes y las dimensiones exactas de un cuerpo geométrico para efectuar su ensamblaje posterior.



Ten en cuenta

La equivalencia entre centímetros cúbicos y litros es la siguiente:

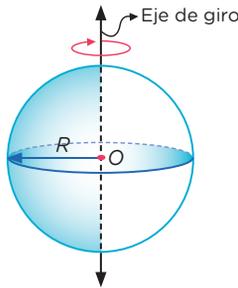
$$1 \text{ cm}^3 \equiv 0,001 \text{ L}$$

Por ejemplo, 450 cm^3 de gel equivalen a 0,45 L.



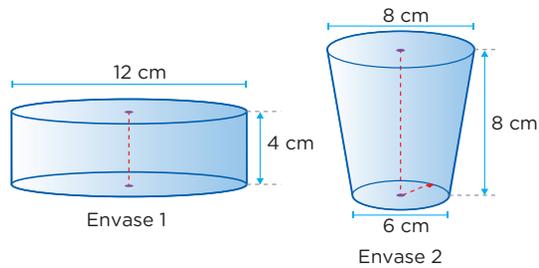
Ten en cuenta

La **esfera** es un sólido de revolución generado por la rotación de un semicírculo alrededor de su diámetro (eje de giro).



Volumen (V):
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

6. Héctor produce mermelada de fresa y, para promocionarla, desea utilizar envases como los de la figura, pero el de mayor volumen. Al respecto, ¿cuál de los dos envases utilizará?



- a) Envase 1, cuyo volumen es $144\pi \text{ cm}^3$.
 b) Envase 2, cuyo volumen es $296\pi \text{ cm}^3$.
 c) Envase 1, cuyo volumen es $48\pi \text{ cm}^3$.
 d) Envase 2, cuyo volumen es $98,67\pi \text{ cm}^3$.
7. Un músico ha adquirido 3 **ashikos**, tambores de origen africano con forma de cono truncado, cuyas dimensiones son 40 cm de alto, 26 cm de diámetro superior y 8 cm de diámetro inferior. Si se desea recubrir con una tela especial la parte lateral de los 3 ashikos, ¿cuántos centímetros cuadrados serán necesarios? (Considera $\pi \approx 3,14$)



Fuente: Shutterstock

- a) 6565,74 b) 6405,60 c) 2188,58 d) 248,06
8. Iván y Milagros compran, cada uno, 3 porciones de helados de forma esférica (con 6 cm de diámetro), que son servidos en vasos que tienen una altura, diámetro superior e inferior de 6 cm, 8 cm y 6 cm, respectivamente. Iván afirma que, si estas porciones se derriten, rebasarían la capacidad del vaso, mientras que Milagros afirma que esto no es así. ¿Quién tiene razón? Justifica tu respuesta.



Glosario

El **ashiko** es un instrumento musical de percusión que tiene forma de cono truncado. Se ejecuta con las manos y es usado para acompañamientos de algunos bailes típicos.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Leí textos o gráficos que describen los sólidos de revolución compuestos y truncados, y establecí relaciones entre sus características y los atributos medibles.			
Describí las vistas de una forma tridimensional compuesta (de frente, lateral y superior).			
Empleé diversas estrategias para determinar el área y el volumen de sólidos de revolución.			
Planteé afirmaciones sobre las relaciones y propiedades de los sólidos de revolución.			

¿Cómo nos ayudan las medidas de dispersión en la toma de decisiones?



Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Recopilamos datos de una variable cuantitativa de una muestra pertinente con el objetivo de estudiarlos. Adaptamos y combinamos procedimientos para determinar medidas de tendencia central, como la media, y medidas de dispersión, como el rango, la desviación media, la desviación estándar y la varianza.



Analizamos los resultados de una prueba de Matemática

En muchos ámbitos del quehacer laboral y de la investigación, es frecuente escuchar frases como “la desviación típica de la masa de los estudiantes es muy grande” o “la media de las estaturas presenta poca desviación”. Estas son medidas estadísticas de dispersión respecto a la media, que se utilizan para tomar decisiones, y constituyen importantes fuentes para el análisis de datos y variables.

Al respecto, Rafael, profesor de Matemática, desea saber el grado de dispersión de los puntajes que han obtenido sus 10 estudiantes de quinto grado de secundaria en la prueba de Matemática para decidir si volverá a tomar otra prueba. Los puntajes se muestran en la siguiente tabla:

Estudiante	Puntaje
Ana	14
Juan	16
Sergio	14
Luz	12
Carlos	17
Pedro	10
Julio	16
Inés	12
Elva	17
Erick	17



Fuente: Yeseline Martínez

Considerando la información brindada y los datos de la tabla, resuelve la situación y responde las siguientes preguntas:

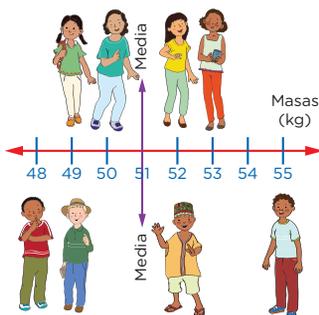
- El profesor Rafael cree que el rango de los puntajes obtenidos en la prueba es muy grande. ¿Cuál es este rango?
- El docente ha señalado que, si la desviación media de dicha prueba es mayor que 2,1, rendirán otra prueba. ¿Qué decisión tomó el profesor?
- Al ver la media de los puntajes de la prueba, el profesor Rafael ha señalado que una varianza de hasta 4,5 indicaría buenos resultados. ¿Cuál es la varianza de los puntajes de la prueba de Matemática?
- Con la finalidad de estar seguro de la distribución de los puntajes, el profesor decide que el valor de la desviación estándar será el que definirá si vuelve a tomar otra prueba. Por ello, ha señalado que, si el doble de la desviación estándar es mayor que 4,5, tomará otra prueba. ¿Cuál será la decisión del profesor?

Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 4.



Ten en cuenta

Las **medidas de dispersión** muestran la variabilidad de una distribución de datos, los cuales indican si están muy alejados de la media o muy cercanos a ella. Cuanto mayor sea su valor, mayor será la variabilidad; cuanto menor sea, más homogénea será la distribución de los datos respecto a la media.



En el gráfico, las masas de las mujeres están más cerca de la media, es decir, presentan menos variabilidad; y son más homogéneas que las de los varones, puesto que sus valores están más alejados de la media.

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos puedes encontrar en la situación inicial?

2. ¿Cuál es el puntaje máximo y mínimo que han obtenido los estudiantes?

3. ¿Cuál es la condición que ha dado el profesor Rafael respecto a la desviación media para que tome otra prueba?

4. ¿Cuál es el valor de la varianza que indica buenos resultados en la prueba de Matemática, según el profesor Rafael?

5. Para que el profesor Rafael tome otra prueba, ¿qué condición debería tener la desviación estándar?

6. ¿Qué necesitas hallar para responder las interrogantes planteadas?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

7. ¿Cuál de las siguientes estrategias te podrá ayudar para resolver la situación inicial?

- a) Plantear una ecuación c) El diagrama tabular
 b) El diagrama analógico

8. Describe el procedimiento a seguir para responder las preguntas de la situación inicial. Por ejemplo, para calcular la media aritmética en la tabla adjunta.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i}{n} = \frac{\quad}{30} =$$

Hora/día (x_i)	f_i	$x_i \cdot f_i$
1	4	4
2	5	
3	5	15
4		
5	5	25
Total	30	

Ejecutamos la estrategia o plan

9. Organiza los datos de la situación inicial en la tabla. Luego, completa la frecuencia absoluta y el producto de la frecuencia absoluta por cada dato de la variable.

Puntaje (x_i)	f_i	$x_i \cdot f_i$
10	1	10
12	2	24
14		
Total		

10. Determina la diferencia entre el puntaje mayor y el menor. En tu opinión, ¿qué significa que la diferencia sea grande o pequeña? Explica.

11. Calcula la media aritmética (\bar{x}) de los puntajes utilizando los datos de la tabla de frecuencias de la pregunta 9. Luego, interpreta el valor encontrado.

12. Realiza tus cálculos empleando la media aritmética y completa la siguiente tabla:

Puntaje (x_i)	f_i	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot f_i$
10	1	4,5	
12	2		
14			
Total			

13. A partir de la pregunta anterior, calcula la desviación media (DM). Luego, responde la pregunta **b** de la situación inicial.



Recuerda

La **media aritmética** (\bar{x}) para datos agrupados es el promedio de los datos. Para calcularla se suman los productos de cada frecuencia absoluta (f_i) por el valor de la variable (x_i) y el resultado se divide entre el número total de datos (n).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot f_i}{n}$$

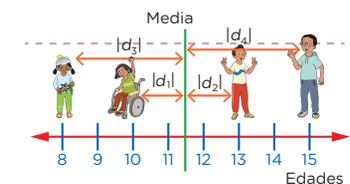
Donde

- x_i : valor de la variable
- f_i : frecuencia absoluta
- k : cantidad de valores de x_i
- n : tamaño de la muestra



Ten en cuenta

La **desviación media (DM)** para datos agrupados, denominada también desviación promedio, mide el promedio de las distancias de los datos respecto a la media aritmética.



$$DM = \frac{|d_1| + |d_2| + |d_3| + |d_4|}{4}$$

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n}$$

Donde

- x_i : valor de la variable
- \bar{x} : media aritmética
- f_i : frecuencia absoluta
- k : cantidad de valores de x_i
- n : tamaño de la muestra



Recuerda

La **varianza** (V) también es una medida de dispersión que indica la variabilidad de los datos. Es igual a la media aritmética del cuadrado de las desviaciones respecto a la media por la frecuencia absoluta.

$$V = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$$

Donde

x_i : valor de la variable

\bar{x} : media aritmética

f_i : frecuencia absoluta

k : cantidad de valores de x_i

n : tamaño de la muestra

14. Calcula y completa la siguiente tabla:

Puntaje (x_i)	f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
10	1	-4,5		
12	2			
14				
Total				

15. Halla la varianza (V) y corrobora lo señalado por el profesor Rafael. ¿Los resultados de la prueba son buenos? Justifica tu respuesta.

16. Calcula la desviación estándar (s) y responde si el profesor Rafael tomará o no otra prueba a sus estudiantes.



Ten en cuenta

La **desviación estándar** (s) expresa el grado de dispersión de los datos respecto a la media aritmética (\bar{x}) de la distribución. Es igual a la raíz cuadrada del valor de la varianza (V).

$$s = \sqrt{V}$$



En la imagen se observa poca dispersión de las estaturas respecto a la media. Las estaturas se encuentran alrededor del valor de s (5,7 cm), excepto una de ellas, la de 9 cm.

Reflexionamos sobre el desarrollo

17. ¿Las tablas empleadas te facilitaron la resolución de la situación inicial? Justifica tu respuesta.

18. ¿El procedimiento elegido fue el más adecuado para resolver la situación y responder las preguntas planteadas? Justifica tu respuesta.

Comprobamos nuestros aprendizajes



Propósito

Expresamos con lenguaje matemático nuestra comprensión sobre la pertinencia de la media en relación con la desviación media, la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación para plantear conclusiones y reconocer errores si los hubiera, así como para proponer mejoras.



Situación A: El estudio clínico

Una compañía farmacéutica realizó un estudio clínico con veinte personas para probar la efectividad de un medicamento que reduce los niveles elevados de colesterol durante doce semanas. En la tabla se aprecian los niveles de colesterol antes y después del tratamiento.

Se sabe que las medias del nivel de colesterol antes y después del tratamiento son 264,4 y 167,1, respectivamente.

Según estos datos, determina el grado de dispersión en la muestra calculando la desviación media y responde:

Código	Nivel de colesterol	
	Antes	Después
1	230	173
2	267	173
3	312	168
4	314	168
5	306	169
6	292	169
7	249	162
8	230	162
9	232	165
10	269	165
11	230	168
12	267	169
13	312	168
14	314	169
15	306	176
16	292	176
17	249	168
18	230	168
19	118	153
20	269	153

- ¿Cuál es el rango del nivel de colesterol antes y después del tratamiento con el medicamento? Compara los resultados y establece una conclusión.
- Con la finalidad de determinar el intervalo que agrupe los datos alrededor de la media antes del tratamiento, los responsables del estudio han decidido utilizar la desviación media (DM). ¿Cuál es el intervalo que agrupa los datos alrededor de la media utilizando la DM ?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

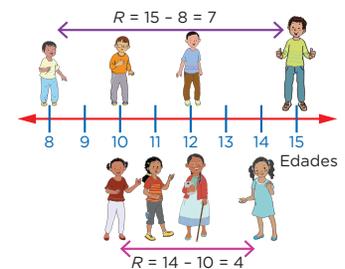
Calculamos el rango (R) del nivel de colesterol antes y después del tratamiento.

Rango antes del tratamiento	Rango después del tratamiento	Conclusión
Valor máximo: 314 Valor mínimo: 118	Valor máximo: 176 Valor mínimo: 153	Podemos afirmar que el nivel de colesterol después del tratamiento es menos disperso o más homogéneo.
$R = 314 - 118 = \dots\dots\dots$	$R = 176 - 153 = \dots\dots\dots$	



Recuerda

El **rango o recorrido** (R) mide la amplitud de los valores de la muestra o de la distribución de los datos, y se halla restando el dato mayor menos el dato menor de la variable.



En la imagen, la diferencia de las edades de los extremos en los chicos es mayor que en las chicas.

$$R = V_{\text{máx}} - V_{\text{mín}}$$

El rango es una medida de dispersión importante, aunque insuficiente para valorar adecuadamente la variabilidad de los datos.



Calculamos la desviación media (DM):

- Elaboramos y completamos la tabla según el enunciado de la **situación A**, considerando $\bar{x} = \frac{5288}{20} = 264,4$.

Nivel de colesterol antes del tratamiento (x_i)	f_i	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot f_i$
118	1	146,40	146,40
230	4	34,40	137,60
232	1	32,40	32,40
249	2	15,40	30,80
267	2	2,60	5,20
269	2	4,60	9,20
292	2	27,60	55,20
306		41,60	83,20
312			95,20
314			
Total	20		694,40



¿Sabías que...?

El **colesterol** es una sustancia cerosa y parecida a la grasa, que se encuentra en todas las células del cuerpo. Puedes hallarlo en algunos alimentos, como la carne y los productos lácteos. Cuando tienes demasiado colesterol en la sangre, corres el riesgo de padecer de una enfermedad arterial coronaria.

- Sumamos los valores de la última columna y hallamos la DM :

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n} = \frac{694,40}{20} = \dots\dots\dots$$

- Calculamos el intervalo pedido:
 $[Media - DM; Media + DM] = [264,4 - 34,72; 264,4 + 34,72]$
 $= [229,68; \dots\dots\dots]$
- Por lo tanto, el intervalo que agrupa los datos alrededor de la media utilizando la DM es $[229,68; \dots\dots\dots]$.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- Describe el procedimiento para calcular el intervalo que agrupa los datos alrededor de la media antes del tratamiento.

- ¿Cuál es el nivel de colesterol que tiene la mayor cantidad de personas? ¿Se encuentra dentro del intervalo?

- ¿Qué crees que ocurra con los valores de las medidas de dispersión después del tratamiento? Argumenta tu respuesta.

- Plantea dos ventajas del uso de las medidas de dispersión.



Ten en cuenta

Para analizar una serie de datos, no basta con conocer las medidas de tendencia central, que son las que indican dónde se sitúan la mayoría de datos; también es necesario estudiar las medidas de dispersión o variabilidad. Estas indican qué tanto se dispersan o agrupan los datos respecto a su media aritmética.

Situación B: Resultados de un estudio clínico

Considerando la información de la situación A, una compañía farmacéutica le había solicitado al equipo de investigadores que le informase sobre la tendencia en los niveles de colesterol antes del tratamiento y la variación del nivel después del tratamiento. Analiza los datos y descubre la respuesta que dieron los investigadores.

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

- Hallamos la variación del nivel de colesterol y completamos la tabla.

Nivel de colesterol antes del tratamiento	118	230	230	230	230	232	249	249	267	267	269	269	292	292	306	306	312	312	314	314
Disminución del nivel por el tratamiento	-35	57	68	62	62	67	87	81	98	104	116	123	116		130	144	144	146		

- Elaboramos el diagrama de dispersión para establecer la correlación entre las variables **nivel de colesterol antes del tratamiento** y **disminución del nivel**; y, para analizar la tendencia, trazamos una recta que se ajuste a los datos.



- Del gráfico, a mayor nivel de colesterol antes del tratamiento, mayor será la disminución del nivel de colesterol después del tratamiento.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo hallaste la disminución del nivel de colesterol?

- ¿Cómo es la dispersión de los datos en la recta? ¿Qué información puedes obtener con la recta de tendencia?, ¿y cuál es su correlación?



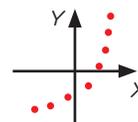
Ten en cuenta

Un **diagrama de dispersión** es la gráfica de todos los pares ordenados que corresponden a dos variables cuantitativas que conservan una relación entre ellas.

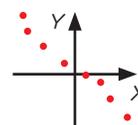


Recuerda

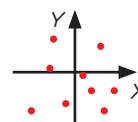
Los tipos de correlación son:
Correlación positiva: Cuando el valor de una variable aumenta o disminuye, la otra también aumenta o disminuye.



Correlación negativa: Cuando el valor de una variable aumenta, la otra disminuye.



Correlación nula: No se encuentra ningún comportamiento entre las variables.





Aprendemos a partir del error

Situación C: Estatura de los jugadores de la selección

La tabla muestra las estaturas de los jugadores de una selección de fútbol.

Calcula la desviación estándar y el coeficiente de variación; luego, interpreta los resultados.

Estatura (cm)	f_i
[169; 173[4
[173; 177[5
[177; 181[7
[181; 185[4
[185; 189]	3
Total	23



Recuerda

El punto medio o marca de clase (X_i) es la semisuma de los límites inferior y superior de cada intervalo de clase.

Por ejemplo, si el intervalo de clase es [12; 16[, el punto medio es

$$X_i = \frac{12 + 16}{2} = 14.$$

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

- Para calcular la desviación estándar y el coeficiente de variación, elaboramos la tabla de distribución de frecuencias.

Estatura (cm)	f_i	X_i	$X_i \cdot f_i$	$(X_i - \bar{x})^2$	$(X_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
[169; 173[4	171	684	55,5	223,80
[173; 177[5	175	875	12,11	60,55
[177; 181[7	179	1253	0,27	1,89
[181; 185[4	183	732	20,45	81,72
[185; 189]	3	187	561	72,62	217,77
Total	23		4105		585,74

- Para completar la tabla, calculamos la media aritmética, la desviación estándar y el coeficiente de variación:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i \cdot f_i}{n} = \frac{4105}{23} \approx \dots\dots\dots$$

$$s = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n} = \frac{585,74}{23} \approx \dots\dots\dots$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \% = \frac{25,47}{178,48} \times 100 \% \approx \dots\dots\dots$$

- Por lo tanto, esa desviación estándar de las estaturas representa el 14,2 % de desviación respecto a la media. Si el CV se encuentra entre el 10 % y el 15 %, es decir, $10 \% < CV < 15 \%$, entonces los datos son regularmente homogéneos.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Es posible que la desviación estándar sea mayor que el rango de las estaturas? Explica.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Verifica el procedimiento y los resultados de la desviación estándar y del coeficiente de variación. Si son incorrectos, corrígelos e interpreta los nuevos resultados.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Ten en cuenta

El **coeficiente de variación** (CV) es la medida estadística que indica porcentualmente qué tan separados están los datos en relación con su media aritmética. Lo obtienes al dividir la desviación estándar (s) entre la media aritmética (\bar{x}).

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \%$$

Donde

s : desviación estándar

\bar{x} : media aritmética



El coeficiente de variación carece de unidades de medida y se expresa de manera porcentual.

Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Representamos datos cuantitativos de una muestra pertinente combinando procedimientos para determinar medidas de dispersión y la relación entre estas. Asimismo, expresamos con lenguaje matemático nuestra comprensión sobre dichas medidas planteando conclusiones.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

Se aplica un estudio para determinar la relación entre el nivel de ansiedad y la autoestima a un grupo de 20 personas entre mujeres y hombres. En la tabla se muestran los puntajes obtenidos en cada variable. También se sabe que las medias de las variables son las siguientes:

$$\bar{x}_{\text{autoestima}} = 2,83 \quad \bar{x}_{\text{ansiedad}} = 1,70$$

Se recomienda utilizar una hoja de cálculo para facilitar las operaciones.

Con la información dada, responde las preguntas 1, 2, 3 y 4.

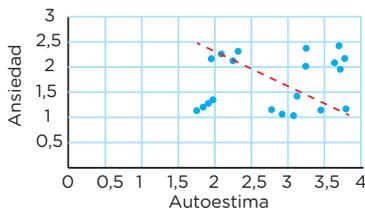
1. ¿Cuál es el rango del nivel de autoestima de las personas en el estudio?
 a) 2,50 b) 2,05 c) 2,09 d) 2,15
2. Con la finalidad de establecer la amplitud de los puntajes en el nivel de ansiedad, se desea calcular el rango de los valores de la tabla para el grupo de personas. ¿Cuál es el rango de los puntajes mostrados en la tabla?
 a) 1,35 b) 1,39 c) 1,57 d) 2,52
3. Para establecer diferencias en la variable autoestima, los responsables de la encuesta desean saber si el rango de los puntajes de autoestima, mostrados en la tabla, es mayor en los hombres o en las mujeres. ¿Cuál será el resultado?
 a) El rango es mayor en los hombres.
 b) El rango es mayor en las mujeres.
 c) Es igual en ambos.
 d) No se puede determinar.
4. Calcula el porcentaje de desviación respecto a la media de la evaluación relacionada con los valores del nivel de ansiedad.
5. Los estudiantes del quinto grado A de secundaria obtuvieron en una prueba de Matemática una media de 68,7 puntos, con una desviación estándar de 15,4; mientras que los del quinto B obtuvieron una media de 50,9 puntos, con una desviación estándar de 19,6. Si el docente decide apoyar a la sección de estudiantes que tenga una calificación menos homogénea, ¿a cuál de las dos secciones apoyará?

Nombres	Autoestima	Ansiedad
Pedro	3,08	1,42
Noemí	2,92	1,96
Luis	1,75	2,43
Daniela	3,45	1,13
Danny	2,78	2,12
Angie	3,80	1,07
Fernando	1,84	2,38
Víctor	1,91	2,26
Armando	1,98	2,31
Celia	3,12	1,35
Eduardo	3,72	1,16
Juan	3,24	1,28
José	3,64	1,21
María	2,25	2,02
Larisa	3,78	1,15
Rocío	1,95	2,17
Carlos	2,09	2,18
Roberto	2,32	2,09
Jesús	3,25	1,18
Carmen	3,70	1,04



Recuerda

La noción de dispersión hace referencia al grado en que los datos de una variable son más homogéneos (menor dispersión o variabilidad) o más heterogéneos (mayor dispersión o variabilidad).



De acuerdo con los valores de las variables ansiedad y autoestima, se elaboró una gráfica de dispersión de puntos en el plano cartesiano.

Con la información dada en el gráfico, responde las preguntas 6 y 7.

Ten en cuenta

La **línea de tendencia** representa de mejor manera los puntos en un diagrama de dispersión. Puede atravesar algunos puntos, pero no necesariamente a todos en la nube de puntos. La tendencia puede ser positiva o negativa (depende del valor de la pendiente). Cabe precisar que, si no hay relación entre las variables, no habrá ninguna línea de tendencia.

6. ¿Qué características tiene la recta de tendencia?
- a) Es creciente y relaciona la autoestima con los hombres.
 - b) Es decreciente y relaciona la ansiedad de las mujeres con la autoestima de los hombres.
 - c) Es decreciente y relaciona la autoestima de las personas con su ansiedad.
 - d) Es creciente y relaciona la autoestima de los hombres con la ansiedad de las mujeres.
7. ¿Qué se puede concluir del diagrama anterior en relación con la autoestima y la ansiedad de las personas?
- a) Existe una relación inversa entre la autoestima y la ansiedad.
 - b) Existe una relación directa entre la autoestima y la ansiedad.
 - c) No existe relación entre la autoestima y la ansiedad.
 - d) No se puede llegar a ninguna conclusión.

Estatura (cm)	Jugadores titulares	Jugadores suplentes
[169; 173[4	4
[173; 177[5	5
[177; 181[6	5
[181; 185[3	4
[185; 189]	2	2
Total	20	20

8. Un entrenador de vóley registra las estaturas (ver tabla del margen) de los dos equipos a su cargo. Como estrategia de juego, presentará en el campeonato local al equipo cuyas estaturas de los jugadores sean las más parejas posibles (homogéneas). Luego de haber estimado la desviación estándar y el coeficiente de variación, concluye que presentará al equipo de jugadores suplentes. ¿Será correcta la decisión del entrenador? Justifica tu respuesta.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Representé datos de una variable cuantitativa para determinar su variabilidad.			
Expresé con lenguaje matemático mi comprensión sobre la desviación media, la varianza y la desviación estándar.			
Combiné procedimientos para determinar el rango, la desviación media, la varianza, la desviación estándar y el coeficiente de variación.			
Planteé y contrasté conclusiones sobre la dispersión de los datos; reconocí errores y propuse mejoras.			

¿Cómo aplicamos las tasas de interés simple y compuesto en nuestra vida cotidiana?



Construimos nuestros aprendizajes

Propósito

Expresamos con diversas representaciones y lenguaje numérico nuestra comprensión sobre las tasas de interés simple y compuesto, así como de los términos financieros para interpretar el problema en nuestro contexto. Además, adaptamos estrategias de cálculo para realizar operaciones con tasas de interés simple o compuesto.



Analizamos la compra de un departamento

El Estado peruano, con su programa Mi Vivienda, brinda la oportunidad de adquirir departamentos, condominios y casas propias. Hay un crecimiento tanto en la construcción como en la venta y el alquiler de viviendas debido a la estabilidad económica y las ofertas en las tasas de interés hipotecario. En el Perú, la tasa de interés promedio de un crédito hipotecario en soles es de 9 % anual, y en dólares, de 8,5 %. Por este motivo, cada vez más personas tienen acceso a este tipo de crédito.



Fuente: Shutterstock

La familia Ramírez Torres desea adquirir un departamento, pero solo dispone de \$20 000 y le faltan \$40 000. Por ello, acuden a dos entidades crediticias con la intención de solicitar en una de ellas un crédito hipotecario y así comprar su departamento. Ellos deben analizar las siguientes propuestas y elegir la más conveniente:

Entidad financiera Dacasa

- Pago en cuotas mensuales iguales durante 10 años
- Tasa de interés simple de 8,5 % anual

Entidad financiera Davivienda

- Pago en cuotas mensuales durante 10 años
- Tasa de interés compuesto de 7,5 % anual

Ayuda a la familia Ramírez Torres a elegir la financiera que más le conviene; para ello, resuelve la situación y responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál sería el comportamiento de los intereses en los primeros 5 años según la propuesta de cada financiera?
- ¿Cuál sería la mejor opción para la familia Ramírez Torres? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuánto es la cuota mensual que pagaría la familia Ramírez Torres en la financiera seleccionada?



Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 5.



Recuerda

El **interés** es la ganancia o beneficio que produce un capital impuesto durante cierto tiempo y bajo determinadas condiciones.

La **tasa de interés**, expresada en porcentaje, hace referencia a la cantidad que se abona en una unidad de tiempo por cada unidad de capital invertido.

Comprendemos el problema

1. ¿Cuál es la tasa de interés promedio en el Perú en el mercado inmobiliario?

2. ¿De cuánto dinero dispone la familia Ramírez Torres para comprar el departamento y cuánto dinero necesita financiar? Completa la tabla.

Dinero del que dispone	Dinero que financiará

3. ¿Cuál es la tasa de interés de las financieras Dacasa y Davivienda? Completa la tabla.

Financiera	Dacasa	Davivienda
Tasa de interés		

4. ¿De qué tipo son las tasas de interés ofrecidas? ¿En qué se diferencian dichas tasas? Explica.

5. ¿Qué tiempo han considerado ambas financieras en sus propuestas del crédito?

6. ¿En cuántas cuotas mensuales la familia Ramírez Torres podría pagar su crédito hipotecario?

7. ¿Qué debes calcular para responder las preguntas de la situación inicial?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

8. Suponiendo que recibes un préstamo de S/100 con una tasa de interés simple del 5 % mensual, completa la tabla y explica el comportamiento del capital, del interés y del monto.

Mes	Capital (S/)	Interés (S/)	Monto (S/)
1	100	$\frac{5}{100} \times 100 = 5$	$100 + 1(5) = 105$
2	100	$\frac{5}{100} \times 100 = 5$	$100 + 2(5) =$
3			

9. ¿Qué estrategia utilizarías para resolver el problema?
- a Realizar un gráfico c Plantear una ecuación

b Usar un diagrama tabular

10. ¿En qué consiste la estrategia que elegiste para resolver la situación inicial?

Ejecutamos la estrategia o plan

11. Desarrolla la estrategia y completa la tabla según la propuesta de la financiera Dacasa. Usa una calculadora.

Año	Capital (\$)	Interés (\$)	Monto (\$)
1	40 000	$\frac{8,5}{100} \times 40 000 = 3400$	$40 000 + 1(3400) = 43 400$
2	40 000	$\frac{8,5}{100} \times 40 000 = 3400$	$40 000 + 2(3400) = 46 800$
3			
4			
5			

12. Desarrolla la estrategia y completa la tabla según la propuesta de la financiera Davivienda. Usa una calculadora.

Año	Capital (\$)	Interés (\$)	Monto (\$)
1	40 000	$\frac{7,5}{100} \times 40 000 = 3000$	$40 000 + 3000 = 43 000$
2	43 000	$\frac{7,5}{100} \times 43 000 = 3225$	$43 000 + 3225 =$
3			
4			
5			



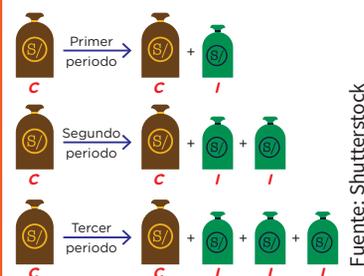
Recuerda

Antes de seleccionar la estrategia, puedes revisar la página 6 de *Fichas de Matemática 5*. En ella encontrarás diversas estrategias sugeridas.



Ten en cuenta

El **interés simple (I)** se da cuando el interés generado por el capital invertido o prestado no se agrega a este. Dicho interés es el mismo (constante) en cada periodo de tiempo.



Fuente: Shutterstock

Lo calculas mediante

$$I = C \cdot r \cdot t$$

Además, para calcular el monto (M), tienes lo siguiente:

$$M = C + I$$

Donde

I: interés

C: capital inicial

r: tasa de interés

t: tiempo

M: monto (capital final)

Comprobamos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre datos sobre tasas de interés y las transformamos en expresiones que incluyen interés simple o compuesto; además, planteamos y comparamos afirmaciones sobre la conveniencia o no de determinadas tasas de interés y otras relaciones numéricas, y corregimos errores si los hubiera.



Situación A: Préstamo bancario

Ricardo tiene dos hijos, quienes acaban de ingresar a la universidad. Por ello, solicita un préstamo con las siguientes condiciones:

- El banco le prestará S/12 500 al inicio de este año.
- Los pagos los realizará en cuotas mensuales iguales.
- Al finalizar cada año, se contabilizarán intereses correspondientes al 18 % de los S/12 500 prestados por un periodo de 5 años.

¿Qué tiempo habrá transcurrido hasta ahora, si Ricardo ha pagado S/14 250?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

Tenemos que C : capital, r : tasa de interés, t : tiempo y M : monto.

- Del enunciado observamos que es un modelo de interés simple.
- Datos: $C = \dots$; $r = \dots = 0,18$; $t = \dots$ años y pago realizado = S/14 250

- Calculamos el monto a pagar en 5 años:

$$M = C(1 + r \cdot t) = \dots (\dots + \dots \times \dots) \rightarrow M = \dots$$

- El pago mensual sería de $\frac{\dots}{\dots} \approx \dots$ soles.
- El tiempo transcurrido es $\frac{\dots}{\dots} \div \dots = \dots$ meses.

Por lo tanto, han transcurrido \dots meses o \dots años.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué datos de la situación te dan a entender que es un caso de interés simple?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. Describe el procedimiento realizado para responder la pregunta de la situación.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. El procedimiento realizado aquí, ¿en qué se parece al de la situación de la sección "Construimos nuestros aprendizajes"? Explica.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Ten en cuenta

Cuando trabajas con el interés simple, es posible calcular el monto de forma directa.

Para hallar dicha expresión, bastará con reemplazar el interés en la fórmula del monto, de esta manera:

$$M = C + I$$

$$M = C + C \cdot r \cdot t$$

Factoriza el capital:

$$M = C(1 + r \cdot t)$$



Recuerda

En el **interés simple** puedes retirar el interés ganado al vencimiento de cada uno de los periodos; mientras que en el **interés compuesto** no puedes retirar el interés ganado, ya que este se acumula al capital, de modo que forma un nuevo capital.

Situación B: Compra a crédito

Manuel decidió comprar un *smart TV* de 70 pulgadas a crédito, con una cuota inicial de S/699 y un saldo restante financiado en 12 mensualidades de S/198 cada una. ¿Cuál es la tasa de interés que se aplica al crédito solicitado, si se sabe que la capitalización se realizó semestralmente? ¿Cuánto le costó realmente el *smart TV* a crédito?



Fuente: Shutterstock



Ten en cuenta

El **periodo de capitalización** es el tiempo que hay entre dos fechas sucesivas en que los intereses son agregados al capital, y esto ocurre en el interés compuesto.

Por ejemplo, si la capitalización es mensual, entonces cada mes se agregará al capital el interés ganado en ese mes, y así sucesivamente.



Recuerda

Para calcular el interés, debes asegurarte de que el tiempo y la tasa de interés estén expresados en el mismo periodo de tiempo que la capitalización.

Por ejemplo, si el tiempo fuera 2 años y la tasa del 2 % mensual con una capitalización trimestral, entonces tendrías lo siguiente:

$t = 2 \text{ años} = 8 \text{ trimestres}$
 $r = 2 \% \text{ mensual} = 6 \% \text{ trimestral}$

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

Tenemos los siguientes datos:

- Precio al contado:
- Cuota inicial:
- Tiempo: 12 meses
- Saldo a pagar:
- Cuota mensual:
- Monto del crédito: $12 \times S/198 = \dots\dots\dots$
- Capitalización: semestral

Como la capitalización es semestral, debemos expresar el tiempo en semestres:

$$\text{Tiempo} = 12 \text{ meses} \times \frac{1 \text{ semestre}}{6 \text{ meses}} = \frac{12 \text{ semestres}}{6} = 2 \text{ semestres}$$

- Aplicamos la fórmula del monto, $M = C(1 + r)^t$, para calcular la tasa.

$$2376 = 2000(1 + r)^2$$

$$\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = (1 + r)^2$$

$$\dots\dots\dots = (1 + r)^2$$

$$\dots\dots\dots = 1 + r$$

$$\dots\dots\dots \approx 1 + r$$

$$\dots\dots\dots - 1 \approx r \rightarrow r \approx \dots\dots\dots$$

Luego, la tasa de interés es del 0,09 semestral.

Expresamos en porcentaje la tasa de interés: $r \approx 0,09 \times 100 \% = 9 \%$

Por lo tanto, la tasa de interés compuesto es, aproximadamente, 9 % semestral; y el costo total fue, aproximadamente, de $\dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ soles.



Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo determinaste el monto del crédito? Explica.

2. ¿Qué tipo de interés aplicaste al crédito otorgado?

- a) interés simple b) interés compuesto

3. ¿Por qué se expresó el tiempo en semestres? Argumenta tu respuesta.

4. ¿Cómo dedujiste que la tasa de interés compuesto debía expresarse en semestres? Explica.

5. Si el crédito brindado fuera con interés simple, ¿la tasa de interés resultaría mayor o menor que con el interés compuesto? Completa la tabla y justifica.

Datos	Cálculo de la tasa de interés simple
$C = S/2000$	$I = C \cdot r \cdot t$
$I = M - C = \dots\dots\dots$	
$t = 12 \text{ meses} = \dots\dots\dots \text{ semestres}$	
$r = \text{¿? semestral}$	
Respuesta:	

6. ¿En qué se parece lo trabajado en la **situación A** a la situación inicial de la sección “Construimos nuestros aprendizajes”? Explica.

7. Verifica si la respuesta es correcta aplicando la fórmula del monto.

Datos	Cálculo del monto (M)
$C = S/2000$	$M = C(1 + r)^t$
$t = 12 \text{ meses} = \dots\dots\dots \text{ semestres}$	
$r = \dots\dots\dots \text{ semestral}$	
Capitalización: $\dots\dots\dots$	
$M = \text{¿?}$	
Respuesta:	



Ten en cuenta

La tabla muestra equivalencias en los periodos de tiempo.

Periodo de tiempo	En 1 año
Semestre (6 meses)	2
Cuatrimestre (4 meses)	3
Trimestre (3 meses)	4
Bimestre (2 meses)	6
Mes	12



Recuerda

Cuando en el problema no te especifican el tipo de interés, se sobrentiende que se trata de un interés simple.
 Por ejemplo, Hugo deposita S/2500 en un banco a una tasa del 2 % mensual. ¿Cuánto ganará en 2 años?
 Como no te indican el tipo de interés, entonces puedes deducir que se trata del interés simple.

Aprendemos a partir del error

Situación C: Gratificación a los trabajadores

Para pagar la gratificación de fiestas patrias de sus trabajadores, el administrador de una carpintería ha decidido depositar S/3600 en un banco, durante 6 meses, con una tasa de interés del 12 % y una capitalización semestral. ¿A cuánto asciende la gratificación de cada uno de sus 4 trabajadores?

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

- Se trata de una operación de interés compuesto, donde:
 $C = S/3600$; $t = 6$ meses
 $r = 12\% \text{ anual} = 1\% \text{ mensual} = 0,01$
 $n = 4$ trabajadores; $M = ?$

- Calculamos el monto (M) que se obtendrá en el banco:

$$M = C(1 + r)^t$$

$$M = 3600(1 + 0,01)^6$$

$$M \approx S/3821,47$$

- A cada trabajador le corresponde $\frac{3821,47}{4} \approx S/955,37$.

Por tanto, la gratificación de cada trabajador asciende a S/955,37.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Qué tipo de interés interviene en esta situación? ¿Cómo lo puedes reconocer?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

2. ¿Qué tipo de capitalización se utilizó en la resolución planteada? ¿Cuál debió ser el correcto?, ¿por qué?

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

3. Verifica que el procedimiento y la respuesta sean correctos. Si no lo son, corrígelos en la siguiente tabla:

Datos	Cálculo del monto (M)
$C = S/3600$	$M = C(1 + r)^t$
$t = \dots\dots\dots$ meses = $\dots\dots\dots$ semestre	
$r = \dots\dots\dots$ anual = $\dots\dots\dots$ semestral	
Capitalización:	
$M = ?$	
$n = 4$ trabajadores	
Respuesta:	



Recuerda

Cuando en el problema no te especifican el periodo de capitalización, puedes suponer que se trata de una capitalización anual.

Por ejemplo, Richard solicita un préstamo de S/4500 a un banco, con una tasa de interés compuesto del 2 % semestral. ¿Cuánto interés ganará en 2 años?

Como en el ejemplo no te indican el periodo de capitalización, puedes deducir que es anual.



¿Sabías que...?

Entre los productos y servicios que te ofrecen los bancos están los depósitos a plazo fijo y las cuentas de ahorro. En el caso de los **depósitos a plazo fijo**, estos se realizan por un monto, plazo y tasa de interés convenidos. Son cuentas que pagan un mayor interés a los ahorristas por el dinero que depositan y que permanece un tiempo determinado sin ser retirado.

Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Expresamos con diversas representaciones y lenguaje matemático nuestra comprensión sobre el interés simple y compuesto para interpretar problemas. Además, adaptamos estrategias de cálculo y establecemos relaciones con ambas tasas de interés; asimismo, planteamos afirmaciones sobre la conveniencia de dichas tasas.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

Miguel ha recibido una bonificación de S/10 000 por sus 10 años de trabajo en una empresa. Él decide ahorrar este dinero en un banco durante 1 año. Tiene tres opciones: Banco del Sur, a una tasa del 15 % anual capitalizable semestralmente; Banco del Norte, a una tasa del 14 % anual capitalizable mensualmente, y Banco del Centro, a una tasa de interés compuesto del 15,08 %. Él sabe que para decidir puede efectuar cálculos usando la fórmula de interés compuesto o la tasa anual equivalente (TAE). Ayúdate con una calculadora.

$$TAE = 100 \left[\left(1 + \frac{r}{k \cdot 100} \right)^{k \cdot t} - 1 \right]$$

Donde r es la tasa de interés, t es el tiempo en años y k es la frecuencia de pago.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

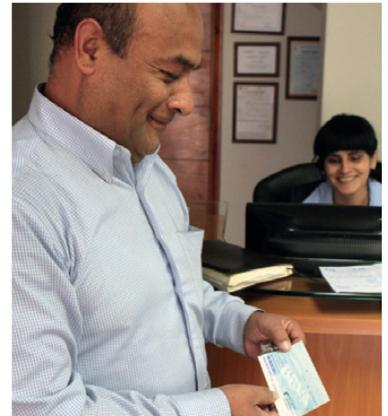
- Indica el banco que proporciona el mayor monto.

<input type="checkbox"/> a) Banco del Centro	<input type="checkbox"/> c) Banco del Norte
<input type="checkbox"/> b) Banco del Sur	<input type="checkbox"/> d) No se puede determinar.
- ¿Cuál es el banco que ofrece la mejor TAE?

<input type="checkbox"/> a) Banco del Sur	<input type="checkbox"/> c) Banco del Centro
<input type="checkbox"/> b) Banco del Norte	<input type="checkbox"/> d) Cualquiera de los bancos
- Una pareja de esposos solicita a un banco un crédito vehicular por un monto de S/43 000 para comprar una miniván. Esta entidad cobra una tasa de interés del 18 % anual por un periodo de 3 años. ¿Cuánto pagarán de interés al finalizar el pago del préstamo?

<input type="checkbox"/> a) S/7740	<input type="checkbox"/> b) S/27 650,38	<input type="checkbox"/> c) S/23 220	<input type="checkbox"/> d) S/66 220,10
------------------------------------	---	--------------------------------------	---
- Los padres de familia de los estudiantes del quinto grado de secundaria están realizando actividades para el viaje de estudio de sus hijos. Han logrado reunir S/12 000 y para ganar más intereses los van a depositar en una entidad financiera a un plazo fijo de 2 años.
 - Un grupo de padres de familia afirma que convendría depositar el dinero en la caja municipal, que ofrece el 10 % trimestral de interés simple.
 - Otro grupo afirma que sería mejor depositarlo en el banco, que ofrece el 36 % de interés compuesto anual, con capitalización semestral.

¿Qué grupo tiene la razón? Justifica con procedimientos matemáticos y representación gráfica.



Fuente: Denise Santos



Recuerda

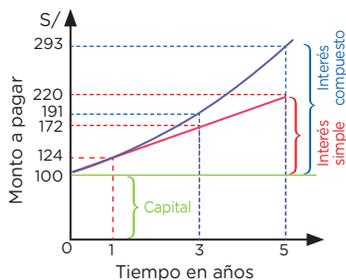
La tasa anual equivalente (TAE) es la cantidad que debes pagar al banco por solicitar dinero prestado, incluidos los gastos extra.

Por ejemplo, si un banco te da un préstamo de S/1000 con el 18,5 % de TAE, tú tendrás que pagarle, al finalizar el préstamo, el monto de S/1185; es decir, S/185 es la TAE que deberás pagar por el préstamo.



Ten en cuenta

La gráfica muestra un capital de S/100 a una tasa de interés simple del 24 %, en un tiempo de 5 años, con una línea recta; mientras que el mismo capital colocado a una tasa de interés compuesto del 24 % se representa con una curva.



Para el caso del interés simple, el capital se mantiene fijo (no cambia) y el interés va creciendo a razón constante al término de cada periodo de tiempo; por lo tanto, tiene un comportamiento lineal. Para el interés compuesto, los intereses son capitalizables; es decir, sumados al capital inicial forman un nuevo capital. Por lo tanto, tiene un comportamiento exponencial.

5. Daniela se dedica a la producción y venta de joyas de oro y plata. En un tiempo determinado, invirtió S/150 000 y, en 4 años, reunió S/230 000. ¿Cuál es la tasa de interés compuesto anual que se aplicó al dinero que invirtió?
 - a) 12 %
 - b) 11,28 %
 - c) 10,55 %
 - d) 53,33 %

6. Gilda acude a una financiera con el fin de solicitar S/5000 para los gastos escolares de sus tres hijos. Ella debe pagar el préstamo dentro de 3 meses con un interés simple mensual del 20 %. Entonces, firma un contrato en el cual una cláusula establece que, en caso de mora, le cobrarán el 1 % de interés simple diario sobre la cantidad que debía devolver por el tiempo que exceda al plazo fijado. Si Gilda paga el total del préstamo 5 días después de los 3 meses, ¿cuál será el monto de la mora y cuál será el monto total que pagará?

7. Marcelo recibe una bonificación en la empresa donde labora y la deposita en una entidad financiera, donde, por equivocación, le consideran una tasa de interés trimestral en lugar de mensual. Por este motivo, en 1 año deja de percibir S/240. ¿Cuánto recibiría Marcelo al cabo de 3 años si la tasa de interés fuera la correcta?
 - a) S/3000
 - b) S/360
 - c) S/1080
 - d) S/540

8. Gerson reflexiona sobre la importancia del ahorro y decide abrir una cuenta con S/3500. Para ello, se le presentan tres opciones: Cajabank (3,08 % de tasa anual, capitalizable mensualmente), Bankita (3,09 % de rendimiento anual) y Tubank (3,05 % anual, capitalizable diariamente). ¿Cuál de estas es la mejor opción? Justifica tu respuesta.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos al trabajar con tasas de interés y las transformé en expresiones numéricas que incluyen interés simple o compuesto.			
Expresé con lenguaje numérico mi comprensión sobre las tasas de interés simple y compuesto para interpretar problemas de mi contexto.			
Adapté estrategias de cálculo para hallar el interés simple o compuesto, así como el monto.			
Planteé y comparé afirmaciones sobre la conveniencia de determinadas tasas de interés, y las justifiqué con ejemplos.			

¿Cómo optimizamos recursos en la vida cotidiana mediante la función cuadrática?

Construimos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos, y las transformamos en expresiones algebraicas; además, combinamos y adaptamos procedimientos diversos para calcular los valores que definen una función cuadrática.

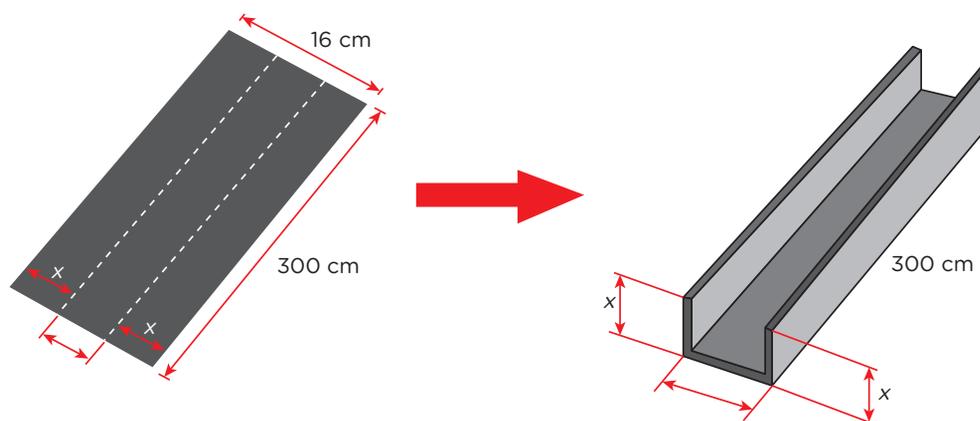


Construimos canaletas de máximo volumen

Martín Fernández necesita diseñar y elaborar canaletas para el techo de su casa y así enfrentar las inminentes lluvias que el Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú (Senamhi) ha pronosticado. Para ello, cuenta con planchas metálicas delgadas de 300 cm de largo por 16 cm de ancho con recubrimiento de zinc, que las hace resistentes a la acción corrosiva de la humedad. Para concretar su proyecto, él decide doblar hacia arriba algunos centímetros a cada lado de la plancha, como se muestra en la figura.



Fuente: Denise Santos



Tomando en cuenta la información brindada, responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué valores puede tomar la altura de la canaleta en el diseño que muestra la figura?
- ¿Cuál es la función que modela el volumen que tendrá la canaleta?
- ¿Qué tipo de función es y qué forma tiene su gráfica?
- ¿Cuántos centímetros debe tener la altura de la canaleta para que su volumen sea mayor?



Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 6.



Comprendemos el problema

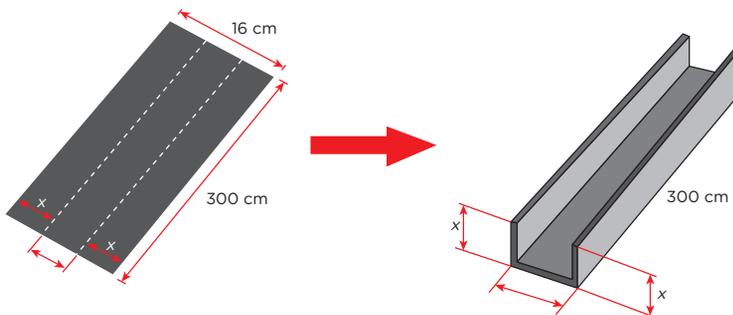
1. ¿Cuáles son las dimensiones de la plancha metálica?

Longitud del largo	Longitud del ancho

2. ¿Cuánto mide el área y el perímetro de la plancha metálica?



3. Observa la figura de la canaleta y completa la tabla.



Longitud del largo	Longitud del ancho	Longitud de la altura

4. A partir de los datos anteriores, determina la expresión que representa el área de la base (A_B) de la canaleta.



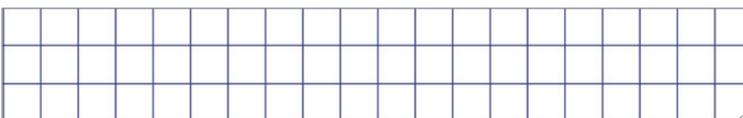
5. ¿A qué forma geométrica se parece la canaleta?

- a A un prisma rectangular. c A un prisma triangular.
 b A un prisma trapezoidal. d A un prisma hexagonal

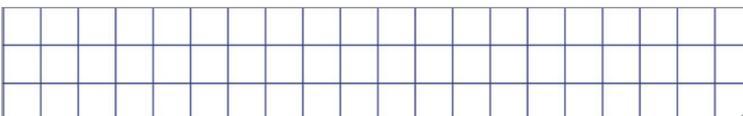
6. ¿Qué necesitas calcular para saber la capacidad que tendrá la canaleta?

- a El volumen b El área lateral c El área total

7. ¿Cómo podrías obtener el volumen (V) de la canaleta?

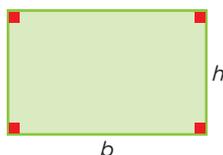


8. ¿Qué te piden hallar las preguntas de la situación inicial?



Recuerda

El **rectángulo** es una figura geométrica plana de cuatro lados con dos pares de lados que miden igual y que, asimismo, son paralelos entre sí. Además, todos sus ángulos interiores miden 90° .



Perímetro (P):

$$P = 2(b + h)$$

Área (A):

$$A = b \cdot h$$



Ten en cuenta

El **volumen** es la magnitud que expresa el espacio ocupado por un cuerpo en tres dimensiones, y la **capacidad** es lo que cabe dentro de un recipiente.



Formalización

Las **funciones cuadráticas** presentan la siguiente forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde los coeficientes a , b y c son números reales y $a \neq 0$. Su representación gráfica es una curva, conocida como parábola, cuya orientación depende del signo del coeficiente del término cuadrático. Si es positivo, la orientación es hacia arriba; si es negativo, hacia abajo.

Además:

ax^2 : término cuadrático

bx : término lineal

c : término independiente

x : variable independiente

$f(x)$: variable dependiente

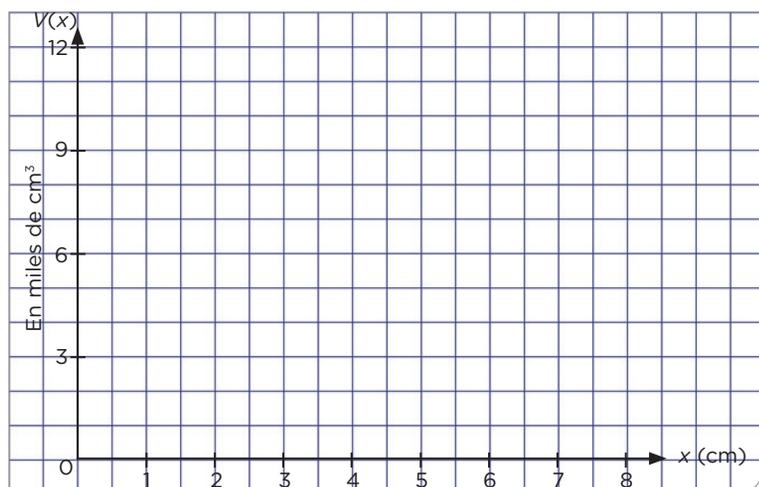
14. Desarrolla la estrategia y completa la siguiente tabla para calcular el volumen, teniendo en cuenta los valores hallados para x (número natural); luego, responde la pregunta **b** de la situación inicial.

Altura (x)	Área de la base ($4800 - 600x$)	Volumen
0	$4800 - 600(0) = 4800$	$4800(0) = 0$
1	$4800 - 600(1) = 4200$	$4200(1) = 4200$
2	$4800 - 600(2) =$	
3		
4		
5		
6		
7		
8		
x	$4800 - 600\dots\dots\dots$	

Por lo tanto, la función que modela el volumen es

15. Considerando lo anterior, define la variable independiente y la variable dependiente.

16. Tomando los datos de la tabla anterior, representa en el plano cartesiano mostrado la relación entre la altura de la canaleta y el volumen.



Ten en cuenta

Todas las funciones cuadráticas que presentan la forma

$$f(x) = ax^2$$

tienen su vértice en el origen de coordenadas del plano cartesiano, es decir, $V(0; 0)$.



17. Observa la gráfica que realizaste y describe sus características.

18. ¿Qué tipo de función es y qué forma tiene su gráfica? Responde la pregunta **c** de la situación inicial.

19. ¿Qué posibles valores puede tomar el volumen de la canaleta?

20. De acuerdo con los procedimientos realizados, ¿cuál será el máximo volumen de la canaleta y cuál es la altura de la canaleta que determina dicho volumen? Responde la pregunta **d** de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

21. ¿Cuál fue el procedimiento que empleaste para calcular el volumen máximo de la canaleta?

22. Describe otro procedimiento para encontrar el valor de x , de modo que el volumen de la canaleta sea el máximo.



Formalización

El **dominio** de una función cuadrática siempre será el conjunto de los números reales (\mathbb{R}).

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

El **rango** de una función cuadrática es:

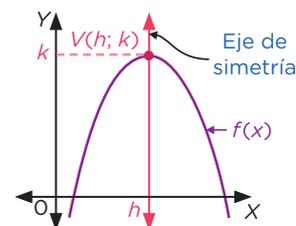
- $\text{Ran}(f) = [k; +\infty[$, cuando la parábola se abre hacia arriba.
- $\text{Ran}(f) =]-\infty; k]$, cuando la parábola se abre hacia abajo.

Para hallar el rango, es necesario determinar el vértice de la parábola.



Ten en cuenta

El **eje de simetría** de una parábola es la recta vertical que pasa por el vértice.



Su ecuación es $x = h$.

Comprobamos nuestros aprendizajes



Propósito

Expresamos con diversas representaciones tabulares y con lenguaje algebraico nuestra comprensión sobre los valores máximos y mínimos de una función cuadrática. Asimismo, justificamos o comprobamos la validez de una afirmación mediante conocimientos algebraico; además, corregimos errores si los hubiera.



Situación A: Modelamos el salto de una rana

Un experto en anfibios realizó observaciones del salto de una rana y las registró en una tabla. Luego de analizar los resultados, se dio cuenta de que la altura que alcanzaba la rana en cada instante del salto podía modelarse con una función cuadrática. En la tabla adjunta, se muestra la altura (h) en metros que alcanza la rana, en un mismo salto, en cinco tiempos (t) diferentes expresados en segundos.

t	0	0,5	1	1,5	2
h	0	0,75	1	0,75	0

- Halla la función cuadrática que modela la situación que planteó el experto en anfibios.
- Determina algebraicamente la mayor altura que alcanza la rana y el tiempo que emplea en llegar ahí.
- ¿Cuánto demora la rana en volver a tocar el suelo? ¿De qué modo algebraico lo podrías determinar?

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

- La función cuadrática tendrá la forma $h(t) = at^2 + bt + c$, donde h es la altura en metros y t es el tiempo en segundos. De los datos de la tabla, tomamos $t = 0$; $h = 0$.

Reemplazamos y obtenemos $0 = a(0)^2 + b(0) + c \rightarrow c = 0$.

Similarmente con $t = 1$; $h = 1$:

$$1 = a(\dots)^2 + b(\dots) + c \rightarrow 1 = \dots \dots \dots \text{ (I)}$$

Ahora con $t = 2$; $h = 0$:

$$0 = a(\dots)^2 + b(\dots) + c \rightarrow 0 = 4a + 2b \rightarrow 0 = \dots + \dots \dots \text{ (II)}$$

Luego de resolver el sistema, obtenemos $b = 2$ y $a = -1$.

Por lo tanto, la función es $h(t) = \dots$.

- En $h(t) = -t^2 + 2t$, vemos que $a = -1 < 0$; entonces la parábola se abre hacia abajo. Por lo tanto, la altura h tendrá su máximo valor en el vértice de la parábola.

Hallamos el vértice $V(m; n) \in h$, donde $b = 2$ y $a = -1$.

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{\dots}{2(\dots)} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

Hallamos n ; para ello, reemplazamos $m = \dots$ en la función $h(t) = -t^2 + 2t$. Entonces, $n = -(\dots)^2 + 2(\dots) \rightarrow n = \dots = \dots$. Luego, obtenemos que $n = \dots$; por lo tanto, el vértice es $V(1; 1)$.

A partir del vértice, podemos afirmar que la mayor altura alcanzada por la rana es \dots m en un tiempo de \dots segundo.



Ten en cuenta

Las coordenadas del vértice (V) de una función cuadrática se representan por $(h; k)$ y se determinan mediante las expresiones

$$h = -\frac{b}{2a};$$

$$k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Por ejemplo, para hallar el vértice de la función

$$f(x) = -x^2 + 6x + 12$$

tienes lo siguiente:

$a = -1$; $b = 6$ y $c = 12$. Luego:

$$h = -\frac{6}{2(-1)} = 3$$

$$k = -(3)^2 + 6(3) + 12$$

$$= -9 + 30 \rightarrow k = 21$$

Por lo tanto, $V(3; 21)$.

- c. Para hallar el tiempo que demora en volver a tocar el suelo la rana, debemos considerar que en ese instante la altura es 0 metros ($h = 0$).

Reemplazamos $h = 0$ en $h(t) = -t^2 + 2t$.

Obtenemos $0 = -t^2 + 2t \rightarrow 0 = t(-t + 2)$.

Luego de resolver lo anterior, tenemos $t = 0$; $t = 2$.

Tomamos el valor 2 porque el tiempo 0 corresponde al punto de inicio del salto. Por tanto, a los 2 segundos, la rana llega al suelo nuevamente.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

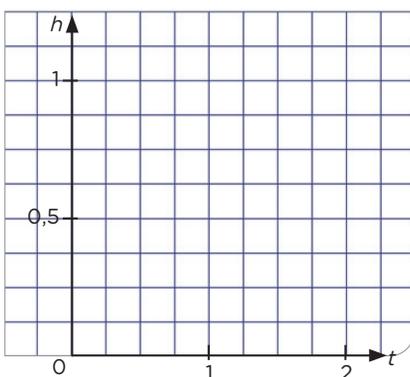
1. Describe el procedimiento usado para determinar la expresión algebraica de la función cuadrática.

2. ¿Cuál fue el procedimiento seguido para determinar las coordenadas del vértice pedido en b? Explica.

3. ¿Cómo procediste para obtener el tiempo pedido en c? Explica.

4. Comprueba las respuestas obtenidas en a y b realizando una gráfica con los datos de la tabla.

t	0	0,5	1	1,5	2
h	0	0,75	1	0,75	0



Del gráfico se concluye que:



Ten en cuenta

Para **graficar** la función cuadrática, primero evalúa la función para saber hacia dónde se abre la parábola y halla el vértice. Luego, evalúa la función con valores cercanos al vértice. Es decir, si el vértice está en $x = 2$, puedes evaluar para valores próximos a este, como $x = 0$; 1; 3 y 4.

Por ejemplo, para graficar la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$, analiza el siguiente proceso de solución.

$$a = 1; b = -2 \text{ y } c = 3$$

Como $1 > 0$, se abre hacia arriba.

Halla el vértice:

$$h = -\frac{-2}{2(1)} = 1$$

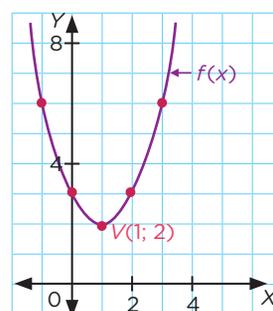
$$k = (1)^2 - 2(1) + 3 = 2$$

$$V(h; k) = V(1; 2)$$

Tabula con valores próximos al vértice:

x	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

Grafica la función:



Situación B: Beneficios en una empresa

El contador de una empresa de comida rápida, especializada en la venta de pizzas, concluyó que los beneficios anuales dependen del número de repartidores con los que cuenta; además, que estos beneficios se determinan según el siguiente modelo matemático: $B(x) = -27x^2 + 1890x + 9855$, donde $B(x)$ es el beneficio anual en soles para x repartidores.

- ¿Cuántos repartidores debe tener la empresa para que su beneficio anual sea máximo?
- ¿Cuál será el valor de dicho beneficio máximo?



Fuente: Shutterstock

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

Tenemos la función cuadrática $B(x) = -27x^2 + 1890x + 9855$. Vemos en la función que $a = -27 < 0$; entonces, la parábola se abre hacia abajo, y tendrá un valor máximo cuando se determinen las coordenadas del vértice.

Dividimos a la función entre para que el coeficiente del término cuadrático sea +1.

$$\frac{B(x)}{-27} = \frac{-27x^2}{-27} + \frac{1890x}{-27} + \frac{9855}{-27}$$

Obtenemos

$$\frac{B(x)}{-27} = x^2 - 70x - 365$$

En el segundo miembro sumamos y restamos el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal $\left(\frac{70}{2} = 35\right)$:

$$\frac{B(x)}{-27} = x^2 - 70x + 35^2 - 35^2 - 365$$

Formamos el trinomio cuadrado perfecto:

$$\frac{B(x)}{-27} = (\dots\dots\dots)^2 - 1590$$

Damos forma:

$$B(x) = -27(\dots\dots\dots)^2 - 1590(-27)$$

$$B(x) = -27(\dots\dots\dots)^2 + 42\,930$$

Hallamos el vértice:

$$V(h; k) = V(35; 42\,930)$$

Respuestas:

- Debe tener 35 repartidores.
- El máximo beneficio en un año será S/42 930.



Ten en cuenta

Puedes hallar el vértice de una función cuadrática empleando el método de **completar el cuadrado**. Para ello, dale a la función cuadrática la siguiente forma:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

El vértice sería $V(h; k)$.

Por ejemplo, halla el vértice de la siguiente función:

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 27$$

Analiza el proceso de solución.

Divide entre 3 para que $a = +1$:

$$\frac{f(x)}{3} = x^2 - 4x + 9$$

Suma y resta el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal $\left(\frac{4}{2} = 2\right)$:

$$\frac{f(x)}{3} = x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + 9$$

Se forma el trinomio cuadrado perfecto:

$$\frac{f(x)}{3} = (x - 2)^2 - 2^2 + 9$$

$$\frac{f(x)}{3} = (x - 2)^2 + 5$$

$$f(x) = 3(x - 2)^2 + 15$$

Halla el vértice:

$$V(h; k) = V(2; 15)$$

Aprendemos a partir del error

Situación C: Trayectoria del lanzamiento de un balón

El profesor Manuel, para motivar a sus estudiantes a quienes les gusta el fútbol, plantea el siguiente problema:

Un jugador se encuentra a 8 m del arco. El arquero, que es capaz de saltar hasta los 2,5 m de altura, está adelantado 4 m del arco. Para realizar el lanzamiento del balón, el jugador puede escoger entre las dos trayectorias siguientes, donde f y g representan la altura en metros, y x , el tiempo en segundos.

$$f(x) = 0,4x - 0,05x^2$$

$$g(x) = 1,6x - 0,2x^2$$

¿Cuál de los dos modelos matemáticos presentados es el más adecuado para que el jugador anote el gol?, ¿por qué?

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Ambas funciones tienen como gráfica una parábola que se abre hacia abajo. Entonces, luego de hallar la abscisa del vértice, determinaremos la altura máxima que alcanza cada modelo de trayectoria.

- Para $f(x) = 0,4x - 0,05x^2 \rightarrow a = -0,05$ y $b = 0,4$

$$\text{Aplicamos la fórmula: } h = -\frac{b}{2a} = -\frac{0,4}{2(-0,05)} = \frac{0,4}{0,1} = 4$$

- Para $g(x) = 1,6x - 0,2x^2 \rightarrow a = -0,2$ y $b = 1,6$

$$\text{Aplicamos la fórmula: } h = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,6}{2(-0,2)} = \frac{1,6}{0,4} = 4$$

Respuesta: Es indistinto aplicar cualquier modelo, porque se obtiene el mismo resultado.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

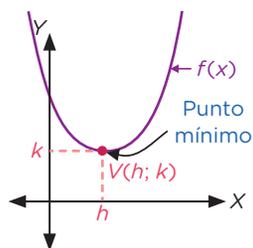
1. ¿Qué significan la abscisa y la ordenada en el vértice de la parábola?

2. Si el procedimiento es correcto, busca otra forma de solución. Si es incorrecto o está incompleto, corrígelo o complétalo según sea el caso.

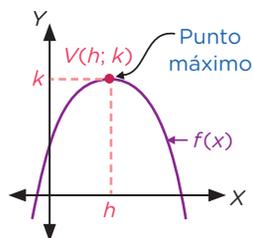


Ten en cuenta

El vértice $V(h; k)$ es uno de los elementos principales de la parábola, ya que permite identificar su punto mínimo si se abre hacia arriba.



O su punto máximo si se abre hacia abajo.



Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos, y las modelamos mediante la función cuadrática; además, expresamos nuestra comprensión sobre sus parámetros adaptando procedimientos para calcular sus valores y representándolos en el plano cartesiano. También, planteamos afirmaciones y las justificamos con sustento matemático.



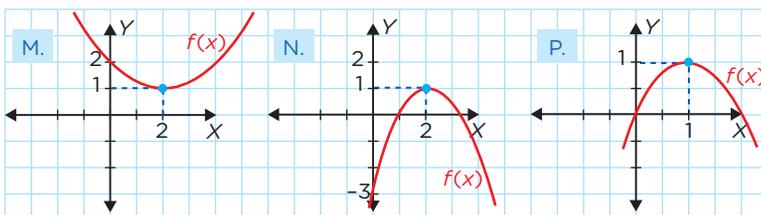
Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

1. Escribe V si la proposición es verdadera o F si es falsa.
 - La gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si el coeficiente del término cuadrático es mayor que cero y se abre hacia abajo si es menor que cero. ()
 - La función cuadrática está bien definida cuando su representación simbólica es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. ()
 - En la función cuadrática de la forma $f(x) = -x^2$, el vértice se encuentra en el origen de coordenadas y la parábola que la representa se abre hacia abajo. ()

Un delfín salta con trayectoria parabólica dada por la función cuadrática $f(t) = -t^2 + 6t$, donde $0 \leq t \leq 6$; además, t es el tiempo en segundos y $f(t)$ es la altura en metros que alcanza el delfín en determinado instante.

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.

2. Calcula la altura máxima que alcanza el delfín y en qué instante lo logra.
 - a) La altura máxima fue 3 m a los 9 s.
 - b) La altura máxima fue 9 m a los 3 s.
 - c) La altura máxima fue 27 m a los 3 s.
 - d) La altura máxima fue 12 m a los 3 s.
3. Averigua cuánto tiempo demora en caer el delfín desde que alcanza la altura máxima.
 - a) 6 s
 - b) 9 s
 - c) 3 s
 - d) 12 s
4. Relaciona cada función representada simbólicamente con su respectiva gráfica (ten en cuenta el vértice de la parábola). Justifica tu respuesta.
 - a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
 - b) $f(x) = 2x - x^2$
 - c) $f(x) = 0,25x^2 - x + 2$



Recuerda

La gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si su coeficiente cuadrático (a) es positivo y se abre hacia abajo si este es negativo.

Por ejemplo:

- $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$
- $h(x) = -2x^2 - 3x + 123$

En $f(x)$, $a = +3$; la parábola se abre hacia arriba.

En $h(x)$, $a = -2$; la parábola se abre hacia abajo.



Ten en cuenta

Una aplicación de la función cuadrática es modelar la trayectoria seguida por objetos lanzados hacia arriba y con cierto ángulo. En estos casos, la parábola representa la trayectoria del objeto lanzado. Por ello, al graficar, en el eje X estarán las distancias recorridas, y en el eje Y, las alturas que alcanza el objeto.

5. En un partido de fútbol, un jugador patea un tiro libre de modo que la trayectoria de la pelota forma la parábola correspondiente a la función $y = -0,05x^2 + 0,7x$, donde y es la altura en metros que alcanza la pelota, y x representa la distancia horizontal que hay desde el punto en el que fue lanzada la pelota. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y a cuántos metros del punto de lanzamiento se debe patear la pelota, respectivamente?

- (a) 2,45 m y 7 m
- (b) 7,35 m y 7 m
- (c) 4,2 m y 7 m
- (d) 5,6 m y 7 m

6. Una empresa brinda servicio de cable y actualmente cuenta con 8000 clientes, a quienes cobra S/50 mensuales. Para incrementar el número de clientes rebajará en S/5 el cobro mensual, con lo cual tendría 1000 nuevos clientes.

Determina el modelo cuadrático para calcular el número de clientes que tendrá la empresa.

7. Para economizar malla metálica, Julia García construye un corral rectangular utilizando uno de sus muros. Ella emplea 18 m de malla metálica para cercar el corral. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el corral si Julia usó el área máxima?

- (a) 20,12 m²
- (b) 20,05 m²
- (c) 20,25 m²
- (d) 40,5 m²

8. Un granjero ha comprado 80 m de listones de madera para cercar el establo contiguo a su granero. Él afirma que con esta cantidad de madera le basta para cercar su establo de forma rectangular, que tiene un área máxima de 800 m², 40 m de largo y 20 m de ancho. ¿Será cierta esta afirmación? Justifica tu respuesta.



Fuente: Shutterstock

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre datos y valores desconocidos, y las transformé en expresiones algebraicas.			
Expresé con diversas representaciones y con lenguaje algebraico mi comprensión sobre los valores máximos y mínimos de una función cuadrática.			
Combiné y adapté procedimientos diversos para calcular los valores que definen una función cuadrática.			
Planteé afirmaciones sobre relaciones de cambio que observé entre las variables de una función cuadrática.			

¿Cómo aplicamos las razones trigonométricas en nuestra vida cotidiana?



Construimos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios; representamos estas relaciones con formas bidimensionales y las expresamos mediante razones trigonométricas. Asimismo, combinamos estrategias para determinar distancias inaccesibles empleando razones trigonométricas.

Evaluamos la construcción de una rampa

Una rampa es una superficie inclinada que nos permite conectar dos lugares a diferente altura.

Hoy en día, todos los edificios públicos deben contar con acceso para el desplazamiento de las personas con algún impedimento físico y adultos mayores. La construcción de rampas es obligatoria, y debe seguir las especificaciones que indican que su ángulo de inclinación debe tener un rango de 6° a 10° respecto a la horizontal. Actualmente, en el hospital Nueva Esperanza, la gerencia ha contratado a Ernesto para que construya una rampa lineal, cuya altura será de 0,75 m al final de esta. Ernesto desea saber las posibles longitudes que podría tener la rampa y el terreno donde se construirá.



Fuente: Shutterstock

Según esta información, ayuda a Ernesto a responder las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se representa matemáticamente la longitud de la rampa y de su base en función del ángulo requerido?
- ¿Qué longitudes máxima y mínima podría tener la rampa que se construirá en el hospital?
- ¿Qué longitudes máxima y mínima debe tener el terreno donde se construirá la rampa?

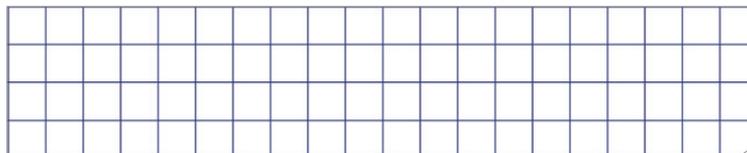


Muy bien, ya estamos listos para iniciar el desarrollo de la ficha 7.



Comprendemos el problema

- ¿Qué ángulo de inclinación debe tener como máximo y como mínimo una rampa según las especificaciones técnicas exigidas?



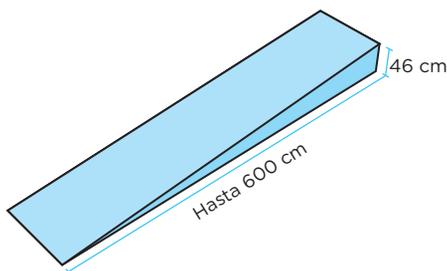
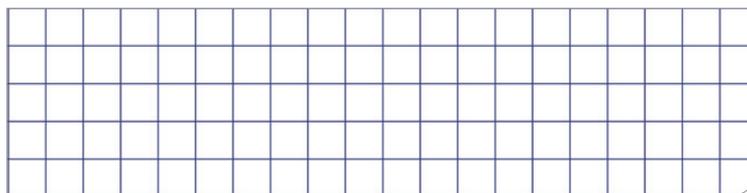
- ¿Qué altura tendrá la rampa del hospital Nueva Esperanza?

Altura de la rampa

- ¿Qué forma geométrica observas en la vista lateral de la rampa?

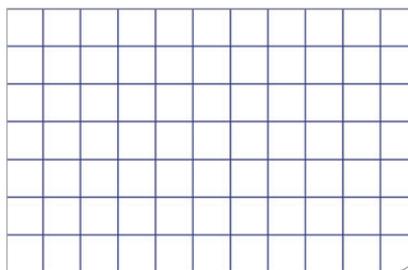
a triángulo rectángulo b rectángulo c triángulo equilátero

- ¿Qué te piden hallar las preguntas de la situación inicial?



Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

- Realiza la representación gráfica de la vista lateral de la rampa mostrada (ver margen) y escribe sus elementos, los cuales se señalan a continuación:



- L : longitud de la rampa
- θ : ángulo de inclinación de la rampa
- b : largo de la base
- h : altura de la rampa

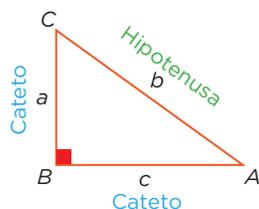
- ¿Qué razones trigonométricas podrías emplear respecto al ángulo de inclinación de la rampa para determinar su longitud?

Lados relacionados	Razón trigonométrica
<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	<input type="text"/>



Ten en cuenta

El **triángulo rectángulo** es una figura geométrica que se caracteriza por tener un ángulo recto y dos ángulos agudos.



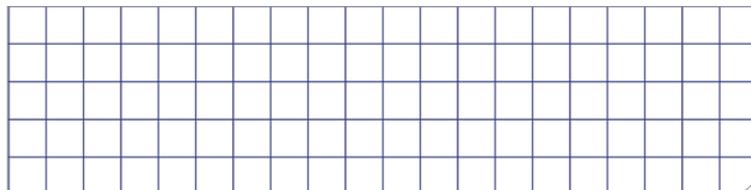
El **teorema de Pitágoras** señala lo siguiente:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

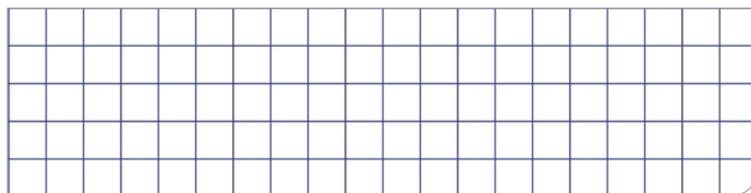
7. ¿Qué razones trigonométricas podrías emplear respecto al ángulo de inclinación de la rampa para determinar la longitud de su base?

Lados relacionados	Razón trigonométrica

8. Realiza la representación gráfica de la vista lateral de la rampa y escribe sus elementos.

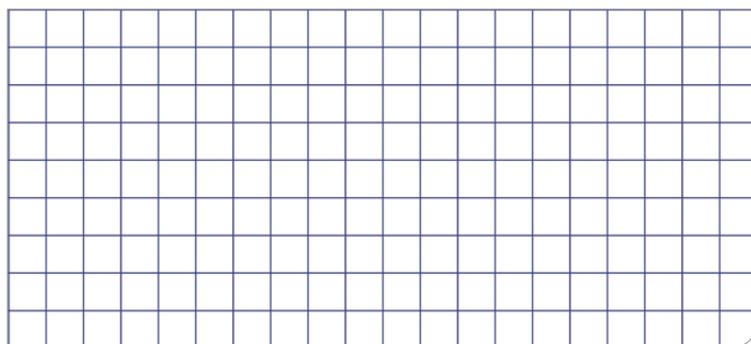


9. ¿En qué consiste la estrategia que elegiste para resolver el problema? Describe el procedimiento que realizarías para responder las preguntas de la situación inicial.



Ejecutamos la estrategia o plan

10. Desarrolla la estrategia y, con la información de la situación, grafica la vista lateral de la rampa y escribe las características que presentan sus elementos.

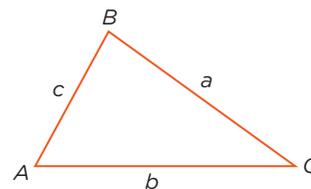


11. Escribe la expresión matemática que te permita determinar la longitud de la rampa en relación con el ángulo especificado.



Ten en cuenta

En un triángulo cualquiera puedes relacionar los lados de **6 maneras diferentes**.

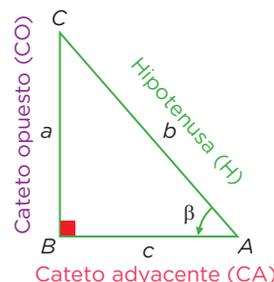


$$\frac{a}{b}; \frac{b}{a}; \frac{b}{c}; \frac{c}{b}; \frac{a}{c}; \frac{c}{a}$$



Recuerda

La **razón trigonométrica** en un triángulo rectángulo es aquella relación establecida entre las longitudes de dos de sus lados respecto a uno de sus ángulos agudos.



En el triángulo rectángulo ABC , las razones trigonométricas del ángulo agudo β son las siguientes:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{CO}}{\text{H}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{\text{CA}}{\text{H}} = \frac{c}{b}$$

$$\text{tan } \beta = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cot } \beta = \frac{\text{CA}}{\text{CO}} = \frac{c}{a}$$

$$\text{sec } \beta = \frac{\text{H}}{\text{CA}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{csc } \beta = \frac{\text{H}}{\text{CO}} = \frac{b}{a}$$



¿Sabías que...?

Para hallar la razón trigonométrica con la **calculadora**, debes proceder como en el siguiente ejemplo:

Halla el valor de la tangente de 25°.

tan 25 =

Aparece en la pantalla:

0,4663076582

Para la cotangente de 8°.

1 ÷ tan 8 =

Aparece en la pantalla:

7,115369722

12. Escribe la expresión matemática de la longitud de la base.

13. Responde la pregunta **a** de la situación inicial.

14. ¿Cuál de las dos expresiones te convendría emplear para determinar las longitudes pedidas? Justifica tu respuesta.

15. Estima la longitud de la rampa empleando una calculadora científica y completa la siguiente tabla:

Ángulo	Longitud de la rampa (m)
3°	$L = \frac{0,75}{\text{sen } 3^\circ} \approx \frac{0,75}{0,0523} \approx 14,34$
6°	$L = \frac{0,75}{\text{sen } 6^\circ} \approx \frac{0,75}{0,1045} \approx \dots\dots\dots$
8°	$L = \frac{0,75}{\text{sen } 8^\circ} \approx$
10°	
16°	



Ten en cuenta

Las razones trigonométricas son valores adimensionales, es decir, no poseen unidades de medida asociadas.

16. Responde la pregunta **b** planteada en la situación inicial.

Comprobamos nuestros aprendizajes



Propósito

Leemos textos o gráficos que describen las propiedades de semejanza entre formas geométricas, razones trigonométricas y ángulos de elevación o depresión. Asimismo, comprobamos la validez de una afirmación con contraejemplos y conocimientos geométricos, y corregimos los procedimientos si hubiera errores.



Situación A: Construcción de un túnel

Una empresa construyó un túnel que atraviesa un cerro y conecta dos distritos de una ciudad, tal como se observa en la imagen. Teniendo como información las medidas realizadas por los ingenieros, ayuda a determinar la longitud del túnel.

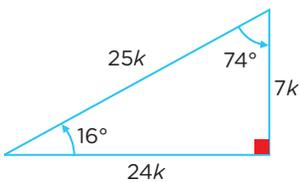


Fuente: Shutterstock



Ten en cuenta

Las razones trigonométricas de 16° y 74° son las siguientes:



$$\sin 16^\circ = \cos 74^\circ = \frac{7}{25}$$

$$\cos 16^\circ = \sin 74^\circ = \frac{24}{25}$$

$$\tan 16^\circ = \cot 74^\circ = \frac{7}{24}$$

$$\cot 16^\circ = \tan 74^\circ = \frac{24}{7}$$

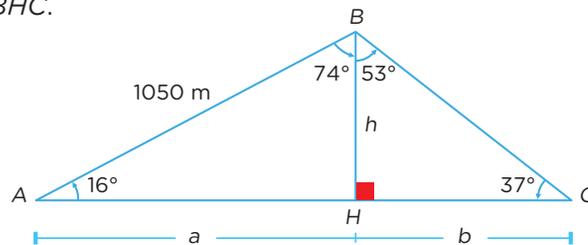
$$\sec 16^\circ = \csc 74^\circ = \frac{25}{24}$$

$$\csc 16^\circ = \sec 74^\circ = \frac{25}{7}$$

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

- Trazamos la altura BH para formar los triángulos rectángulos AHB y BHC .



- En el $\triangle AHB$, calculamos a y h :

Para a :

$$\cos 16^\circ = \frac{a}{1050 \text{ m}} \rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \frac{a}{\dots \text{ m}} \rightarrow a = \dots \text{ m}$$

Para h :

$$\sin 16^\circ = \frac{h}{1050 \text{ m}} \rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \frac{h}{\dots \text{ m}} \rightarrow h = \dots \text{ m}$$

- En el $\triangle BHC$, calculamos b :

$$\tan 37^\circ = \frac{h}{b} \rightarrow \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots \text{ m}}{b} \rightarrow b = \dots \text{ m}$$

Respuesta: La longitud del túnel es $a + b = \dots \text{ m} + \dots \text{ m} = \dots \text{ m}$.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Qué estrategia empleaste para resolver la situación inicial?

2. ¿Qué ventajas presenta hacer el dibujo?

3. ¿Por qué consideras que se trazó la altura en el triángulo ABC ?

4. ¿Qué triángulos notables se formaron luego de trazar la altura? ¿Qué relaciones métricas se cumplen en dichos triángulos?

5. ¿Qué otras razones trigonométricas hubieses podido utilizar para calcular la longitud del lado AH ?

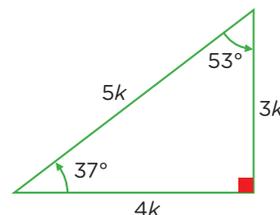
6. ¿Con qué otras razones trigonométricas hubieses podido calcular la longitud de la altura BH ?

7. Aplica otro procedimiento para hallar la longitud del túnel.



Ten en cuenta

Las razones trigonométricas de 37° y 53° son las siguientes:



$$\text{sen } 37^\circ = \text{cos } 53^\circ = \frac{3}{5}$$

$$\text{cos } 37^\circ = \text{sen } 53^\circ = \frac{4}{5}$$

$$\text{tan } 37^\circ = \text{cot } 53^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\text{cot } 37^\circ = \text{tan } 53^\circ = \frac{4}{3}$$

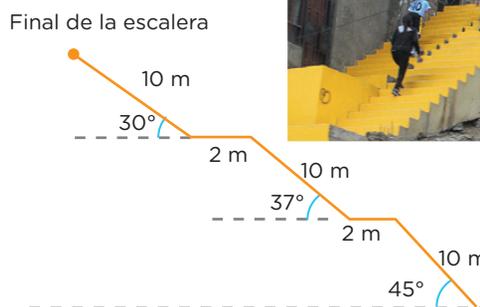
$$\text{sec } 37^\circ = \text{csc } 53^\circ = \frac{5}{4}$$

$$\text{csc } 37^\circ = \text{sec } 53^\circ = \frac{5}{3}$$

Aprendemos a partir del error

Situación C: Las escaleras solidarias

Ante el crecimiento demográfico en las ciudades de la costa, numerosas familias han construido casas en los cerros, por lo que se exponen a muchos peligros. Ante esta situación, la municipalidad ha construido escaleras en dichos espacios para que las personas que viven en esos lugares puedan acceder a sus casas con menos dificultad. Una de aquellas escaleras tiene la forma y las dimensiones mostradas en la imagen. ¿A qué altura se encuentra el final de la escalera?

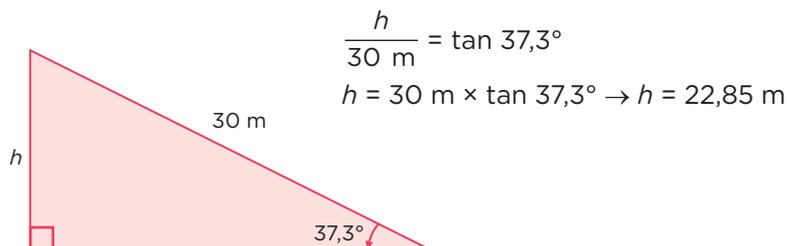


Fuente: Denise Santos

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

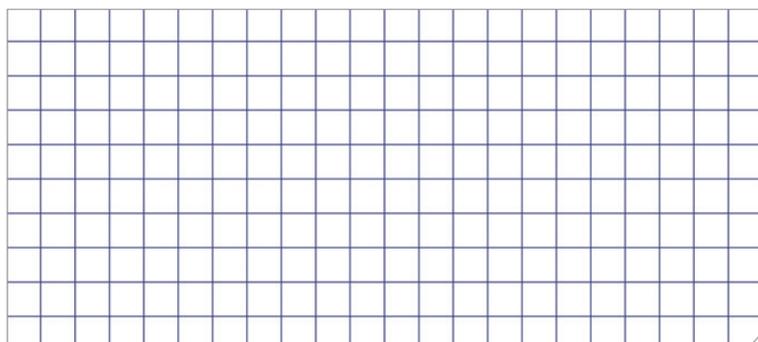
- La escalera se divide en 3 tramos de 10 m cada uno, entonces tiene una longitud de $10 + 10 + 10 = 30$ m.
- Consideramos un ángulo promedio de $\frac{30^\circ + 37^\circ + 45^\circ}{3} \approx 37,3^\circ$.
Luego, podemos tener el siguiente triángulo:



Respuesta: El final de la escalera se encuentra a 22,85 m de altura.

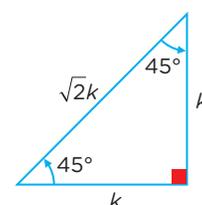
Ahora, respondemos la pregunta para corregir el error:

1. Verifica con otro procedimiento o corrige según sea el caso.



Ten en cuenta

Las razones trigonométricas de 45° son las siguientes:



$$\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\text{tan } 45^\circ = \text{cot } 45^\circ = 1$$
$$\text{sec } 45^\circ = \text{csc } 45^\circ = \sqrt{2}$$



¿Sabías que...?

Si tienes la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{2}},$$

puedes efectuar una racionalización del denominador con la finalidad de que este contenga un número racional.

Por ejemplo:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Establecemos relaciones entre las características de objetos y las representamos con formas bidimensionales describiendo la semejanza geométrica, las razones trigonométricas y los ángulos de elevación o depresión. Combinamos estrategias para determinar distancias inaccesibles y justificamos nuestras afirmaciones con conocimiento geométrico.



Fuente: Shutterstock

Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.

Las escaleras mecánicas se usan para trasladar a un gran número de personas entre los pisos de un edificio, especialmente en centros comerciales, aeropuertos, estaciones de transporte público, etc. Para construir un nuevo centro comercial de dos niveles, de 6 m de altura cada uno, se están acondicionando dos escaleras mecánicas (subida y bajada). El ingeniero encargado de la obra sugiere que deben tener una pendiente de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ como máximo.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

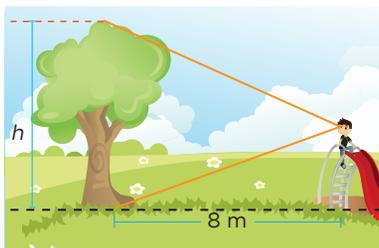
- ¿Cuál será la longitud de la escalera mecánica?
 a) $46\sqrt{3}$ m b) 8 m c) 10 m d) 12 m
- Si la altura de cada peldaño es de 200 mm, ¿cuántos peldaños tendrá la escalera?
 a) 25 b) 24 c) 30 d) 18
- La National Aeronautics and Space Administration (NASA), agencia del Gobierno estadounidense responsable del programa espacial civil, así como de la investigación aeronáutica y aeroespacial, está a punto de lanzar un cohete para poner en órbita un satélite.



Fuente: Shutterstock

¿Cuál será la inclinación para iniciar su despegue? Observa la imagen.

- a) 31° b) 37° c) 53° d) 58°
- Jairo acude con su familia a un centro de esparcimiento. Él se sube a un tobogán y, desde allí observa un árbol. Para ver la base de este, necesita bajar la vista 37° respecto a la horizontal, y, para observar la punta de la copa del árbol, debe levantar su mirada 45° respecto a la horizontal. El tobogán está a 8 m del árbol. Con esta información, ¿será posible calcular la altura (h) del árbol? Efectúa el procedimiento.

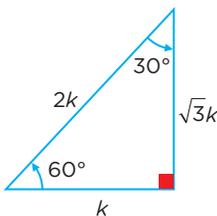


Fuente: Shutterstock



Ten en cuenta

Las razones trigonométricas de 30° y 60° son las siguientes:



$$\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tan } 30^\circ = \text{cot } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cot } 30^\circ = \text{tan } 60^\circ = \sqrt{3}$$

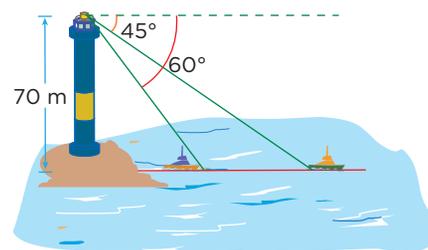
$$\text{sec } 30^\circ = \text{csc } 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{csc } 30^\circ = \text{sec } 60^\circ = 2$$

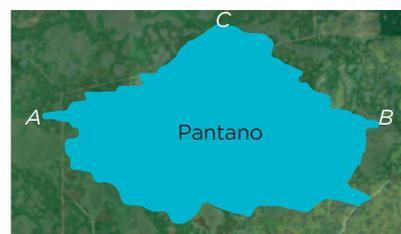
5. Un faro es una torre de señalización luminosa situada cerca de la costa. Se ubica en lugares de paso de las rutas de navegación de los barcos. En su parte superior, dispone de una lámpara potente, cuya luz se utiliza como guía.

Juan es el encargado del faro, el cual tiene una altura de 70 m. Desde el balcón observa dos barcos situados a un mismo lado del faro con ángulos de depresión de 60° y 45° . Según la información dada, ¿cuál es la distancia que separa a un barco del otro?

- (a) 70 m (b) 29,59 m (c) 59,29 m (d) 140 m

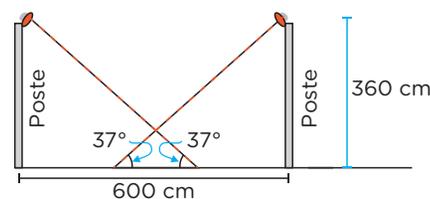


6. Para estimar el ancho de un pantano, los topógrafos Raúl y David se ubican en el punto B. Desde allí, ambos caminan 130 m al punto C. Raúl gira 53° y camina 200 m al punto A. David continúa caminando en línea recta hasta poder ver a su izquierda, perpendicularmente a su trayectoria, a Raúl, quien se encuentra en el punto A. Utilizando esta estrategia, los topógrafos podrían determinar, aproximadamente, el ancho del pantano entre los puntos A y B. Realiza tu procedimiento.



7. Se observa que dos postes de luz de 360 cm de altura, separados una distancia de 600 cm, iluminan una calle, como se muestra en la imagen. Determina la longitud del segmento que queda iluminado por los dos postes.

- (a) 1,2 m (b) 2,4 m (c) 3,6 m (d) 4,8 m



8. Rita y Manuel se encuentran en un mismo camino en línea recta y separados 153 m de distancia. En un momento determinado observan, con ángulos de elevación de 82° y 53° respectivamente, que una avioneta vuela sobre ellos a una altura constante. Rita afirma que dicha altura es de 150 m, mientras que Manuel afirma que es mayor que 170 m. ¿Quién está en lo correcto? Justifica tu respuesta.

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Establecí relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios, y las representé con razones trigonométricas.			
Leí textos o gráficos que describen las propiedades de las razones trigonométricas y los ángulos de elevación o depresión.			
Combiné estrategias para determinar distancias inaccesibles empleando razones trigonométricas.			
Comprobé la validez de una afirmación mediante contraejemplos y conocimientos geométricos.			

¿Cómo aplicamos las probabilidades en nuestra vida cotidiana?

Construimos nuestros aprendizajes



Propósito

Determinamos las condiciones y restricciones de una situación aleatoria. Analizamos la ocurrencia de sucesos compuestos y la representamos con el valor de su probabilidad condicional; además, adaptamos y combinamos procedimientos para determinarlos y utilizarlos en otros contextos de estudio.



Aplicamos la probabilidad en la investigación médica

Un informe médico sobre la anemia indica que, de los 200 adolescentes de una población, el 20 % señala que desconoce su estado de salud respecto al padecimiento de esta enfermedad. Del resto, solo el 40 % dice estar con tratamiento médico. Maricielo, estudiante de medicina que está abordando este tema como parte de su trabajo de investigación, toma esta información como referencia para saber cuál es la probabilidad de que, al escoger a un adolescente al azar, este no se encuentre en tratamiento a pesar de que conoce su enfermedad.



Fuente: Shutterstock

Ayuda a Maricielo; para ello, debes resolver la situación problemática y responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuál será el valor de la probabilidad que obtendrá Maricielo? Interpreta dicho valor.
- ¿Cuál será la probabilidad de que, al escoger a un adolescente al azar, este conozca su estado de salud respecto al padecimiento de la anemia y esté en tratamiento?



Recuerda

En un **experimento aleatorio** no se puede predecir el resultado porque depende el la suerte o azar.

Por ejemplo, extraer una carta de una baraja de 52 cartas.

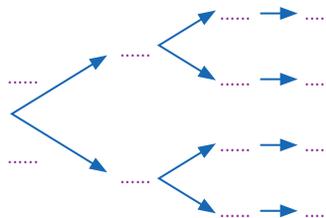
Los **experimentos determinísticos** son aquellos que se pueden predecir con exactitud.

Por ejemplo, conocer la edad de tu mamá.

8. ¿Qué te piden calcular las preguntas de la situación inicial?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

9. Si tuvieras una caja con 7 bolillas, 3 de color rojo y 4 de color verde, y extrajeras una de ellas sin reponerla, ¿cuál es la probabilidad de obtener 2 bolillas del mismo color luego de la segunda extracción?



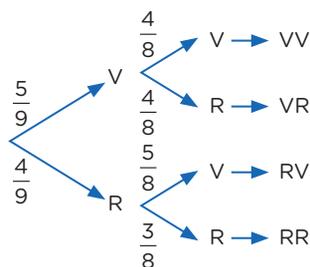
Ten en cuenta

Los **sucesos dependientes** se presentan cuando el resultado del primer suceso o evento influye en la probabilidad del segundo. La **probabilidad de sucesos dependientes** se calcula multiplicando la probabilidad del primer suceso por la probabilidad del segundo suceso, de modo que ocurrió el primero.

Por ejemplo, una caja contiene 5 fichas de color verde y 4 de color rojo. Si dos fichas son extraídas al azar sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda ficha sea verde, si se sabe que la primera ha sido roja?

Aplica el diagrama del árbol:

1.ª extracción



2.ª extracción

$$P(RV) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$$

Por lo tanto, se tiene una probabilidad igual a

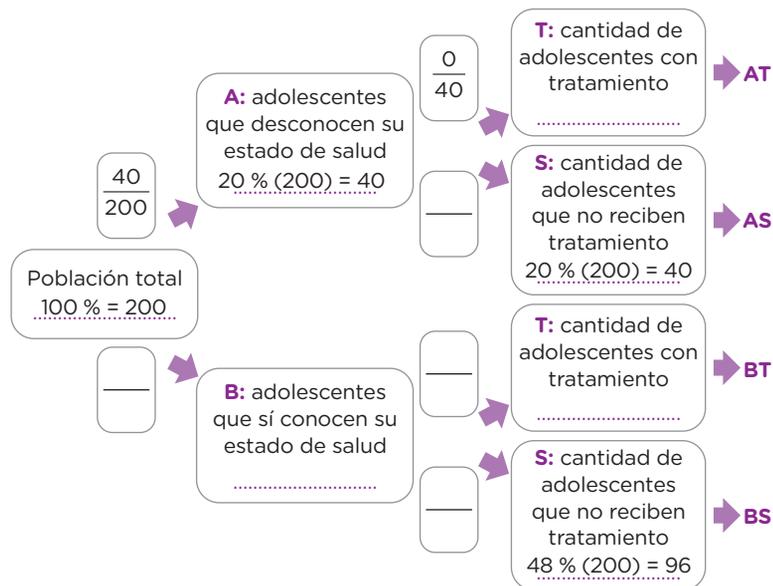
$$\frac{5}{18} \text{ o } 0,28 \text{ o } 28 \%$$

10. ¿Qué estrategias te servirán para responder las preguntas de la situación inicial? Revisa las estrategias que se presentan en la página 7 de las *Fichas de Matemática 5*.

- a) Diagrama del árbol y usar una fórmula
- b) Diagrama de tiras y diagrama tabular
- c) Diagrama cartesiano y ensayo y error

Ejecutamos la estrategia o plan

11. Empleando la primera estrategia, completa la información del siguiente diagrama del árbol. Considera que en las casillas debes escribir la probabilidad correspondiente a cada caso.



12. Completa la siguiente tabla tomando en cuenta la información del diagrama del árbol que completaste.

Evento	Cardinal del evento
Población de adolescentes que desconoce su estado de salud y está con tratamiento (AT)	$n(AT) = \dots\dots\dots$
Población de adolescentes que desconoce su estado de salud y está sin tratamiento (AS)	
Población de adolescentes que conoce su estado de salud y está con tratamiento (BT)	$n(BT) = 64$
Población de adolescentes que conoce su estado de salud y está sin tratamiento (BS)	
Total (espacio muestral Ω)	$n(\Omega) = 200$



Recuerda

Si A es un conjunto, entonces **$n(A)$ es el cardinal de A** , e indica el número o cantidad de elementos que tiene.

Por ejemplo, considera el suceso de lanzar un dado y obtener un número par.

Espacio muestral:

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$n(\Omega) = 6$$

A : se obtiene un número par

$$A = \{2; 4; 6\} \rightarrow n(A) = 3$$

13. Según la información de la tabla, determina lo siguiente:

- La probabilidad de elegir al azar a un adolescente que desconoce su estado de salud y está con tratamiento.

- La probabilidad de elegir al azar a un adolescente que desconoce su estado de salud y está sin tratamiento.

- La probabilidad de elegir a un adolescente que conoce su estado de salud y está sin tratamiento. Luego, responde la pregunta **a** de la situación inicial.



Ten en cuenta

En el caso de que todos los resultados de un experimento aleatorio sean equiprobables (tienen la misma probabilidad de ocurrir), puedes calcular la probabilidad con la **regla de Laplace**:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

Donde

$P(B)$: probabilidad del suceso B

$n(B)$: número de sucesos favorables a B

$n(\Omega)$: número de sucesos posibles

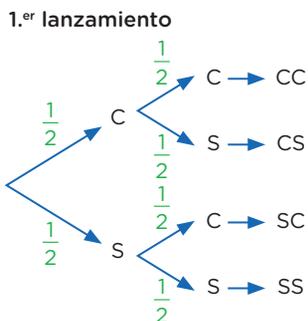


Recuerda

Para calcular la probabilidad de un evento aleatorio en un **diagrama del árbol**, debes multiplicar las probabilidades de todas las ramas contiguas. Si la situación lo requiere, puedes sumar estos resultados.

Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de sacar cara (C) o sello (S) al lanzar una moneda dos veces?

Haz el diagrama del árbol:



2.º lanzamiento

Las probabilidades son

$$P(CS) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(SC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Suma las probabilidades halladas:

$$P(CS) + P(SC) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

La probabilidad de obtener cara o sello es de 0,5.

14. Halla la probabilidad de elegir al azar a un adolescente que conoce su estado de salud y está con tratamiento. Luego, responde la pregunta **b** de la situación inicial.

Reflexionamos sobre el desarrollo

Comprueba tus respuestas aplicando las probabilidades halladas en cada una de las ramas del diagrama del árbol; apóyate en la información presentada en la caja “Recuerda”.

15. Calcula la probabilidad de que, al escoger a un adolescente al azar, este no se encuentre en tratamiento a pesar de que conoce su enfermedad.

16. Calcula la probabilidad de que, al elegir a un adolescente al azar, este conozca su enfermedad y se encuentre recibiendo tratamiento.

17. ¿Consideras importante valerte del conocimiento probabilístico para proyectar un tratamiento a cualquier tipo de enfermedad? Explica por qué.

Comprobamos nuestros aprendizajes



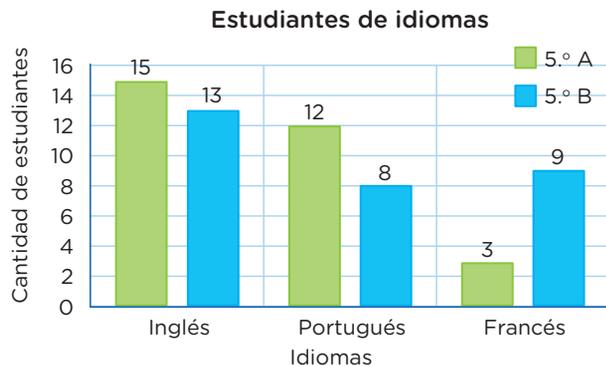
Propósito

Leemos, interpretamos y explicamos tablas y gráficos que contengan datos sobre la probabilidad de un evento. Asimismo, planteamos conclusiones sobre una situación aleatoria, una probabilidad condicional, eventos dependientes e independientes; además, analizamos dichas probabilidades, las justificamos con conocimientos y corregimos errores si los hubiera.



Situación A: Preferencias de un idioma

El gráfico representa las preferencias de los estudiantes del 5.º A y del 5.º B de secundaria por estudiar un idioma extranjero. El director de la institución educativa escoge a un estudiante al azar para que participe en un concurso, y resulta ser del 5.º A. ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera estudiar portugués?



A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

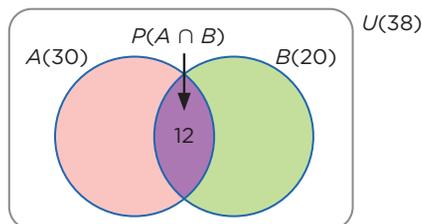
Resolución

Determinamos los sucesos y sus respectivos cardinales:

$$A = \{\text{estudiantes del 5.º A}\} \rightarrow n(A) = 15 + 12 + 3 = 30$$

$$B = \{\text{estudiantes que prefieren estudiar portugués}\} \\ \rightarrow n(B) = 12 + 8 = 20$$

Determinamos la intersección de ambos sucesos ($A \cap B$) y su cardinal:



Hallamos la probabilidad de que el estudiante escogido al azar prefiera estudiar portugués:

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

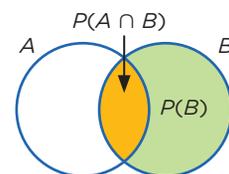
Por lo tanto, $P(B/A) = \dots \times 100\% = \dots\%$.

Respuesta: La probabilidad de que el estudiante escogido al azar prefiera estudiar portugués es del $\dots\%$.



Ten en cuenta

Sea A un evento o suceso cualquiera de un espacio muestral. La probabilidad de que se realice el suceso A , habiéndose realizado el suceso B , es una **probabilidad condicional**; se simboliza con $P(A/B)$.



Se calcula así:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Se aprecia en el diagrama que **el espacio muestral es el conjunto B**.



Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- 1. Describe el procedimiento realizado para resolver y responder la pregunta de la situación A.

Grid for writing the answer to question 1.

- 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el estudiante escogido al azar prefiera estudiar inglés?

Grid for writing the answer to question 2.

- 3. Si el estudiante escogido al azar hubiera sido del 5.º B, ¿cuál sería la probabilidad de que prefiera estudiar portugués?

Grid for writing the answer to question 3.

- 4. Completa la siguiente tabla de contingencia con los datos del gráfico de barras y comprueba la respuesta de la situación A. Ten en cuenta la información de la caja “¿Sabías que...?”.

Contingency table with columns: Idiomas, Aulas (5.º A, 5.º B), Total. Rows: Inglés, Portugués, Francés, Total.

Grid for writing the answer to question 4.



¿Sabías que...?

Una tabla de contingencia es una herramienta utilizada en estadística, la cual consiste en crear al menos dos filas y dos columnas para representar datos en términos de sus frecuencias.

Por ejemplo, en la tabla se muestra el estado civil de 100 personas que asistieron al teatro (soltero: S; casado: C).

Contingency table showing marital status: S, C, Total for Varón and Mujer.

Si se elige al azar a uno de los asistentes y resulta que es varón, ¿cuál es la probabilidad de que sea soltero?

A: varón; n(A) = 70

B: soltero; n(B) = 41

varón soltero; n(A ∩ B) = 25

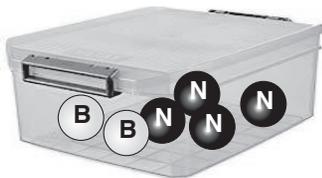
P(B/A) = 25/70 ≈ 0,36

La probabilidad de elegir a un asistente varón que sea soltero es de 0,36 o 36 %, aproximadamente.

Situación B: Extraemos una pelotita de una urna

La imagen muestra la urna 1, que contiene 2 pelotitas blancas y 4 negras; la urna 2, que contiene 5 pelotitas blancas y 3 negras, y la urna 3, que contiene 2 pelotitas negras y 6 amarillas. Se escoge una urna aleatoriamente y de ella se extrae una pelotita. Calcula cuál es la probabilidad de que la pelotita extraída sea de color negro.

Urna 1



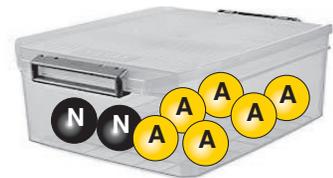
N.º de casos posibles: 6
N.º de casos favorables: 4
 $P(\text{negra}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Urna 2



N.º de casos posibles: 8
N.º de casos favorables: 3
 $P(\text{negra}) = \frac{3}{8}$

Urna 3



N.º de casos posibles: 8
N.º de casos favorables: 2
 $P(\text{negra}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

A continuación, analizamos los procedimientos planteados y completamos.

Resolución

La probabilidad de escoger una urna cualquiera es de $\frac{1}{3}$, puesto que no se sabe de cuál de las 3 urnas se extrae la pelotita.

Entonces:

$P(\text{pelotita extraída de color negro})$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{31}{72}$$

$$P(\text{pelotita extraída de color negro}) = \frac{31}{72} \approx \dots \times 100 \% = \dots \%$$

Respuesta: La probabilidad de extraer la pelotita negra es de 43 %, aproximadamente.

Ahora, respondemos las siguientes preguntas:

- Describe el procedimiento realizado para responder la pregunta de la **situación B**.

- Si quisieras conocer la probabilidad de que la pelotita extraída sea de color blanco, ¿solo tomarás en cuenta las urnas 1 y 2? Explica por qué. Luego, estima dicha probabilidad.



Recuerda

Se denominan **sucesos independientes** cuando el resultado del primer suceso o evento no influye en la probabilidad del segundo. La **probabilidad de sucesos independientes** se calcula multiplicando sus probabilidades individuales.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Por ejemplo, calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados en forma sucesiva salgan números pares.

A: primer suceso par

B: segundo suceso par

$$P(A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} = 0,25$$



Ten en cuenta

Para un suceso A, la probabilidad es un número real comprendido entre 0 y 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

La probabilidad de un suceso seguro es la unidad:

$$P(\Omega) = 1$$

La probabilidad de un suceso imposible es 0:

$$P(\emptyset) = 0$$



Aprendemos a partir del error

Situación C: Lanzamos un dado y un par de monedas

A fin de determinar un experimento aleatorio, se lanza un dado y, acto seguido, se lanza una o dos monedas, una después de la otra. Para ello, se dan las siguientes condiciones:

- Si en el dado sale número impar, se lanza una moneda.
- Si sale número par, se lanzan dos monedas.

¿Cuál es el espacio muestral?



Fuente: Shutterstock

Analizamos los procedimientos planteados para identificar el error.

Resolución

Para construir el espacio muestral, nos ayudamos de la siguiente tabla de posibilidades:

Lados del dado	1		2		3		4		5		6	
Primera moneda	C	S	C	S	C	S	C	S	C	S	C	S
Segunda moneda	No se lanza		C	S	No se lanza		C	S	No se lanza		C	S

Respuesta: Luego, el espacio muestral solicitado es $\Omega = \{1C, 1S, 2CC, 2SS, 3C, 3S, 4CC, 4SS, 5C, 5S, 6CC, 6SS\}$.

Ahora, respondemos las preguntas para corregir el error:

1. ¿Es correcto el procedimiento en la resolución? De no ser así, corrige y responde la pregunta de la **situación C**.

2. Dado el experimento aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que salgan dos caras?



Recuerda

El **espacio muestral** son todos los posibles resultados del experimento aleatorio. Por ejemplo, Mariana lanza un dado y una moneda a la vez.

El espacio muestral es

$\Omega = \{1C, 1S, 2C, 2S, 3C, 3S, 4C, 4S, 5C, 5S, 6C, 6S\}$.

$$n(\Omega) = 12$$



Ten en cuenta

Dos sucesos, A y B , son **incompatibles** si no presentan ningún elemento común, es decir, $A \cap B = \emptyset$.

Significa que no pueden ocurrir a la vez. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, los sucesos

A : salir número par

B : salir número impar

son incompatibles.

Evaluamos nuestros aprendizajes



Propósito

Determinamos las condiciones y restricciones de una situación aleatoria; analizamos la ocurrencia de sucesos compuestos y los representamos con su probabilidad empleando diversos procedimientos. Leemos e interpretamos tablas y textos que contienen datos probabilísticos; también planteamos conclusiones sobre dichos resultados para tomar decisiones.



Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno o portafolio.



Fuente: Shutterstock

En un grupo de amigos, el 80 % están casados. Entre los casados, el 75 % tiene trabajo. Finalmente, un 5 % no están casados y se encuentran desempleados. Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. Si uno de ellos postula a un trabajo, ¿qué probabilidad hay de que sea de los que están desempleados?
 a) 0,15 b) 0,20 c) 0,21 d) 0,25
2. Si uno de ellos tiene trabajo, ¿qué probabilidad hay de que esté casado?
 a) 0,50 b) 0,76 c) 0,80 d) 0,95

Un grupo de 120 turistas participa en un viaje por varias ciudades de Europa; 48 de ellos hablan inglés; 36, francés, y 12, los dos idiomas.

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.



Fuente: Shutterstock

3. Si se escoge a un turista al azar del grupo en mención, ¿cuál es la probabilidad de que hable francés sabiendo que habla inglés?
 a) 0,15 b) 0,25 c) 0,45 d) 0,55
4. ¿Cuál es la probabilidad de que el turista hable alguno de los dos idiomas? Plantea tu resolución.
5. En una caja de 100 artículos hay 10 con defectos. Al azar se toman 3 artículos, uno tras otro. Halla la probabilidad de que los 3 no sean defectuosos.
 a) 0,73 b) 0,53 c) 0,40 d) 0,28

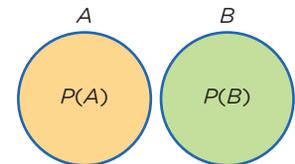


Recuerda

La **regla de la adición** establece que la probabilidad de que ocurran al menos dos eventos A y B es la siguiente:

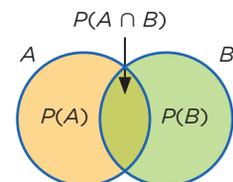
- Cuando A y B son eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



- Cuando A y B son eventos no excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$





Recuerda

La siguiente expresión es empleada para hallar la probabilidad de sucesos dependientes.

$$P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Por ejemplo, de una urna que contiene 3 fichas azules y 5 rojas, se extraen 2 fichas en forma sucesiva y **sin reposición**. Calcula la probabilidad de que ambas fichas sean rojas.

A: primer saque rojo

B: segundo saque rojo habiendo sacado rojo

$$P(A \cap B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14} \approx 0,36$$

6. José tiene 20 botellas de jugo natural para la venta, de las cuales 10 botellas tienen escrita la palabra “premio” en su tapa. Él afirma que la probabilidad de que una persona obtenga la palabra “premio” (en la tapa) recién en la tercera botella vendida es del 30 %. ¿Es correcta dicha afirmación? Justifica tu respuesta.



Fuente: Shutterstock

7. En una localidad, el 40 % de la población tiene cabello de color negro; el 25 %, ojos de color marrón, y el 15 %, cabellos y ojos marrones. Se escoge a una persona al azar. Si tiene los cabellos negros, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos marrones?



Fuente: Shutterstock

- a) 0,225 b) 0,375 c) 0,450 d) 0,265

8. Una urna A contiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. En otra urna B, hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Luego de lanzar una moneda equilibrada, si sale cara, se extrae una bola de la urna A; en cambio, si sale sello, se extrae de la urna B. Si salió una bola con número par, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la urna A?

Evalúo mis aprendizajes

Reflexiono y evalúo mi progreso en la siguiente ficha de autoevaluación.

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné las condiciones y restricciones de una situación aleatoria, analicé la ocurrencia de sucesos compuestos y los representé con su probabilidad.			
Leí, interpreté y expliqué tablas y gráficos, así como diversos textos que contenían valores probabilísticos.			
Adapté y combiné procedimientos para adecuarlos a otros contextos de estudio.			
Planteé afirmaciones sobre las características de una situación aleatoria o probabilidad condicional, eventos dependientes e independientes, y analicé los datos de una probabilidad.			

Enfoques

transversales

Enfoque Ambiental



Busca formar personas conscientes del cuidado del ambiente, que promuevan el desarrollo de estilos de vida saludables y sostenibles.

Enfoque Inclusivo o de Atención a la Diversidad



Busca reconocer y valorar a todas las personas por igual, con el fin de erradicar la exclusión, discriminación y desigualdad de oportunidades.

Enfoque de Derechos



Fomenta el reconocimiento de los derechos y deberes; asimismo, promueve el diálogo, la participación y la democracia.

Enfoque Igualdad de Género



Busca brindar las mismas oportunidades a hombres y mujeres, eliminando situaciones que generan desigualdades entre ellos.

Son los valores y actitudes que tenemos al relacionarnos con otras personas y con nuestro entorno, con el fin de generar una sociedad más justa, inclusiva y equitativa para todos.

Enfoque Intercultural



Promueve el intercambio de ideas y experiencias entre las distintas formas de ver el mundo.

Enfoque Búsqueda de la Excelencia



Incentiva a los estudiantes a dar lo mejor de sí mismos para alcanzar sus metas y contribuir con su comunidad.

Enfoque Orientación al Bien Común



Busca que el conocimiento, los valores y la educación sean bienes que todos compartimos, promoviendo relaciones solidarias en comunidad.

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1

Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.

La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

Artículo 2

El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base del estado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

Artículo 3

Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

Artículo 4

Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.

La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

Artículo 5

El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.

Artículo 6

La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II La democracia y los derechos humanos

Artículo 7

La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

Artículo 8

Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.

Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

Artículo 9

La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

Artículo 10

La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11

La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

Artículo 12

La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

Artículo 13

La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

Artículo 14

Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

Artículo 15

El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

Artículo 16

La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17

Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional

democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

Artículo 18

Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

Artículo 19

Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

Artículo 20

En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.

El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.

Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Artículo 21

Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.

El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.

Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

Artículo 22

Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23

Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.

Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

Artículo 24

Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.

Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.

Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

Artículo 25

Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.

La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI Promoción de la cultura democrática

Artículo 26

La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

Artículo 27

Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

Artículo 28

Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. Democracia y Estado de Derecho

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. Equidad y Justicia Social

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las

personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

3. Competitividad del País

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

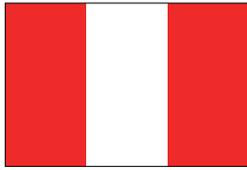
4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

SÍMBOLOS DE LA PATRIA

Artículo 49 de la Constitución Política del Perú



BANDERA NACIONAL



ESCUDO NACIONAL

HIMNO NACIONAL DEL PERÚ

CORO

Somos libres, seámoslo siempre,
y antes niegue sus luces el sol,
que faltemos al voto solemne
que la patria al Eterno elevó.

HIMNO NACIONAL

Declaración Universal de los Derechos Humanos

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1

Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2

Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3

Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4

Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5

Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6

Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7

Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8

Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9

Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10

Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11

1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12

Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13

1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14

1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15

1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16

1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17

1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18

Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19

Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20

1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21

1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22

Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23

1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24

Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25

1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26

1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27

1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28

Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29

1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad (...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30

Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.