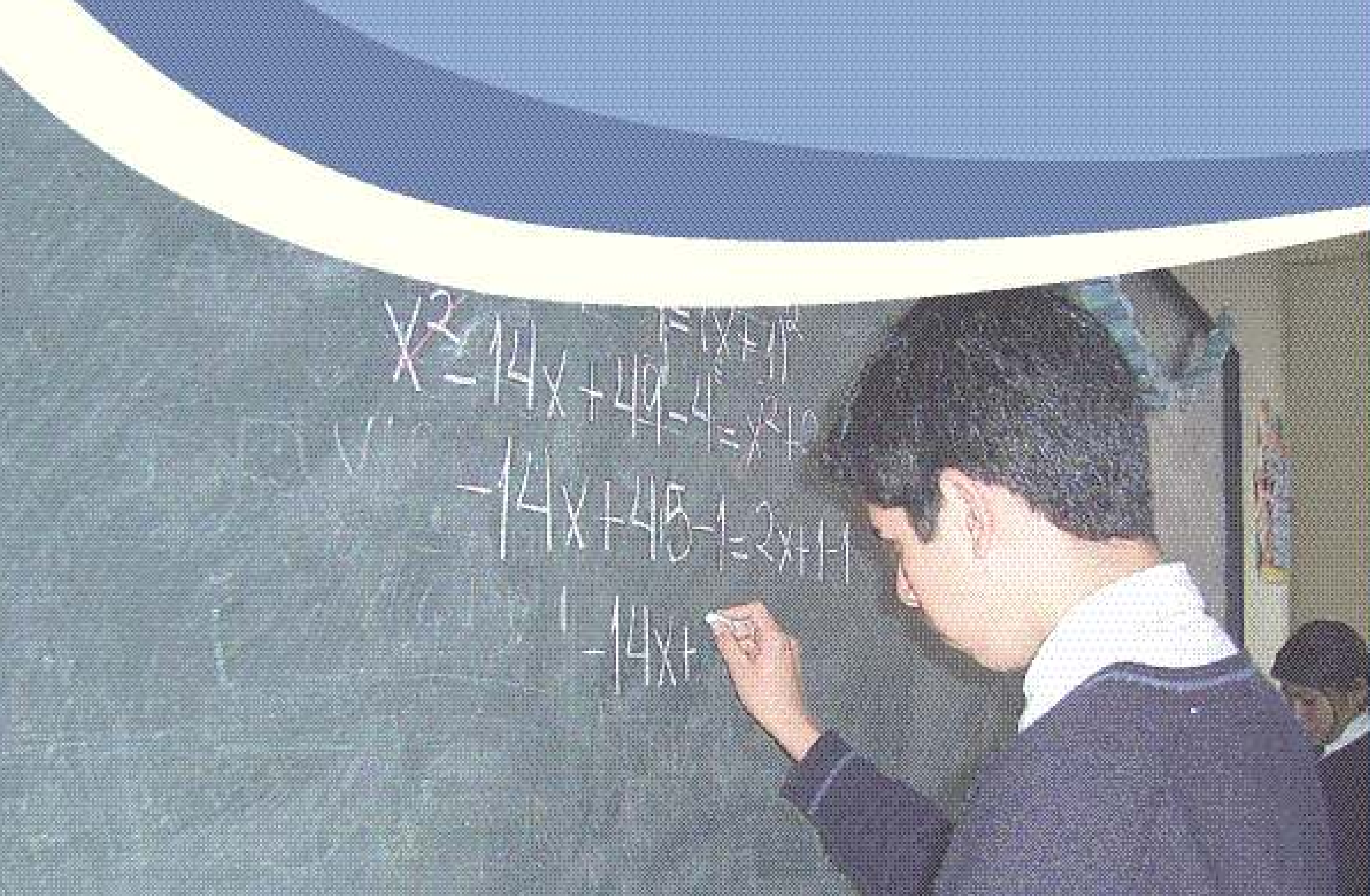
# Guía para el desarrollo del pensamiento a través de La Matemática



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTERIO DE EDUCACIÓN
REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Javier Sota Nadal

VICEMINISTRO DE GESTIÓN PEDAGÓGICA
Idel Vexler Talledo

VICEMINISTRA DE GESTIÓN INSTITUCIONAL
Helenn Chávez Depaz

SECRETARIO GENERAL
Pedro Patrón Bedoya

DIRECTOR NACIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y SUPERIOR TECNOLÓGICA
Guillermo Molinari Palomino

JEFE DE LA UNIDAD DE DESARROLLO CURRICULAR Y RECURSOS EDUCATIVOS DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
César Puerta Villagaray

# GUÍA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO A TRAVÉS DE LA MATEMÁTICA

ELABORACIÓN DEL DOCUMENTO:
Juan Quintana Mendoza

REVISIÓN:
Martín E. Mendoza Bolo

CORRECCIÓN DE ESTILO:
Federico Ortiz Agurto

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN:
DINESST

IMPRESO POR:
Fimart S.A.C. Av. del Río 111-Pueblo Libre

TIRAJE
10 000 ejemplares
Primera Edición 2006

Hecho el Depósito Legal en la
Biblioteca Nacional del Perú
Nro. 2006-1640

Gobierno del Perú
Trabajo de peruanos

# ÍNDICE

Página

Página

# INTRODUCCIÓN

La educación peruana atraviesa una grave crisis, en la que confluyen varios factores. Por un lado, está la persistencia de esquemas tradicionales de entender y hacer educación; y por el otro, la misma realidad con sus carencias ancestrales y su diversidad, que dificulta la aplicación de cualquier propuesta de modo uniforme. Sobre ello, por años, hemos estado formando parte de un paradigma educativo caracterizado por una enseñanza basada en la transmisión y aprendizaje de contenidos, con métodos memorísticos, carentes de significado y contexto, sin utilidad para la vida.

Según los resultados de la prueba PISA[1] aplicada por la OCDE[2] en el año 2001, el 79,6% de nuestros estudiantes de Primaria y Secundaria no comprendían con eficacia lo que leían y en la evaluación del rendimiento de los escolares del país realizada por la UMC[3] del Ministerio de Educación, el 41% apenas puede resolver problemas matemáticos simples, utilizando las operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división).

Desde esta perspectiva, la sociedad actual llamada por algunos *sociedad del conocimiento*, se caracteriza por un enorme desarrollo de las tecnologías y comunicaciones en la que la información se incrementa día a día y los conocimientos se renuevan permanentemente. Este es el otro escenario que no hay que omitir, pues, educamos a estudiantes para la sociedad actual, cuyas bondades y exigencias no son las mismas que las que nos tocó vivir.

El reconocimiento del estado actual de la educación en nuestro país no tiene como propósito precisar responsabilidades o lamentarnos como si esto fuera irremediable; tampoco implica convertirlos en meros receptores esperando que otros se encarguen de traer alguna solución mágica, sino por el contrario estamos obligados a asumir y tomar conciencia de esta situación y decidirnos a cambiarla. Pero este cambio será posible sólo si las personas tienen las herramientas para ello, es decir, si poseen las *capacidades* que les permitan utilizar los medios de que dispone la sociedad actual.

En este contexto, el Ministerio de Educación propone en el DCN[4] del 2005 un diseño curricular que "*tiene como máxima aspiración desarrollar en el estudiante capacidades, conocimientos, valores y actitudes que le permitan una educación integral para alcanzar su autorrealización.*"

[1] PISA : Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes.
[2] OCDE : Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.
[3] UMC : Unidad de Medición de la Calidad Educativa.
[4] DCN : Diseño Curricular Nacional.

Así también en la OTP[5] del Área de Matemática, se especifican los propósitos fundamentales del aprendizaje de la matemática en la Educación Secundaria; estos son: *aprender a valorar positivamente la matemática, adquirir confianza en las propias capacidades para hacer matemática, resolver problemas de la vida cotidiana y aprender a razonar matemáticamente*.

Lo anterior implica formular una propuesta pedagógica que posibilite estas aspiraciones y propósitos. Para ello el Ministerio de Educación establece el desarrollo de cuatro capacidades superiores o fundamentales: *el pensamiento creativo, el pensamiento crítico, la solución de problemas y la toma de decisiones*. Dichos procesos, que en detalle han sido tratados en la Guía para el Desarrollo de Capacidades del 2004, es transversal en todas las áreas curriculares y se debe reflejar en la práctica educativa.

Se pone énfasis en el sentido transversal del proceso, pues sabemos que antes no era usual actuar y pensar de este modo. Se pensaba, por ejemplo, que resolver problemas era un asunto que le correspondía sólo al área de matemática y no a los demás cursos, que la toma de decisiones sólo debía ser desarrollada en los Ciencias Sociales, o que trabajar actitudes, como la autoestima, importaba poco para la Comunicación. Esta concepción obviamente ha sido replanteada para dejar una práctica educativa caracterizada por cursos o asignaturas, como compartimentos estancos y aislados, sin ninguna relación, por una práctica integral, transversal y articulada.

La educación peruana no puede estar al margen de las investigaciones, experiencias e innovaciones educativas llevadas a cabo actualmente en diversos países. Por ello se toma como referente los “Principios y estándares para la educación matemática” establecidos por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)[6], los cuales orientan el quehacer de la educación matemática en norteamérica; así mismo se consideran los resultados de las investigaciones de las ciencias neurológicas, para

[5] OTP : Orientaciones para el Trabajo Pedagógico.

[6] National Council of Teachers of Mathematics (Consejo Nacional de Profesores de Matemática) (NCTM) organización profesional norteamericana comprometida con la excelencia de la enseñanza y aprendizaje de la matemática para todos los estudiantes.

mejorar la labor educativa del docente; y el rol cada vez más activo de la matemática como herramienta de las demás ciencias, las cuales tienen implicancia en la presencia de nuevos contenidos. Es decir se pondera y toma conciencia de todo aquello que afecte de una u otra forma el proceso de la educación matemática.

Cabe señalar que los contenidos matemáticos que se presentan en las sesiones de aprendizaje en el aula, se construyen en base a axiomas y deducciones, por lo cual para su aprendizaje exige del estudiante el desarrollo de capacidades como la abstracción, el razonamiento, el análisis, la síntesis, las inferencias, las analogías, la interpretación, la resolución de problemas, la creatividad, etc. Todas las capacidades mencionadas son necesarias para cualquier aprendizaje y útiles para la vida.

En esta guía se presenta como marco teórico referencial un conjunto de ideas como las corrientes psicopedagógicas más difundidas, los resultados de las neurociencias y las inteligencias múltiples, todas las cuales han sido validadas en la práctica educativa.

También se aborda el pensamiento matemático a partir del análisis de las concepciones que se tienen acerca de él en las ciencias vinculadas a su estudio, así como de la evolución de su enseñanza, pues consideramos que el docente debe reflexionar al respecto y participar activamente como miembro de la comunidad educativa matemática internacional, la cual pone énfasis en el desarrollo del pensamiento mediante la resolución de problemas y la relación de la matemática con las demás disciplinas mediante la modelación matemática.

Finalmente, se propone una gama de actividades lúdicas muy útiles no sólo para hacer más amena las clases de matemática, sino en consideración al hecho de haber sido seleccionadas con criterio pedagógico, desarroladas en forma didáctica y con la intencionalidad expresa de contribuir con ello al desarrollo de capacidades en los estudiantes.

CAPÍTULO 1

# MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

## A MODO DE ANTECEDENTE

En las dos últimas décadas, en el mundo occidental, se han retomado con mayor fuerza, pero esta vez de modo más consciente, ciertos principios pedagógicos para mejorar la práctica educativa. Nos estamos refiriendo a los aportes de la pedagogía activa y al constructivismo, que permitieron a los docentes asumir su rol de mediador en el proceso de enseñanza-aprendizaje con relativo éxito. Estos aportes, principios e *ideas fuerza* fueron el resultado del análisis de las investigaciones realizadas y de las experiencias realizadas en otros entornos. Cabe recordar que en educación, la última palabra no está dicha; más bien es un continuo hacer y aprender con el objetivo de mejorar permanentemente.

Carl Rogers[1] sintetiza en la cita adjunta, el espíritu pedagógico que caracteriza la tendencia educativa en la actualidad. Uno de los objetivos de la educación es que los estudiantes sean capaces de **aprender a pensar y aprender a aprender** fundamentalmente, pues estas capacidades le permitirán *aprender a hacer*, *aprender a crear* y por último, *aprender a ser*.

El Ministerio de Educación, igualmente considera prioritario el desarrollo integral del educando, en coherencia con las exigencias que las sociedad moderna demanda, mediante el desarrollo de las capacidades fundamentales: el pensamiento creativo, el pensamiento crítico, la solución de problemas y la toma de decisiones.

*“El único hombre educado es aquel que ha aprendido a aprender; el que ha aprendido a adaptarse y a cambiar; el que ha caído en la cuenta de que ningún conocimiento es seguro, que sólo el proceso de buscar los conocimientos es lo que constituye la base de la seguridad. El continuo cambio, la confianza en el proceso más que en los conocimientos estáticos, es lo único que tiene sentido como meta de la educación en el mundo moderno”.*
**Carl Rogers**

Las corrientes psicopedagógicas que se presentan son referentes importantes, a pesar de algunas limitaciones que puedan tener, pero permanentemente marcan la pauta en el debate por mejorar la enseñanza y el aprendizaje en la educación. Sintetizaremos las ideas básicas de estas propuestas, donde cada una por separado no es suficiente, pero la integración de ellas debe configurar una concepción más acorde con este tiempo.

[1] Carl Rogers (1902-1987), psicólogo estadounidense de ideas revolucionarias en educación. Cree fundamental y radicalmente en la persona y en sus posibilidades

## 1.1 CORRIENTES PSICOPEDAGÓGICAS

### ENFOQUE COGNITIVO

Para Jean Piaget, el estudiante construye activamente sus conocimientos, en el sentido de que no los acumula, y más bien los transforma, los configura y les da significado acorde en el objeto de su aprendizaje. Dicha construcción la lleva a cabo, fundamentalmente, mediante dos procesos: el proceso de asimilación y el de acomodación.

Durante la **asimilación** el sujeto incorpora la nueva información a su estructura cognitiva, a partir del esquema que ya posee**.** La **acomodación** por su parte**,** transforma su esquema inicial en función de la nueva información que es incorparada a su andamiaje por reestructuración o subsanación.

La construcción del nuevo conocimiento surge cuando de un esquema inicial se pasa a otro de mayor calidad. Y esto se lleva a cabo de la siguiente manera:

- Se enfrenta al alumno a una situación nueva, pero que él pueda asimilarlo parcialmente.
- Ello provoca un conflicto cognitivo: hay una perturbación del esquema inicial que trata de reorganizarse.
- Se produce un nuevo nivel de equilibrio, si logra asimilar enteramente la nueva información.

Debemos señalar la posibilidad de que la nueva información el sujeto no la asimile o la asimile parcialmente, esto significará que la situación de aprendizaje no estuvo al alcance de él o las acciones para este proceso no fueron efectivas.

Por ejemplo, a un estudiante se le pide calcular: - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - . . . - 39 + 40

**EQUILIBRIO INICIAL**

*Su esquema le permite realizar sumas más simples, aunque con un procedimiento largo lo haría.*

→

**DESEQUILIBRIO**

*Debe buscar otras estrategias, pero que se puedan articular con lo que él conoce: "puede agrupar sumandos".*

→

**REEQUILIBRIO**

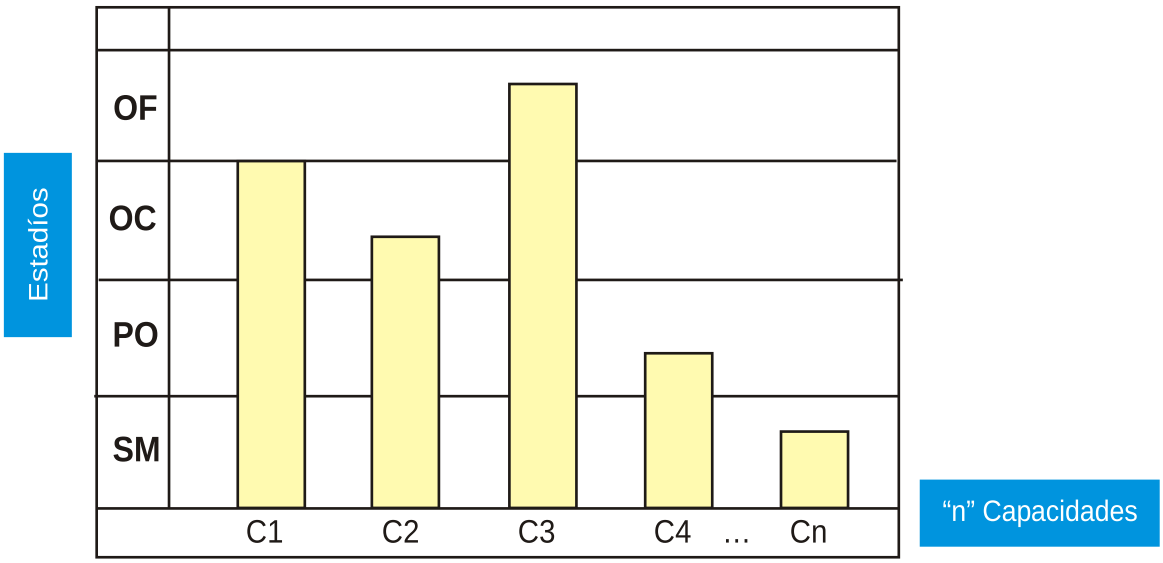
*Sumando en parejas obtiene siempre +1, y como son veinte de éstas, la suma será 20 x 1 = 20. Esta nueva estrategia ya forma parte de su estructura cognitiva.*

No se pueden ignorar los estadíos propuestos por J. Piaget, como tampoco tomarlos al pie de la letra. Son referentes importantes, pues nos ayudan a dosificar los contenidos seleccionados y los procesos a aplicar. Resumidamente, los describimos a continuación:

| ESTADÍOS | EDADES | CARACTERÍSTICAS | PERMITE |
|---|---|---|---|
| **SENSORIO-MOTOR (SM)** | 0 a 2 años | Actuaciones puramente prácticas.<br>El desarrollo de las nociones de tiempo, espacio y cantidad en los niños pequeños sigue una evolución paralela a la de su inteligencia práctica. | Acciones sobre los objetos |
| **PREOPERACIONAL (PO)** | 2 a 6 años | Fase de inteligencia preoperatoria o intuitiva, debido a que en este período todavía no poseen la capacidad lógica.<br>El lenguaje tendrá un gran desarrollo, aparecen importantes tendencias en el contenido del pensamiento (realismo y artificialismo). | Acciones sobre la realidad. |
| **OPERACIONAL CONCRETO (OC)** | 6 a 12 años | Aparece la capacidad de conservar, clasificar, seriar y resolver problemas que impliquen nociones organizadas similares. | Acciones sobre operaciones simples. |
| **OPERACIONAL FORMAL (OF)** | 12 años hacia adelante | El adolescente adquiere una mayor capacidad de abstracción.<br>El razonamiento adquiere un carácter hipotético deductivo.<br>Ante un problema determinado, se plantean todas las posibilidades de interacción o combinación. | Acciones sobre operaciones. |

Respecto a los estadíos de J. Piaget, como él mismo lo indicó, no se debe generalizar, no sólo por los diversos grupos sociales y culturales existentes, sino también porque un mismo sujeto no siempre tiene homogeneidad intelectual en todos los conocimientos; se dan casos en que determinadas áreas están en un nivel cognitivo distinto al que le correspondería. Tal es el caso de los artistas, deportistas u otros profesionales que más desarrollan un área en particular. Por ello J. Piaget sugiere hablar mejor de **secuencialidad de las etapas.**

**La gráfica adjunta describe mejor lo expuesto:**




Se puede observar que un individuo no es homogéneo en su desarrollo cognitivo, pues según el desarrollo de sus capacidades se encuentra en diferentes etapas.

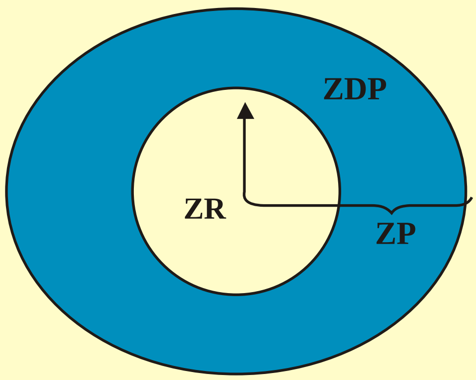
## ENFOQUE SOCIOCULTURAL

Lev Vigotsky considera al individuo como el resultado de un proceso histórico y social en el cual el lenguaje desempeña un papel esencial. Considera que el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y su medio sociocultural. En el enfoque de Vigotsky se pone énfasis fundamentalmente en los conceptos: funciones mentales, habilidades psicológicas, zona de desarrollo próximo, herramientas psicológicas y mediación.

**Funciones mentales.** Vigotsky clasifica las funciones mentales en inferiores y superiores. Las primeras son genéticas, naturales y a partir de ellas sólo respondemos al medio en una forma limitada, casi impulsiva; en cambio las superiores resultan de la interacción social con los demás, es decir, la sociedad nos moldea con sus características y para desarrollarnos en ella aprendemos sus símbolos, adquirimos conciencia de nosotros mismos, lo que nos permite desarrollar aprendizajes cada vez más complejos.

**Habilidades psicológicas.** Las habilidades de las funciones mentales superiores: memoria, atención, formulación de conceptos, etc. son un fenómeno social; primero corresponden al plano social (intersicológicas) y progresivamente se dirigen al ámbito individual (intrasicológicas). A este concepto de transformación de las habilidades de lo social hacia lo individual le llama interiorización.

**Zona de Desarrollo Próximo(ZDP).** Las posibilidades que tiene el individuo de desarrollar sus habilidades psicológicas mediante la interacción con los demás se denomina Zona de Desarrollo Próximo. Esto quiere decir que nuestro aprendizaje será mayor si la interacción con los demás es más enriquecedora, de mejor calidad. Aprendemos socialmente, con ayuda de los demás. También podemos definirla como la región entre lo que el sujeto es capaz de aprender por sí solo (capacidades reales) y lo que puede hacer con la ayuda de los demás (capacidades potenciales).



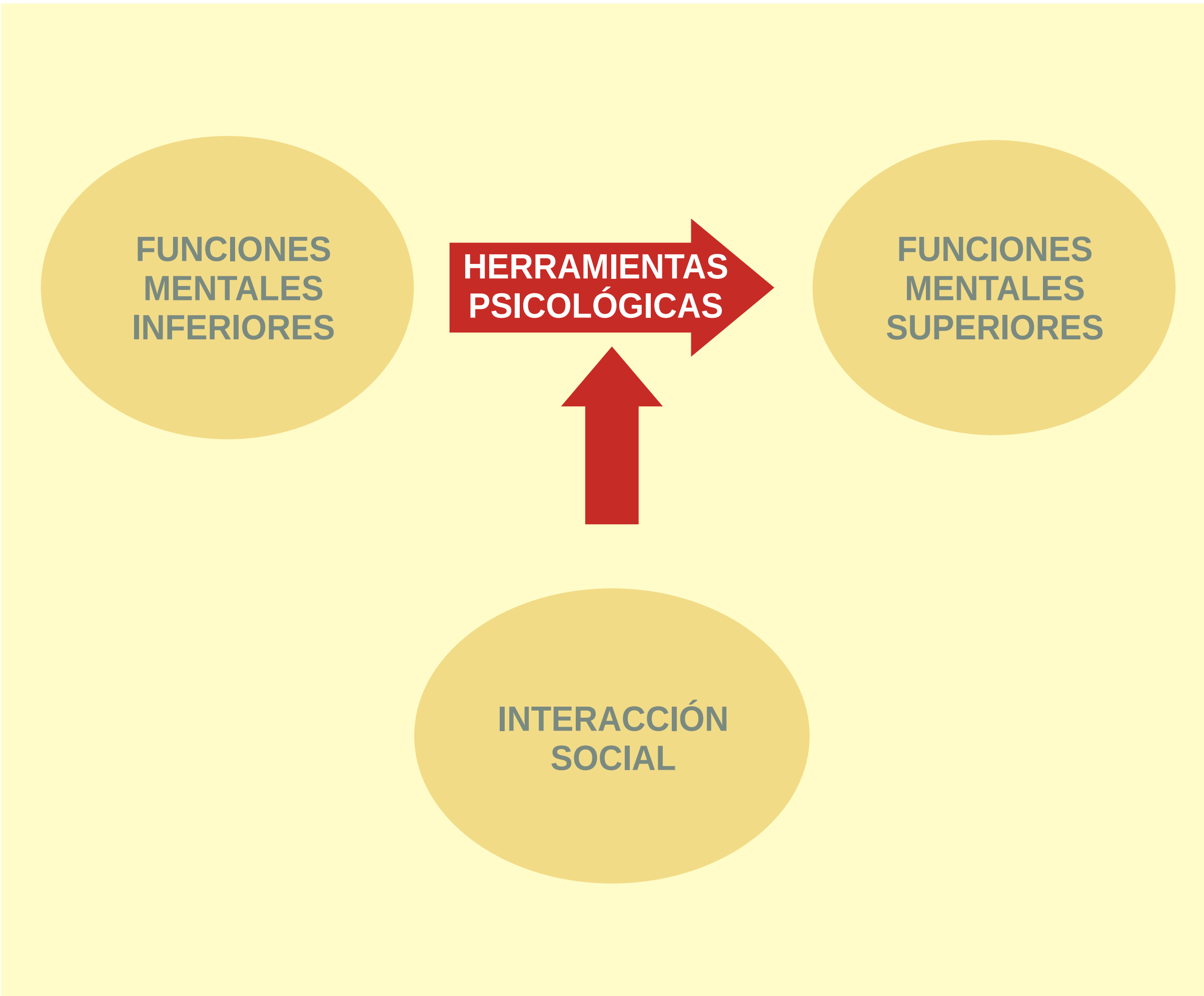

**ZR:** viene a ser lo que propiamente puede aprender una persona, por sus propios medios.

**ZP:** viene a ser la zona hasta donde podría aprender con la ayuda de otra persona que conozca más que él (profesor o su par).

**Herramientas psicológicas.** La interacción social se produce mediante el uso de signos, símbolos, gráficos, diagramas, obras de arte, mapas, etc. A estos se les denomina herramientas psicológicas. Es decir, son el medio que nos permite pasar de las funciones mentales inferiores a las superiores, internalizar las habilidades psicológicas del plano social hacia el individual, es decir, desarrollar nuestra ZDP.

Considera al lenguaje como una de las herramientas psicológicas más importantes, pues nos va a permitir tener conciencia de nosotros, controlar nuestra conducta y ejercitar la crítica sobre algunas situaciones socio-culturales.

**La mediación.** Este concepto está presente en todo momento del desarrollo del sujeto. El desarrollo de las funciones mentales inferiores hacia las superiores se da mediante la interacción social con los demás, de igual modo la interiorización de las habilidades interpsicológicas en intrapsicológicas ocurren debido a la interacción con los demás. La interacción social a su vez se da mediante las herramientas psicológicas; en general nuestras acciones, pensamientos, experiencias, conocimientos, etc. están culturalmente mediados. Nuestros comportamientos, nuestra búsqueda de conocimiento, nuestras herramientas psicológicas, el desarrollo en general está mediado por la cultura.



## EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE DAVID AUSUBEL

Es bien sabido que la enseñanza tradicional se ha caracterizado por el énfasis en el aprendizaje memorístico o repetitivo, sin tener en cuenta si la nueva información guarda alguna relación con los conocimientos que posee el alumno; ni tampoco se tiene en cuenta el interés del alumno o el entorno que lo rodea.

David Ausubel considera que el aprendizaje es significativo sólo cuando el estudiante es capaz de relacionar sus conocimientos previos con la nueva información que se le presenta, es decir, sus experiencias constituyen un factor de importancia.

Reiteradamente nuestros docentes se encuentran con un cuadro desalentador cuando van a presentar un nuevo conocimiento, para el cual se requiere por parte de los estudiantes de ciertos prerrequisitos: conceptos y procesos matemáticos previos. Sin embargo estos prerrequisitos sólo los poseen unos cuantos.

Esto sucede porque el aprendizaje anterior no fue significativo, es decir el estudiante no le dio la importancia necesaria para incorporarlo a su estructura cognitiva, no era de su interés, sólo lo aprendió para el momento, para no desaprobar. Sin embargo, los docentes siempre identificarán algunas nociones que los estudiantes poseen relacionadas con el nuevo contenido, se necesita ser creativos.

Veamos dos formas, entre otras, de presentar el concepto algebraico de: "TÉRMINOS SEMEJANTES"

| ENFOQUE A | ENFOQUE B |
|---|---|
| **Profesor :** Ahora vamos a estudiar lo que son los términos semejantes. Anoten.<br>**Profesor :** Términos semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal<br>**Alumno :** ¿Cómo?, ¿no entiendo?<br>**Profesor :** Por ejemplo<br>$7x^3y^5$; $-12x^3y^5$ son semejantes<br>**Alumno :** ¿Y los coeficientes?<br>**Profesor :** Pueden ser diferentes<br>**Alumno :** Por favor más ejemplos profesor.<br>**Profesor :** $4a^2bc^6$, $-9a^2bc^6$ y $12a^2bc^6$<br>**Profesor :** ¿Entendieron? Bien. | **Profesor:** ¿Qué entienden por términos **s**emejantes?...¡Semejante es una palabra conocida por Uds.!<br>**Alumno :** Los que se parecen<br>**Profesor :** A ver, tengo cinco naranjas(5n), ocho peras(8p) y siete naranjas(7n), ¿cuáles son semejantes?<br>**Alumno :** 5n y 7n<br>**Profesor :** Bien, ahora $2x^3$, $-5y^2z$, $6x^3$; 8y, ¿cuáles son semejantes?<br>**Alumno :** $2x^3$ y $6x^3$<br>**Profesor :** Entonces, ¿qué son términos semejantes?<br>**Alumno :** Los que tienen la misma parte literal<br>**Profesor :** A ver, escribe dos términos semejantes a $-8x^3y^5$ :____; ____. |

Debemos resaltar, de modo particular, que para la matemática este tipo de aprendizaje representa un modo eficaz de lograr que los conocimientos sean aprendidos significativamente en base a las experiencias del alumno, ello implica que antes de presentar un concepto matemático nuevo el docente debe explorar lo que el estudiante conoce sobre el tema, sólo así determinará si los conocimientos previos le permitirán construir con cierta facilidad los nuevos conocimientos e integrarlos a su estructura cognitiva.

Teniendo en cuenta los aportes de Piaget, Vigotsky y Ausubel entre otros a la pedagogía actual, y haciendo la salvedad de que ninguno por separado propone de manera integral el marco conceptual idóneo para la labor docente, podemos proponer las siguientes sugerencias:

- El desarrollo y aprendizaje humano es, básicamente, el resultado de un proceso valitivo de construcción y no de una asimilación mecánica y pasiva causada por estímulos preestablecidos.
- Reflexionar y decidir sobre qué conocimientos reconstruir y en qué momento hacerlo es una acción permanente en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Aquí los estadíos de J. Piaget son un referente que debemos tener en cuenta.
- Una persona no siempre tiene un nivel intelectual homogéneo para todos y cada uno de sus aprendizajes. Lo más aceptable, actualmente, es pensar que según el contenido y la persona, es posible ubicar el desarrollo de sus diferentes capacidades en diferentes niveles.
- El aprendizaje en interacción con los demás es más enriquecedor para la persona.
- Todo estudiante tiene saberes previos, quizá no siempre correctos, pero ya tiene un conocimiento básico. Estos saberes previos serán sus herramientas para asimilar la nueva información.
- El docente debe conectar didácticamente el nuevo conocimiento con los saberes previos que posee el estudiante y con su utilidad para la vida, para que el aprendizaje resulte significativo.
- Usar los medios adecuados para lograr un compromiso del estudiante con su aprendizaje. Es decir él debe tener una actitud favorable para aprender, ha de estar motivado para relacionar lo que aprende con lo que sabe.
- Debemos promover el aprendizaje significativo, es decir, la nueva información se debe relacionar de manera sustantiva y no aleatoria con lo que él ya sabe, incluyendo sus posibles aplicaciones en la vida, sólo así será incorporado a su estructura cognitiva. En caso contrario, estaremos afirmando un aprendizaje memorístico acumulativo, sin relación con los saberes previos.

- El aprendizaje significativo consiste en romper el equilibrio inicial de sus esquemas respecto al nuevo contenido de aprendizaje. Se debe mediar para que pueda superar el estado de desequilibrio, esto sucede reestructurando su esquema inicial hasta que vuelva a reequilibrarse.

- La Zona de Desarrollo Próximo es la posibilidad de aprender con el apoyo de los demás, y de no limitar las posibilidades individuales de los estudiantes.

- Ya que el aprendizaje o construcción del conocimiento se da en la interacción social, la enseñanza - en la medida de lo posible - debe situarse en un contexto real y en situaciones significativas.

- El aprendizaje es un proceso activo en el que se experimenta, se cometen errores y se buscan soluciones.

- El estudiante debe ser protagonista de su propio proceso de aprendizaje, de su propia capacidad de imaginar.

Además, podemos precisar que nuestra labor pedagógica es lograr que los estudiantes sean capaces de aprender a aprender, de promover aprendizajes significativos en forma autónoma en una amplia gama de situaciones y circunstancias. Para ello, debemos presentarles una gran variedad de estrategias que le resulten útiles para hacer frente a diversas situaciones, pero más importante aún es enseñarles a que elaboren sus propias estrategias, en función de sus potencialidades, sus estilos de aprendizaje y sus formas de actuar.

## 1.2 LAS NEUROCIENCIAS

Con los conocimientos anteriores no se ha podido entender a plenitud el complejo proceso del aprendizaje debido, precisamente, a que es un fenómeno no sólo biológico y psicológico, sino también social y cultural, en el cual intervienen una variedad de factores.

Actualmente es una necesidad en la formación de los docentes el estudio sobre el complejo proceso del aprendizaje, pues sólo entendiendo este proceso se podrán diseñar las estrategias y materiales adecuados que se requieren en la enseñanza actual.

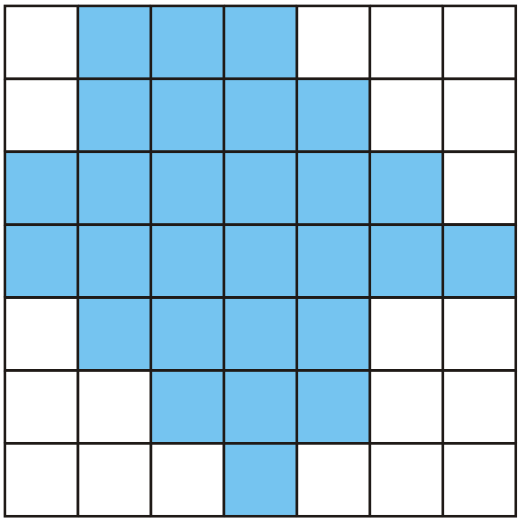
La Psicología, Filosofía, Sociología, Biología y otras ciencias permanentemente desarrollan hipótesis, instrumentos que son el marco sobre el cual el docente despliega su acción mediadora.

Últimamente la Neurociencia nos provee de resultados, conclusiones, sugerencias, que a pesar de no ser un trabajo totalmente concluido - como no lo es en ninguna ciencia - son de gran utilidad para la mejora de la labor docente.

**Sperry**[2] y colaboradores confirmaron la especialización de los hemisferios cerebrales. Sus investigaciones permitieron establecer que la capacidad de hablar, escribir, leer y razonar con números, es fundamentalmente ejecutada por el hemisferio izquierdo; mientras que la habilidad para percibir y orientarse en el espacio, trabajar con tareas geométricas, elaborar mapas conceptuales y rotar mentalmente formas o figuras, son ejecutadas predominantemente por el hemisferio derecho.

Uno de los resultados que los educadores debemos tener en cuenta, de los reportes de investigación en el área de la Neurociencia, es que la efectividad del aprendizaje mejora si el contenido se presenta no sólo en la modalidad verbal tradicional (estímulo del **hemisferio izquierd**o) sino también en la modalidad no verbal: gráfica, pictórica u otra, lo cual contribuirá a estimular el **hemisferio derecho**. Lo anterior lleva a replantear en las sesiones de aprendizaje, estrategias que estimulen ambos hemisferios, combinando las técnicas secuenciales, lineales, con otros enfoques que permitan a los alumnos hacer uso del pensamiento visual y espacial.

Por ejemplo, a partir de la figura sombreada y sabiendo que cada



casillero es un cuadrado de 1cm de lado, se pide:

- Hallar el perímetro y el área de la región sombreada.
- Dividir la figura sombreada en dos partes congruentes, es decir de medidas y formas iguales.

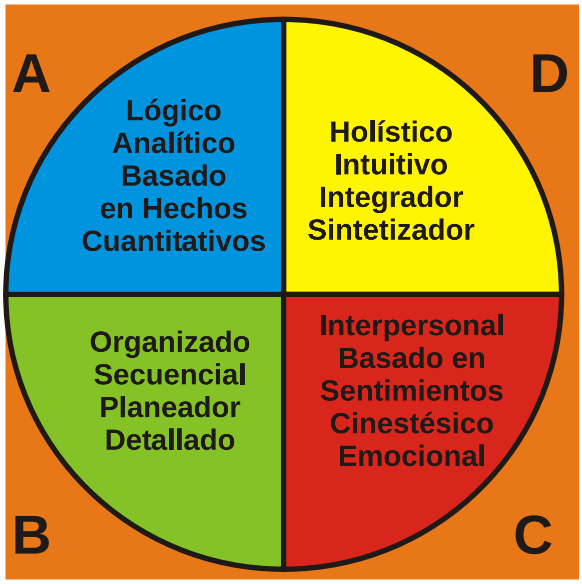
Se observa que apelamos a la capacidad visual y numérica del estudiante, es decir consideramos ambos hemisferios cerebrales.

2 Roger Sperry ganó el Premio Nobel de Medicina en 1981 por su trabajo sobre el Hemisferio Derecho del cerebro.

***MacLean***[3] presenta un modelo del cerebro formado por tres elementos interrelacionados, estos son: el cerebro reptiliano, el sistema límbico y la neocorteza; ellos controlan la vida instintiva, emocional e intelectual, respectivamente.

La investigación, mediante este modelo, refuerza la idea de que los sentimientos y el aprendizaje son inseparables. Esto lo postuló Lev Vigotsky pero desde una perspectiva psicológica. Entonces, los docentes deben ser más sensibles a las barreras emocionales del aula de clase que influyen en la calidad del aprendizaje, debiendo propiciarse un clima agradable y emocionalmente cálido para una efectiva interacción estudiante-docente, y estudiante-estudiante. Ello contribuye a que se establezca un nexo afectuoso con el conocimiento.

***Herrmann***[4], por su parte, ha propuesto el modelo del cerebro total, formado por cuatro cuadrantes, que determinan estilos diferentes de procesamiento de información en los individuos, aun cuando se admite que el cerebro funciona como una totalidad integrada.




Herrmann plantea la arquitectura de su modelo de cerebro como una coalición de cuatro centros cerebrales que operan en forma integrada y situacional. A diferencia de cómo históricamente se observaba al cerebro, desde la parte superior, Herrmann mira al mismo desde atrás, en corte transversal, y así aparecen los cuatro núcleos especializados, dos corticales y dos límbicos.

Cada núcleo está asociado con un estilo particular de percibir al mundo, pensar, crear y aprender. La integración que se logre de la coalición de los diferentes centros y el proceso interactivo de información cruzada entre ellos, determina el potencial individual de operación cerebral.
Por otro lado Caine y Caine[5] y sus colaboradores llegaron a establecer algunos *principios de aprendizaje del cerebro*, que no tienen un carácter absoluto o culminado, pero representan un avance significativo que los docentes debemos tener en cuenta, los cuales pasamos a mencionar:

**Principio 1. El cerebro es un complejo sistema adaptativo**; tal vez una de las características más poderosas del cerebro es su capacidad para funcionar en muchos niveles y de muchas maneras simultáneamente. Pensamientos, emociones, imaginación, predisposiciones y fisiología operan concurrente e interactivamente en la medida en que todo el sistema interactúa e intercambia información con su entorno.

[3] Paul MacLean, exdirector del Laboratorio del Comportamiento y la Evolución del Cerebro del Instituto Nacional de Salud Mental de Betheda.
[4] Herrmann, N. 1989. The creative brain. Lake Lure. North Caroline: The Ned Herrmann Group.
[5] Caine, R.N. y G. Caine (1997). Education on the Edge of Possibility. Alexandria, VA: ASCD.

**Principio 2. El cerebro es un cerebro social**; a lo largo de nuestra vida, nuestros cerebros cambian en respuesta a su compromiso con los demás, de tal modo que los individuos pueden ser siempre vistos como partes integrales de sistemas sociales más grandes. En realidad, parte de nuestra identidad depende del establecimiento de una comunidad y de encontrar las maneras para pertenecer a ella. Por lo tanto, el aprendizaje está profundamente influido por la naturaleza de las relaciones sociales.

**Principio 3. Cada cerebro simultáneamente percibe y crea partes y todos**; si bien la distinción entre "cerebro izquierdo y cerebro derecho" es real, no expresa todo lo que es el cerebro. En una persona sana, ambos hemisferios interactúan en cada actividad. La doctrina del "cerebro dual" es útil porque nos recuerda que el cerebro reduce la información en partes y percibe la totalidad al mismo tiempo. La buena capacitación y educación reconocen esto, por ejemplo, introduciendo proyectos e ideas naturalmente "globales" desde un primer momento.

**Principio 4. El aprendizaje implica tanto una atención focalizada como una percepción periférica**; el cerebro absorbe información de lo que está directamente consciente, y también de lo que está más allá del foco inmediato de atención. De hecho, responde a un contexto sensorial más grande que aquel en que ocurre la enseñanza y la comunicación. "Las señales periféricas" son extremadamente potentes. Incluso las señales inconscientes que revelan nuestras actitudes y creencias interiores tienen un poderoso efecto en los estudiantes. Los educadores, por lo tanto, pueden y deben prestar una gran atención a todas las facetas del entorno educacional.

**Principio 5. El aprendizaje siempre implica procesos conscientes e inconscientes**; si bien un aspecto de la conciencia es consciente, mucho de nuestro aprendizaje es inconsciente. Puede, por tanto, ocurrir que parte de la comprensión no se dé durante la clase, sino horas, semanas o meses más tarde. Los educadores deben organizar lo que hacen para facilitar ese subsiguiente procesamiento inconsciente de la experiencia por parte de los estudiantes. Para ello hay que diseñar apropiadamente el contexto, incorporando la reflexión y actividades metacognitivas, y proporcionando los medios para ayudar a los estudiantes a explayar creativamente ideas, habilidades y experiencias.

**Principio 6. Tenemos al menos dos maneras de organizar la memoria**; tenemos un conjunto de sistemas para recordar información relativamente no relacionada (sistemas taxonómicos). Esos sistemas son motivados por premios y castigos, y también tenemos una memoria espacial/autobiográfica que no necesita ensayo y permite por "momentos" el recuerdo de experiencias. Este es el sistema que registra, por ejemplo, los detalles de la fiesta de cumpleaños. Está siempre comprometido, es inagotable y lo motiva la novedad. Así, pues, estamos biológicamente implementados con la capacidad de registrar experiencias completas. El aprendizaje significativo ocurre a través de una combinación de ambos enfoques de memoria.

**Principio 7. El aprendizaje es un proceso de desarrollo**; dicho proceso ocurre de muchas maneras. En parte, el cerebro es moldeado por las experiencias de la persona. En parte, hay predeterminadas secuencias de desarrollo en el niño, incluyendo las ventanas de oportunidad (oportunidad de aprender un concepto a una edad determinada) para asentar la estructura básica necesaria para un posterior aprendizaje. Tales oportunidades explican por qué las lenguas nuevas, como también las artes, deben ser introducidas a los niños muy temprano en la vida. Y, finalmente, en muchos aspectos, no hay límite para el crecimiento ni para las capacidades de los seres humanos de aprender más. Las neuronas continúan siendo capaces de hacer y reforzar nuevas conexiones a lo largo de toda la vida.

**Principio 8. El aprendizaje complejo se incrementa por el desafío y se inhibe por la amenaza**; el cerebro aprende de manera óptima, hace el máximo de conexiones cuando es desafiado apropiadamente en un entorno que estimula el asumir riesgos. Sin embargo, se contrae ante una amenaza percibida. Se hace entonces menos flexible y revierte a actitudes y procedimientos primitivos. Es por eso que debemos crear y mantener una atmósfera de alerta relajada, lo que implica *baja amenaza y alto desafío*. La baja amenaza no es, sin embargo, sinónimo de simplemente "sentirse bien". El elemento esencial de una amenaza percibida es un sentimiento de desamparo o fatiga. *La tensión y ansiedad originales son inevitables y deben esperarse en un aprendizaje genuino*. Esto se debe a que el genuino aprendizaje implica cambios que llevan a una reorganización del ser.

**Principio 9. Cada cerebro está organizado de manera única**; todos tenemos el mismo conjunto de sistemas y, sin embargo, todos somos diferentes. Algunas de estas diferencias son una consecuencia de nuestra herencia genética. Otras, son consecuencia de experiencias diferentes y entornos diferentes. Las diferencias se expresan en términos de estilos de aprendizaje, diferentes talentos e inteligencias, etc. Un importante corolario es apreciar que los alumnos son diferentes y que necesitan elegir, mientras están expuestos a una variedad de estímulos o informaciones. Las inteligencias múltiples y vastos rangos de diversidad son, por lo tanto, características de lo que significa ser humano.

Por su parte ***Eric Jensen***[6] al referirse a la influencia del entorno, plantea que para enriquecer el cerebro se debe entender el aprendizaje como un reto, es decir novedoso y desafiante, y a su vez se requiere de una retroalimentación interactiva o feedback.

Una de las formas de enriquecer el entorno es mediante la resolución de problemas, lo cual favorece la creación de nuevas conexiones dendríticas. Los hemisferios cerebrales están preparados para abstracciones complejas entre los 11 y 13 años. El desarrollo neuronal no se produce por la solución en sí, sino por el proceso que involucra la resolución de problemas interesantes.

[6] Autor del libro “Cerebro y aprendizaje”; Capítulo 4: Entornos enriquecidos y el cerebro

E. Jensen sugiere variar las estrategias de enseñanza frecuentemente, por ejemplo el uso de rompecabezas, juego de palabras, acertijos, crucigramas matemáticos son excelentes para el cerebro; también practicar juegos lógicos de computadora, trabajos grupales, realizar excursiones, elaborar revistas, realizar proyectos con estudiantes de diferentes edades. La figura adjunta ilustra esta propuesta:


De lo expuesto, se derivan dos conclusiones:

1. La Neurociencia constituye un nuevo paradigma que permite analizar y explicar el comportamiento humano inteligente, desde tres perspectivas teóricas diferentes, pero que, al mismo tiempo, son complementarias.

   La característica más destacada en cada uno de los modelos presentados es la holicidad. Esta condición se expresa en el mecanismo de funcionamiento del cerebro en el cual se relacionan las partes con el todo; es decir, existen hemisferios, áreas o cuadrantes que cumplen funciones específicas, que caracterizan el comportamiento humano, pero este, a su vez, requiere de todo el cerebro, para operar de manera óptima.

2. Los hallazgos de la Neurociencia tienen implicaciones para la teoría y la práctica educativa. En el primer caso, al ofrecer explicaciones novedosas que permiten profundizar en las condiciones bajo las cuales el *aprendizaje* puede ser más *efectivo*. Desde el punto de vista de la práctica educativa, porque permite fundamentar el diseño de estrategias metodológicas no convencionales dirigidas a atender las diferentes dimensiones así como el desarrollo de la creatividad.

## 1.3 LAS INTELIGENCIAS MÚLTIPLES

Durante muchos años se pensó que una persona era inteligente si tenía habilidades numéricas y verbales. Lo que no significa necesariamente ser inteligente en las áreas de Matemática y Comunicación, respectivamente; pues, por ejemplo la matemática en ese entonces se presentaba como un conjunto de algoritmos o de axiomas y deducciones adquiridas en forma memorística. Actualmente sabemos que las personas exitosas en muchos casos no necesariamente han destacado en estas áreas (Matemática y Comunicación), pero sí saben, por ejemplo, controlar sus emociones, son asertivos; otros usan maravillosamente su cuerpo en la danza o el deporte; otros destacan en la pintura; en su capacidad para dirigir personas, en su buena orientación espacial, etc. Es decir estamos frente a una diversidad de inteligencias o una inteligencia que se expresa de diversas formas y además con diferente intensidad, dependiendo del individuo.

Estos hechos objetivos llevaron a ***Howard Gardner*** [7], en 1984, a plantear su propuesta de las inteligencias múltiples, que brevemente describiremos a continuación:

**Inteligencia lingüística:** es la capacidad involucrada en la lectura y escritura, así como en el escuchar y hablar. Comprende la sensibilidad para los sonidos y las palabras con sus matices de significado, su ritmo y sus pausas. Está relacionada con el potencial para estimular y persuadir por medio de la palabra. Corresponde a la inteligencia que puede tener un filósofo, un escritor, un poeta o un orador.

**Inteligencia lógico-matemática:** es la capacidad relacionada con el razonamiento abstracto, la computación numérica, la derivación de evidencias y la resolución de problemas lógicos. Corresponde a la inteligencia que podemos encontrar en un matemático, un físico, un ingeniero o un economista.

**Inteligencia espacial:** es la capacidad utilizada para enfrentar problemas de desplazamiento y orientación en el espacio, reconocer situaciones, escenarios o rostros. Permite crear modelos del entorno visual espacial y efectuar transformaciones a partir de él, aun en ausencia de los estímulos concretos. Podemos encontrar esta inteligencia en un navegante, un arquitecto, un piloto o un escultor.

**Inteligencia corporal y cinestésica:** es la capacidad para utilizar el propio cuerpo, ya sea total o parcialmente, en la solución de problemas o en la interpretación. Implica controlar los movimientos corporales, manipular objetos y lograr efectos en el ambiente. Comprende la inteligencia propia de un artesano, un atleta, un mimo o un cirujano.

**Inteligencia musical:** es la capacidad para producir y apreciar el tono, ritmo y timbre de la música. Se expresa en el canto, la ejecución de un instrumento, la composición, la dirección orquestal o la apreciación musical. Por cierto, podemos pensar en compositores, intérpretes o directores.

[7] ***Howard Gardner***, psicólogo de la Universidad de Harvard. En la actualidad tiene gran reconocimiento académico por su obra dedicada a la inteligencia y la creatividad humana. Sus contribuciones conceptuales y teóricas, con sus derivaciones en el terreno de la práctica, lo convierten en un autor de gran impacto en el mundo de la educación.

**Inteligencia interpersonal:** es la capacidad para entender a los demás y actuar en situaciones sociales, para percibir y discriminar emociones, motivaciones o intenciones. Está estrechamente asociada a los fenómenos interpersonales como la organización y el liderazgo. Esta inteligencia puede estar representada en un político, un profesor, un líder religioso o un vendedor.

**Inteligencia intrapersonal:** es la capacidad para comprenderse a sí mismo, reconocer los estados de ánimo personales, las propias emociones, tener claridad sobre las razones que llevan a reaccionar de un modo u otro, y comportarse de una manera que resulte adecuada a las necesidades, metas y habilidades personales. Permite el acceso al mundo interior para luego poder aprovechar y a la vez orientar la experiencia. En general, esta inteligencia puede estar bien representada en cualquier persona adulta y madura.

A estas dos últimas inteligencias se las conoce también como "inteligencia emocional".

La mayoría de las personas pueden desarrollar todas estas inteligencias hasta cierto nivel. Que las inteligencias se desarrollen o no depende, según Gardner, de tres factores principales:

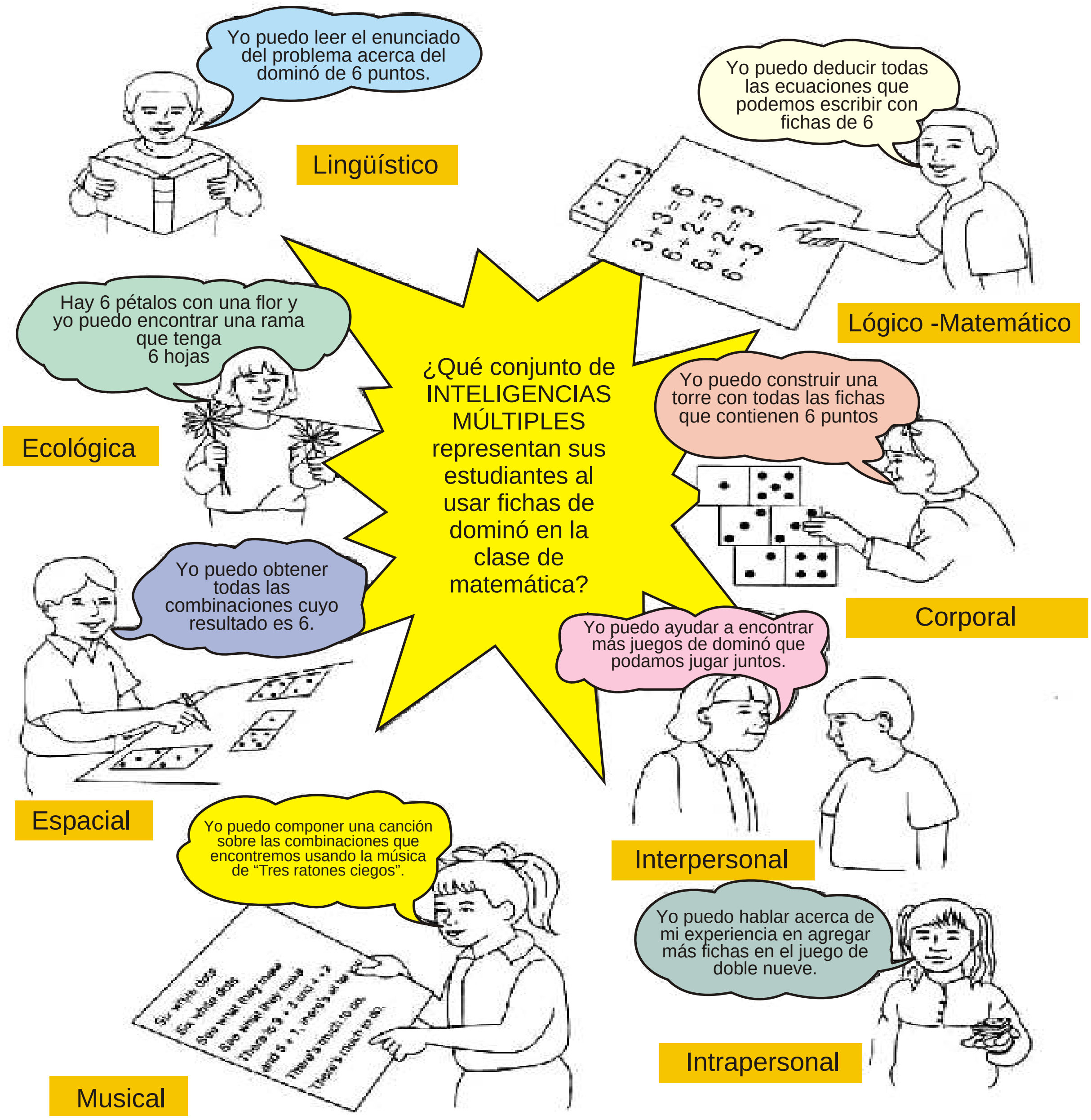
- **Dotación biológica**; incluyendo los factores genéticos o hereditarios y los daños o heridas que el cerebro haya podido recibir antes, durante o después del nacimiento.
- **Historia de vida personal**; incluyendo las experiencias con los padres, docentes, pares, amigos u otras personas que ayudan a desarrollar las inteligencias o las mantienen en un nivel de desarrollo incipiente.
- **Antecedente cultural e histórico**; incluyendo la época y el lugar donde uno nació y se crió, y la naturaleza y estado de los desarrollos culturales o históricos en diferentes dominios.

Existen muchas formas de ser inteligente dentro de cada categoría. Una persona puede tener limitaciones en una cancha de fútbol y sin embargo poseer una habilidad asombrosa para tejer una chompa, lo que demostraría un gran desarrollo de la *inteligencia corporal y cinestésica*. Gardner reconoce que su modelo es tentativo. Actualmente se reconoce la existencia de otras inteligencias, como la ecológica ó ambiental la inteligencia moral o la pictórica.

De lo expuesto, se debe tener presente que:

- Todos poseemos estas inteligencias, en mayor o menor medida.
- Ninguna es superior a otra, todas son importantes. Triunfar en los negocios, o en los deportes, requiere ser inteligente, pero en cada campo utilizamos un tipo de inteligencia distinto que no es mejor ni peor. Albert Einstein no es más inteligente que Michael Jordan, pues sus inteligencias pertenecen a campos diferentes.
- Hay otras formas de inteligencias que no conocemos.
- Ninguna inteligencia actúa en forma aislada.
- Hay muchas maneras de ser inteligentes dentro de cada categoría.
- No se puede trazar fronteras rígidas entre ellas, como conjuntos disjuntos.
- No debemos desarrollar en forma exclusiva sólo una de ellas.
- Debemos propiciar las manifestaciones de todas estas formas de inteligencia en nuestros estudiantes.

Por otro lado, debemos conocer y seguir investigando sobre la inteligencia *Lógico-Matemática*, pero a su vez cómo ésta se relaciona y actúa con las demás, pues no se trata de desarrollar en forma exclusiva una sola forma de inteligencia, sino hacerlo de manera integral a través de la matemática. Desarrollar una sola inteligencia seria algo así como desarollar un solo músculo del cuerpo, imagínese cómo se vería la persona. En la figura adjunta, se ilustra cómo a través de una actividad se desarrollan las distintas inteligencias, según el estilo de aprendizaje de los estudiantes:



## 1.4 DESARROLLO DE CAPACIDADES Y ACTITUDES

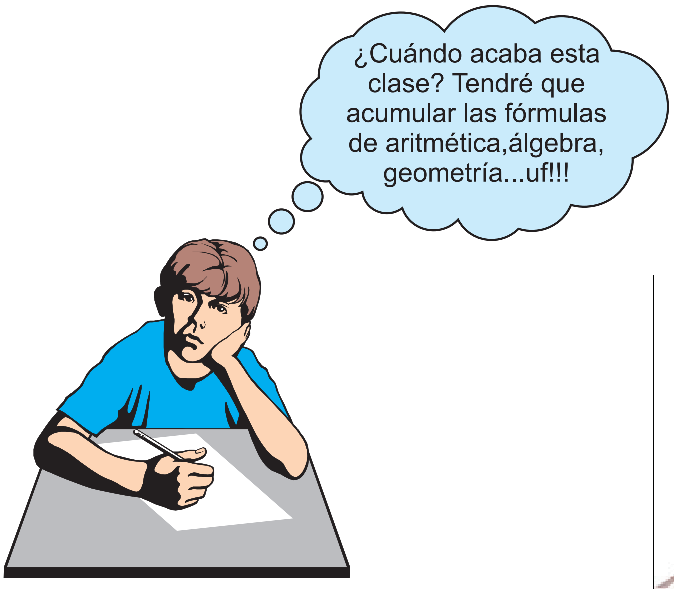
### 1.4.1 CAPACIDADES FUNDAMENTALES

Todas las personas desde que nacemos venimos con un bagaje de habilidades innatas y personales; es decir, cada uno es diferente y posee diversas habilidades, cada una de ellas en mayor o menor grado. Estamos hablando de las capacidades de la persona, y estas van a evolucionar o se van a estancar en el transcurso de su vida, dependiendo de su interacción con el entorno socio-cultural.

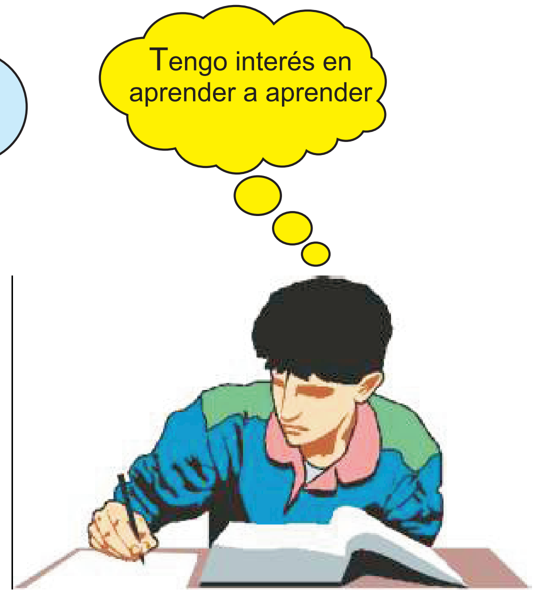
La sociedad actual está caracterizada por la abundante información. El desarrollo de la tecnología y las comunicaciones, demanda de personas que posean capacidades y habilidades para actuar en estas condiciones, adaptarse y tener éxito. Ya no será necesario esforzarse en acumular información, como se entendía la enseñanza tradicional, sino en procesar esta información de forma crítica, ser creativos, tomar decisiones frente a situaciones que se presenten y resolver problemas.

A la Institución Educativa le corresponde facilitar el desarrollo de estas capacidades, respetando los estilos de aprendizaje y posibilidades de cada estudiante. No se trata de que todos alcancen por igual el nivel esperado de los aprendizajes, sino de permitirles desarrollar sus capacidades, según sus características personales. Así mismo, respetar sus elecciones e intereses y mediar para que tengan las condiciones de perfeccionarse.

ENFOQUE POR CONTENIDOS




ENFOQUE POR CAPACIDADES




Se trata de desarrollar en nuestros alumnos: el pensamiento creativo, el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la toma de decisiones. Al respecto, la Matemática constituye una herramienta muy poderosa, por la gama de recursos y los procesos mentales que implica el aprendizaje de esta ciencia.

### 1.4.1.1 PENSAMIENTO CREATIVO.

Según el **D.C.N.**, es la capacidad de proponer formas originales de actuación, superando las rutas conocidas o los cánones preestablecidos. En la Guía para el Desarrollo de Capacidades (GDC-2004) se define como el procedimiento relativamente autónomo de una persona que actúa en y sobre su medio ambiente, y que desemboca y concluye en un resultado o producto personalizado.

Se entiende que este tipo de pensamiento es personal, para el cual se requiere transitar por otros caminos no estandarizados, no se ajusta a un esquema rígido de acción. En la GDC-2004 se describen las características de esta capacidad:

- La divergencia.
- La fluidez.
- Flexibilidad.
- La originalidad.
- La profundidad de pensamiento.

### 1.4.1.2 PENSAMIENTO CRÍTICO.

Según el **D.C.N.**, es la capacidad para actuar y conducirse en forma reflexiva, elaborando conclusiones propias y en forma argumentativa. Según la GDC-2004, este pensamiento puede realizarse de diversas formas, tales como:

- Confirmación de conclusiones con hechos.
- Identificación de tendencias, indicios, estereotipos y prototipos.
- Identificación de supuestos implícitos.
- Reconocimiento sobre generalizaciones y subgeneralizaciones.
- Identificación de información relevante e irrelevante.

Lo anterior implica desarrollar el análisis de la información recibida para formar su propio concepto. Se considera que las personas que han desarrollado este tipo de pensamiento tienen las siguientes características: mente abierta, coraje intelectual, agudeza perceptiva, autorregulación, cuestionamiento permanente, control emotivo y valoración justa.

Se trata entonces de formar personas reflexivas, capaces de procesar y cuestionar constructivamente la ingente información a la que es sometida para, de esta manera, constituirse en un consumidor inteligente de sendas informaciones.

Los docentes si no poseemos estas cualidades, podemos aprenderlas y ello se logra con la práctica, con la experiencia; nuestras actuaciones frente a diversas situaciones deben ser evaluadas por nosotros mismos para ir superando nuestras deficiencias.

A continuación analizaremos dos nociones, muy frecuentes en nuestra labor docente, que nos permiten ejemplificar la aplicación de nuestro pensamiento crítico y creativo.

#### a) Sucesiones numéricas

Este concepto es muy conveniente para el desarrollo de capacidades específicas como por ejemplo buscar patrones, establecer relaciones, etc. Y lo más importante permite reforzar en los estudiantes dos ideas: por un lado que para resolver un problema se puede elegir más de un camino y llegar a la misma respuesta(1); y por otro lado, que se puede obtener dos o más respuestas (2) para resolver un problema. Veamos dichos aspectos.

(1)¿Cuál es el número que sigue en la sucesión: 3 ; 7 ; 15 ; 31 ; ?

**Estrategia A**

3 ; 7 ; 15 ; 31 ; **63**

4 8 16 **32**

**Estrategia B**

3 ; 7 ; 15 ; 31 ; 63

$2^2–1$ $2^3–1$ $2^4–1$ $2^5–1$ $2^6–1$

¡Hemos utilizado diferentes estrategias y obtenido la misma solución!

(2)¿Cuál es el número que sigue en la sucesión: 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; ?

Veamos un método que generalmente se enseña: reiterar diferencias hasta encontrar una regularidad:

Estrategia A

5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 88

3 5 8 13 21 33

2 3 5 8 12

1 2 3 4

Estrategia B

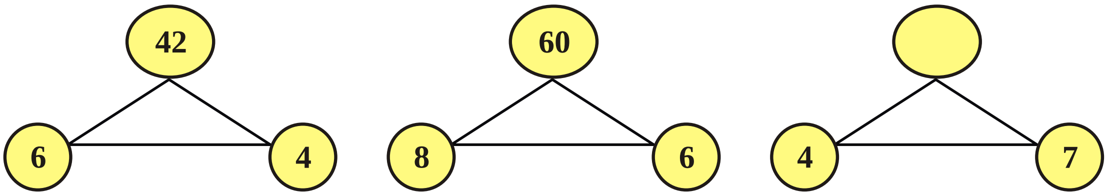
5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89

¿Qué decisión debe tomar el docente?, ¿cuál es la respuesta correcta? Es conveniente que situaciones como esta se den durante las sesiones de aprendizaje. Resulta oportuno que el mismo alumno exponga su estrategia o método de solución, que justifique su planteamiento. Debemos promover la creación de este tipo de situaciones, pues no sólo se desarrollan las habilidades cognitivas de los estudiantes, sino también se refuerza la perseverancia, confianza y autoestima de los alumnos.

## b) Analogías numéricas

Este tipo de secuencia numérica no tendría nada de novedoso, si nos quedamos en la mera transmisión de esquemas. Adquiere importancia si lo analizamos desde un punto de vista crítico y creativo. La utilidad de esta actividad es que nos permite desarrollar habilidades operativas: búsqueda de regularidades; identificar relaciones lógicas.

Ejemplo 1: nos piden completar el número que falta en la tercera figura:




RESOLUCIÓN

Estrategia A

6x3 + 4x6 = 42 8x3 + 6x6 = 60 4x3 + 7x6 = 54

Estrategia B

4 + 6 + 4x8 = 42   4 + 8 + 6x8 = 60   4 + 4 + 7x8 = 64

Estrategia C

6x5 + 4x4 - 4 = 42   8x5 + 6x4 - 4 = 60   4x5 + 7x4 - 4 = 44

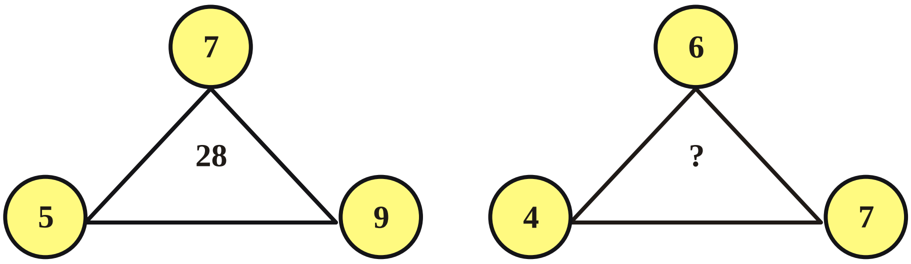
Estrategia D

6x2 + 4x7 - 2 = 42   8x2 + 6x7 - 2 = 60   4x2 + 7x7- 2 = 59

¿Cuál es la respuesta correcta?, ¿habrá otras respuestas?...Todas son válidas, pues verifican los dos primeros modelos. Es importante promover la búsqueda de más soluciones y mejor aún si los estudiantes proponen sus propios ejercicios. Lo que si debe evitarse es el empleo de ARTIFICIOS matemáticos.

Ejemplo 2: ¿Qué número debe escribirse en la segunda figura?

A. 23
B. 24
C. 18
D. 22
E. 23,5




Hay muchas opciones:

5 + 9 + 2(7) = 28 ⇒ 4 + 7 + 2(6) = 23

5 + 7 + 9 + 7 = 28 ⇒ 4 + 6 + 7 + 7 = 24

(9 - 5)x7 = 28 ⇒ (7 - 4)x6 = 18

5 + 7 + 2(9) - 2 = 28 ⇒ 4 + 6 + 2(7) - 2 = 22

7x3 + (9+5):2 = 28 ⇒ 6x3 + (7+4):2 = 23,5

Incluso podemos hallar una relación que genera infinitas soluciones enteras:

(5+9)k + 7(4- 2k) = 28 ⇒ (4+7)k + 6(4- 2k) = 24 - k

Así tenemos:

| **K** | -80 | --- | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | --- | 140 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Solución** | 104 | --- | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | --- | -116 |

Debemos tener mucho cuidado al proponer este tipo de ejercicios, pues existen “infinitas respuestas”, ya que sólo hay un modelo a tener en cuenta y no es suficiente para determinar una regularidad; se requeriría al menos de dos modelos. Entonces debemos ser críticos y presentar actividades matemáticamente justificables, las cuales van a ser de utilidad para el desarrollo del pensamiento.

### 1.4.1.3 SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Nos referimos a la capacidad para encontrar respuestas, alternativas pertinentes y oportunas ante situaciones difíciles o de conflicto. El desarrollo de esta capacidad implica el desarrollo de muchas otras subyacentes a ella, como son la comprensión lectora, el análisis e interpretación de textos, establecer relaciones entre los elementos involucrados en la situación problemática, la modelización, distinguir la información relevante de los datos no relevantes, elaborar estrategias, aplicar algoritmos y otras de capital importancia en el desarrollo del pensamiento.

La GDC-2004 considera como características del pensamiento resolutivo, las siguientes:

- Una multidireccionalidad de la transferencia.
- Se encuentra estrictamente contextualizado.
- Es de orientación divergente.
- Implica la capacidad metacognitiva.

Plasmaremos estas características en una situación problemática real:

**El alumbrado público.** El consejo municipal de un distrito ha decidido poner un reflector en un pequeño parque triangular de manera que este ilumine todo el parque; ¿dónde debería ubicarse el reflector?
Se parte de un problema del mundo real, está contextualizado. Hay que establecer la ubicación óptima para un reflector en un parque.

I. Se formula el problema en términos de conceptos matemáticos; el parque se puede representar como un triángulo, y la iluminación como un círculo con el reflector en el centro. Se nos plantea ubicar el centro de un círculo que circunscriba el triángulo.

II. Se resuelve el problema matemático desarrollando nuestro pensamiento, puede ser convergente o divergente; y basándose en el hecho de que el centro de un círculo que circunscribe un triángulo está en el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo, se construyen dos mediatrices a partir de dos de los lados del triángulo. El punto de intersección de las mediatrices es el centro del círculo.

III Podemos desarrollar nuestra capacidad **metacognitiva**: reflexionar sobre la solución, habrá otra forma de resolver la situación problemática. Reconocer, por ejemplo, que si una de las tres esquinas del parque fuera un ángulo obtuso, esta solución no funcionaría, pues el reflector quedaría en la parte exterior del parque.

IV. Reconocer que la localización y tamaño de los árboles del parque son otros factores que afectan la utilidad de la solución matemática. Cuál sería la estrategia si el parque tuviese otra forma geométrica, de trapecio por ejemplo, es decir**,** se trata de **transferir** a otros casos de la vida real.

### 1.4.1.4 TOMA DE DECISIONES.

Según el DCN es la capacidad para optar, entre varias alternativas, por la más coherente, conveniente y oportuna, discriminando los riesgos e implicancias de dicha elección. Siempre tomamos decisiones, dirán muchas personas, pero debemos aprender a ponderar los beneficios o riesgos de nuestra decisión, desarrollar nuestro juicio de valor respecto de la importancia de las variables involucradas en la situación. Así como también, asumir responsablemente la decisión adoptada.

La GDC-2004 considera como características del pensamiento ejecutivo o toma de decisiones, las siguientes:

- Es proactiva.
- Está orientada hacia el logro de objetivos o metas.
- Implica una complementariedad entre las capacidades analítico-sintética e hipotético-deductiva.
- La reversibilidad de las decisiones.

## 1.4.2 EL DOCENTE Y LAS ACTITUDES

Según el DCN, las actitudes son formas de actuar, demostraciones del sentir, del pensar. Responden a intereses y motivaciones. Las actitudes tienen elementos cognitivos, afectivos y conductuales, y se trabajan transversalmente en todas las áreas y espacios.

En un informe que publicó el LLECE[8], en el Primer Estudio Internacional Comparativo (UNESCO 2000), al referirse a los factores asociados a los resultados, determinó que el "Clima del Aula" es la variable individual que demostró el mayor efecto positivo sobre un mejor rendimiento en Lenguaje y en Matemática.

En más de una ocasión hemos tenido la oportunidad de escuchar la expresión: nadie da lo que no tiene. Es decir, si el profesor no refleja en su actuar que está convencido de lo que afirma, si no se le ve satisfecho con lo que hace, si no muestra naturalidad en su trato, si transmite que su trabajo se reduce a soportar las "deficiencias" e inadecuadas actitudes de sus alumnos, entonces esto constituye una desventaja para el liderazgo del profesor. Los alumnos al percibir este cuadro actuarán de manera displicente, sin motivación.

Por otro lado, hay que tener en cuenta que los alumnos tienen sus propios intereses, necesitan una persona con la que puedan compartir situaciones que los ayuden a sentirse mejor, que los orienten en su proyecto de vida.

En consecuencia el docente debe constituirse en un factor principal de motivación. El aprendizaje se inicia con la aceptación, por parte de los alumnos, de la propuesta y características personales del docente, de quien esperan un modelo a imitar, un líder a seguir.

El docente debe utilizar las estrategias y recursos metodológicos adecuados con los estudiantes para que desarrollen sus capacidades y actitudes en un contexto favorable. A su vez, el alumno debe estar convencido de que está en juego su formación profesional a futuro, lo que haga en el día a día tendrá sus implicancias más adelante.



[8] LLECE: Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad Educativa

CAPÍTULO 2

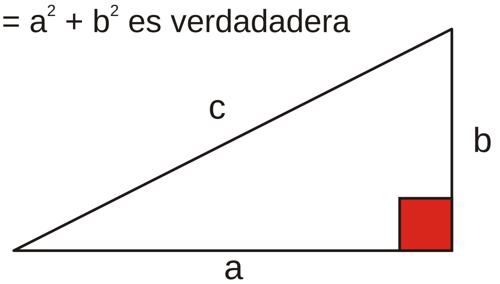
# PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Es un factor de interés pedagógico la concepción que tenga el docente de la matemática y de la enseñanza de esta ciencia, pues gran parte de su trabajo pedagógico estará influido por las ideas que posea al respecto. Es decir, si para el docente la matemática es una creación del hombre o existe fuera de la mente humana; si es exacta e infalible o si es falible, corregible; evolutiva o estática, como las demás ciencias o no. A continuación presentamos algunas de las concepciones que se tienen de la naturaleza de esta ciencia.

## 2.1 CONCEPCIONES SOBRE LA NATURALEZA DE LA MATEMÁTICA

### El Platonismo

Esta concepción considera la matemática como un sistema de verdades que ha existido desde siempre, inmutable e independiente del hombre. La tarea del matemático es descubrir esas verdades matemáticas. Por ejemplo, si construimos un triángulo rectángulo de catetos **a**, **b** y de hipotenusa **c**, entonces irremediablemente encontraremos que la relación $c^2 = a^2 + b^2$ es verdadadera




Para el platonismo las figuras geométricas, las operaciones y las relaciones aritméticas tienen propiedades que descubrimos sólo a costa de un gran esfuerzo; además, tienen otras propiedades que ni siquiera sospechamos, nos resultan de alguna manera misteriosas, ya que la matemática trasciende la mente humana, y existe fuera de ella independiente de nuestra actividad creadora.

### El Logicismo

Esta corriente de pensamiento considera que la matemática es una rama de la Lógica, con vida propia, pero con el mismo origen y método, y que es parte de una disciplina universal que regiría todas las formas de argumentación. Propone definir los conceptos matemáticos mediante términos lógicos, y reducir los teoremas de la matemática, mediante el empleo de deducciones lógicas.

Una afirmación típica de esta escuela es que "La Lógica matemática es una ciencia que es anterior a las demás, y que contiene las ideas y los principios en que se basan todas las ciencias", atribuida a Kurt Gödel[9] (1906) y que coincide, en gran medida, con el pensamiento aristotélico y con el de la escolástica medieval. Esta corriente plantea la existencia de dos Lógicas que se excluyen mutuamente: la deductiva y la inductiva. La deductiva busca la

[9] El resultado más revolucionario de la Lógica del siglo XX, por el que es especialmente famoso, es el teorema de incompletitud, publicado en 1931.

coherencia de las ideas entre sí; parte de premisas generales para llegar a conclusiones específicas. La inductiva procura la coherencia de las ideas con el mundo real; parte de observaciones específicas para llegar a conclusiones generales, siempre provisorias, las cuales va refinando a través de la exploración y de experiencias empíricas.

### El Formalismo

Esta corriente plantea que la Matemática es una creación de la mente humana y considera que consiste solamente en axiomas, definiciones y teoremas como expresiones formales que se ensamblan a partir de símbolos, que son manipulados o combinados de acuerdo con ciertas reglas o convenios preestablecidos. Para el formalista la Matemática comienza con la inscripción de símbolos en el papel; la verdad de la Matemática formalista radica en la mente humana pero no en las construcciones que ella realiza internamente, sino en la coherencia con las reglas del juego simbólico respectivo. En la actividad matemática, una vez fijados los términos iniciales y sus relaciones básicas, ya no se admite nada impreciso u oscuro; todo tiene que ser perfecto y bien definido. Las demostraciones tienen que ser rigurosas, basadas únicamente en las reglas del juego deductivo respectivo e independiente de las imágenes que asociemos con los términos y las relaciones.

### El Intuicionismo

Considera la matemática como el fruto de la elaboración que hace la mente a partir de lo que percibe a través de los sentidos y también como el estudio de las construcciones mentales cuyo origen o comienzo puede identificarse con la construcción de los números naturales.

El principio básico del Intuicionismo es que la Matemática se puede construir; se parte de lo intuitivamente dado, de lo finito, y que sólo existe lo que en ella haya sido construido mentalmente con ayuda de la intuición.

### El Constructivismo

Con las ideas constructivistas van muy bien algunos planteamientos de Georg Cantor (1845-1918): “La esencia de las matemáticas es su libertad. Libertad para construir, libertad para hacer hipótesis”. El constructivismo matemático es muy coherente con la pedagogía activa y se apoya en la psicología genética; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da; todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos. No basta con que el maestro haya hecho las construcciones mentales; cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie lo puede reemplazar.

El interés para el educador en conocer estos enfoques referidos a la Matemática tiene como objetivo invitar a la reflexión sobre nuestra práctica pedagógica y reconocer que muchos de nosotros actuamos en coherencia con algunos de estos, sin ser conscientes de ello. Y nos corresponde decidir si lo continuaremos haciendo, a la luz de la concepción actual que se tiene de esta ciencia.

## Visión actual del conocimiento matemático en la escuela

En los últimos años, los nuevos planteamientos de la filosofía de la Matemática, el desarrollo de la educación matemática y los estudios sobre psicología y sociología del conocimiento, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de la matemática escolar. Ha sido importante en este cambio de concepción, el reconocer que el conocimiento matemático, así como todas las formas de conocimiento, representan las experiencias de personas que interactúan en entornos, culturas y períodos históricos particulares y que, además, es en el sistema escolar donde tiene lugar gran parte de la formación matemática de las nuevas generaciones.

El conocimiento matemático en la escuela es considerado hoy como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y del joven. Como toda tarea social debe ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que permanentemente surgen y se entrecruzan en el mundo actual. Su valor principal está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas, a cuyo dominio hay que dedicar esfuerzo individual y colectivo. La tarea del educador matemático conlleva entonces una gran responsabilidad, puesto que la Matemática es una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales.

Estas reflexiones han dado lugar a que la comunidad de educadores matemáticos haya elaborado y plasmado una nueva visión de la Matemática escolar basada en:

- Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento.
- Valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de la Matemática.
- Considerar que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades del pensamiento.
- Reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar todo ciudadano.
- Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los diseños curriculares como en sus aplicaciones.
- Privilegiar como contexto del quehacer matemático escolar las situaciones problemáticas.

Estas concepciones influyeron en la educación Matemática, y marcaron la pauta en las últimas décadas sobre la prioridad o el énfasis que caracterizó a las corrientes pedagógicas de las matemáticas.

## 2.2 EVOLUCIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Es necesario que el docente conozca los rumbos que ha seguido la enseñanza de esta ciencia en el nivel escolar en las últimas décadas, pues el propósito en cada postura ha sido superar algunas deficiencias de las situaciones anteriores.

A finales de los años cincuenta e inicios de la década de los sesenta se da un gran giro en los currículos escolares, se implanta la **enseñanza de la matemática moderna.** Las bases para tal movimiento se originaron en el seminario de Royamount, celebrado en 1959 en donde los matemáticos franceses Jean Diudonné y G. Choquet proponen una enseñanza lógico-deductiva, sin dejar de lado el dominio de la enseñanza axiomática de la geometría de Euclides, cuyo desarrollo partiera de unos axiomas básicos; así mismo se tomó a los conjuntos como el concepto unificador de toda la Matemática, mediante las estructuras algebraicas y los conceptos de relación y función.

Indudablemente la Matemática se desarrolló como ciencia abstracta, la geometría se algebrizó, pero no ocurría lo mismo en la enseñanza, pues se privaba al estudiante de procesos y problemas geométricos que eran una fuente de desarrollo de habilidades; por otra parte, los objetos de la matemática moderna eran tan abstractos y áridos que no permitían un desarrollo natural del aprendizaje de los escolares. A ello se agregaba las dificultades que tenían los alumnos con las operaciones aritméticas básicas, por el poco énfasis que se les daba. A los alumnos no les quedaba otra posibilidad que aceptar estos axiomas y memorizar demostraciones que no entendían, no desarrollándose así un aprendizaje significativo.

Entonces surge la necesidad de enmendar esta situación, cayéndose en el error de **retornar a lo básico** (*back to basic*). Es decir se pensó que el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones básicas, es decir, las habilidades operativas de cálculo, era la Matemática que los estudiantes necesitaban. Y es bien conocido que estas habilidades son sólo una parte de la matemática. Sin embargo, a fines de la década de los ochenta se empezó a cuestionar este enfoque, pues no había consenso en el entendimiento de ¿qué es lo básico?, ¿qué Matemática correspondía enseñar?, motivando la aparición de respuestas al fracaso de los enfoques anteriores, como el libro de Morris Kline[10] : **“Por qué Juanito no sabe sumar”** y otros, que cuestionan a los que proponen el retorno a lo básico**.**

Entonces había que encontrar una respuesta a este problema por lo que en el III Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en Berkeley 1980, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de Estados Unidos edita la famosa Agenda in Action para toda la década de los ochenta: **“la resolución de problemas”** sería el norte de la enseñanza de la matemática. Esta propuesta, fue fundamentada por Freudenthal y Polya, entre otros. Ellos instan a los profesores a tomar conciencia de esta problemática de la educación Matemática y a su vez proponen ideas para desarrollar las habilidades intelectuales de los estudiantes, vía la resolución de problemas.

Al respecto el párrafo 243 del Informe Cockroft señala en su punto quinto que la enseñanza de la Matemática debe

[10]KLINE, Morris(1978) El fracaso de la matemática moderna. Madrid: Siglo XXI

considerar la «resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas a situaciones de la vida diaria.» Asimismo, el NCTM declaraba hace más de veinte años que «el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas.»

Se puede observar que hasta la actualidad esta postura es predominante en la enseñanza-aprendizaje, no sólo de la Matemática, sino en las demás disciplinas. Hacer matemática implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar las soluciones.

En la OTP-2005, teniendo en cuenta esta perspectiva pedagógica, se describen los propósitos fundamentales del aprendizaje de la Matemática en la Educación Secundaria:

- Aprender a valorar positivamente la Matemática.
- Adquirir confianza en las propias capacidades para hacer Matemática.
- Resolver problemas de la vida cotidiana.
- Aprender a razonar matemáticamente.

## 2.3 LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA

Es importante que el profesor tenga conciencia de que los conceptos matemáticos no siempre estuvieron tan claramente definidos para ser comprendidos por los alumnos. Estos han ido apareciendo y evolucionando, paulatinamente, en el tiempo.

Constituye una ventaja, no sólo como visión del desarrollo de la ciencia matemática sino como recurso didáctico, que el profesor conozca a grandes rasgos como han ido surgiendo estos conceptos, que a veces no entienden nuestros alumnos, pues para comprenderse y establecerse tuvo que pasar, muchas veces, cientos de años y además hay que observar que no son propiedad exclusiva de alguna cultura en particular, sino que todas las culturas han contribuido a su nacimiento, construcción y desarrollo y aún están en constante evolución. Revisemos brevemente algunos momentos de esta historia de la evolución matemática que nos permiten reflexionar sobre el valor de esta ciencia.

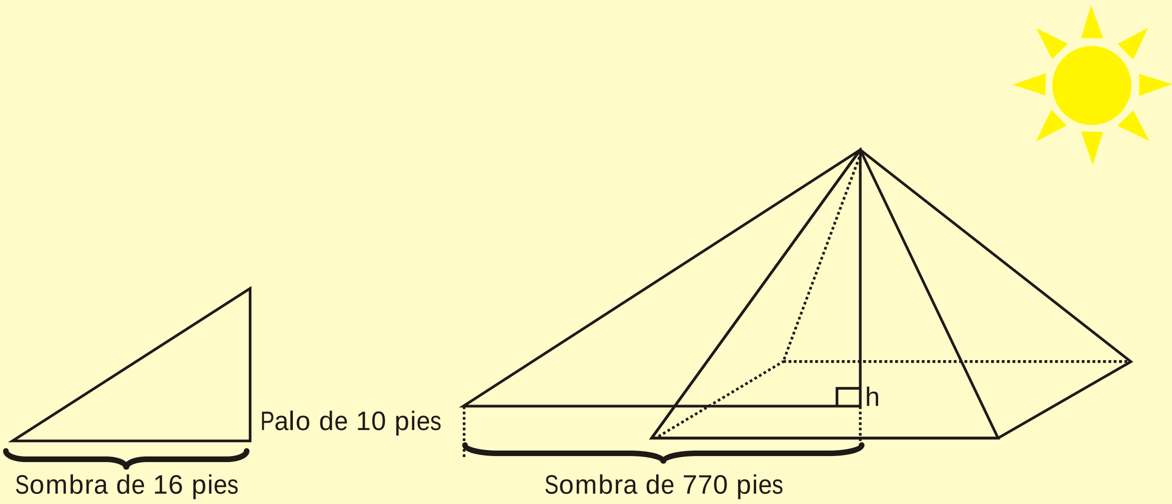
El hombre siempre percibió que el universo no era un montón de fenómenos sin ningún orden, al contrario se trataba de una diversidad con muchas regularidades por descubrir. Ello lo llevó al concepto de número, pero su tratamiento simbólico eficaz no fue obtenido hasta que en Mesopotamia fue ideado el sistema de numeración posicional, aunque utilizaban la base 60 sin incluir el cero. El sistema posicional que usamos actualmente fue inventado en la India y llevado a Europa por los árabes; así cada cifra del número 2118 tiene un doble significado: el propio de su símbolo y el de su posición dentro del número representado. La adopción de este sistema simplificó bastante las operaciones básicas, dificultad que tuvieron otras culturas.

La base sexagesimal usada por los mesopotamios persiste hasta la actualidad y ello lo vemos en nuestra medición del tiempo y de ángulos.

Por su parte los griegos que entre los siglos VII a. de C. y II a. de C. escribieron significativas páginas en la historia de la matemática, también concebían un universo ordenado, inteligible por la razón humana incluyendo la Matemática. Así, Pitágoras a lo largo de los cuatro siglos que median entre Thales de Mileto y él (VI a. de C.) y Euclides, Arquímedes y Apolonio (III a. de C.) afrontaron con éxito la tarea de dar consistencia racional rigurosa al pensamiento matemático, convirtiéndolo en modelo para todo el pensamiento científico posterior. El texto de los trece libros Elementos de Euclides constituye la obra científica más influyente en todo el transcurso de la historia de la ciencia. Estos conformaron el currículo de geometría en colegios y universidades durante los siguientes dos mil años. La geometría representa el intento de dar racionalidad matemática a las relaciones espaciales, y es en ella donde los griegos tuvieron ocasión de desarrollar el modelo de ciencia deductiva que se impuso posteriormente.

*Thales fue capaz de comprender y enseñar lo que había aprendido de su relación con los sacerdotes en Egipto. Se cuenta que en uno de sus viajes a Egipto determinó la altura de la pirámide de Keops. Para medir la altura de la gran pirámide colocó verticalmente un palo en la tierra cerca de esta y midió la longitud del palo y de su sombra. El triángulo rectángulo cuyos catetos son el palo y su sombra es semejante al triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura de la pirámide y la sombra de esta (en el mismo lugar y al mismo tiempo). Por tanto se puede plantear:*

$$\frac{770}{16} = \frac{h}{10}, \qquad \text{entonces } h = 481{,}25 \text{ pies}$$



El matemático que compiló un texto equivalente, Arithmetica, para la Teoría de Números, fue **Diofanto de Alejandría**, el último exponente de la tradición matemática griega. De él se desconoce su lugar y época de nacimiento.

El único dato acerca de la vida de Diofanto, que ha sobrevivido, aparece en forma de un acertijo que - se dice- estaba escrito en su epitafio:

"*Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. La infancia de Diofanto duró 1/6 de su vida, 1/12 en la adolescencia, cuando la barba cubrió su cara, después de 1/7 de su vida contrajo nupcias. Luego de cinco años de casado nació su primer hijo. El hijo vivió ½ de la vida de su padre, su padre buscó consuelo en los números pero no lo logró y murió cuatro años después que él.*"

Con esta información, ¿podemos hallar cuántos años vivió Diofanto?

La expansión del imperio árabe propició el enlace del occidente europeo con la cultura griega, hindú y persa. Fueron muchas las obras de los griegos que llegaron a Occidente por tan tortuosos vericuetos. En el siglo XVII, **Halley**, el famoso astrónomo contemporáneo de **Newton**, tuvo la energía suficiente para aprender árabe con el fin de traducir y editar en latín algunas de las obras de **Apolonio.**

A su vez, la actividad matemática del Oriente durante estos largos siglos se destacó por sus importantes logros en astronomía, en trigonometría plana y esférica. De igual modo los árabes fueron quienes en el siglo IX empiezan con las manipulaciones de símbolos, que condujeron a los inicios del álgebra, que llegó a un gran florecimiento en la Europa Occidental durante los siglos XV y XVI. La aparición del álgebra fue enormemente influyente en el desarrollo posterior de la Matemática. En sí misma, el álgebra representa un paso analítico muy importante en el dominio y uso racional del símbolo.

Por otra parte, Descartes con la geometría analítica fue capaz de resolver en forma sencilla y mecánica muchos problemas difíciles de la geometría clásica, al tiempo que estimuló y preparó el camino para la invención del cálculo infinitesimal. Pero estos desarrollos corresponden a la obra de los grandes matemáticos del siglo XVII.

La convergencia del talento matemático en el siglo XVII parece difícilmente repetible. Galileo, Kepler, Descartes, Fermat, Pascal, Newton, Leibniz, Huygens y otros más son los nombres más importantes que llenan el siglo con genialidades matemáticas. El camino ya estaba preparado, por una parte, por la existencia de instrumentos de medida, del tiempo y de otras magnitudes, cada vez más perfeccionados; y por otra, mediante el alumbramiento del incipiente concepto de función, ya de alguna forma presente en los conceptos de la geometría analítica. De esta conjunción de circunstancias nació el cálculo, la creación matemática más influyente en el desarrollo de las diferentes ciencias. Primero en forma incipiente, por obra de Newton y Leibniz, pero ya desde el principio quedando bien presente la incomparable potencia de este instrumento que ha revolucionado la ciencia y tecnología posteriores.

También en este período comienza, con Fermat y Pascal, el enfrentamiento propiamente matemático con otro de los aspectos de la complejidad del mundo a nuestro alrededor: la complejidad ocasionada por lo que llamamos el azar. La teoría de la probabilidad nace, como tantos otros aspectos de la matemática, en son de juego, y con el tiempo pasa a convertirse en uno de sus campos importantes y rigurosos, con consecuencias prácticas muy importantes.

En lo que respecta a otros aspectos más puramente matemáticos de este período se puede resaltar el trabajo realizado por Fermat en Teoría de Números, quien señaló resultados y problemas que dejaron trazadas las líneas de trabajo hasta el día de hoy.

Pierre Fermat a mediados del siglo XVII formuló su famosa conjetura en la que afirmaba que $a^n + b^n = c^n$, para $n > 2$, no tenía solución, en el conjunto de los números enteros.

Esta ha sido una de las grandes cuestiones sin resolver, casi un mito, que ha traído de cabeza a los mejores matemáticos de las tres últimas centurias. La historia es muy sugerente:

Resulta que Fermat escribió al margen de una obra de Diofanto, en la cual aparecía el Teorema de Pitágoras, que $a^n + b^n = c^n$ (para $n > 2$) no tenía solución y que él había encontrado una demostración maravillosa para este teorema, pero que no tenía suficiente espacio para desarrollarla, también lo manifestó en alguna de sus cartas a amigos matemáticos de la época, pero nunca se halló tal demostración...

Algunos matemáticos posteriores la demostraron para algunas potencias, como Euler que lo hizo para las potencias 3 y 4, etc.

Así se llegó al siglo XX, habiéndose hallado demostraciones para potencias inferiores a 100, pero nunca se llegó a una demostración general de esta conjetura. Incluso se comenzaba a dudar que fuese posible, de hecho se ofrecía un premio millonario a quién la hallase, aunque el plazo expiraba en el año 2 007.

Pero la noticia saltó a finales del milenio: "¡El Teorema de Fermat ha sido demostrado!"

A finales de 1994 se ratificó que la demostración del matemático británico Andrew Wiles era correcta y válida.

La característica más resaltante del siglo XVIII es la explotación de los nuevos métodos del análisis creados en el siglo anterior a fin de obtener un dominio matemático pleno de diversos campos de la física.

La sistematización del análisis fue obra de Euler: el matemático más prolífico de todos los tiempos, a la vez que el dotado de mayor talento expositor. Sus *Institutiones calculi diferentialis* y *las Institutiones calculi integralis* tuvieron tal influencia, que la dedicación al análisis de los matemáticos del siglo eclipsó la ocupación a cualquier otra rama de la Matemática.

La segunda mitad del siglo XVIII y comienzos del XIX constituyeron la época de mayor esplendor de la matemática francesa. Los matemáticos franceses de fines del siglo XVIII se ocuparon activamente en revitalizar la geometría con creaciones como la geometría diferencial, la descriptiva y la proyectiva, que constituyeron campos nuevos de gran influencia en el desarrollo geométrico posterior.

La principal característica de la actividad matemática del siglo XIX es la fundamentación rigurosa de muchos de los logros conseguidos durante los dos siglos precedentes. El iniciador de esta empresa es **Cauchy**, a través de sus cursos en París, que fueron publicados en los años 20.

La actividad expansiva, en especial del análisis matemático, continúa incansablemente. Una de las obras cumbres de la matemática aplicada es producida en 1821, por **Fourier**: *la Teoría Analítica del Calor*, que por una parte proporcionaba una trascendental herramienta a la Matemática ocupada en las aplicaciones, mientras que por otra parte proporcionaba un sinfín de problemas profundos a los analistas matemáticos, lo que constituyó un fuerte estímulo hacia una fundamentación seria del análisis.

Relacionado con el intento de profundización en los fundamentos de la matemática que se ha mencionado antes, está el hallazgo de las geometrías no euclídeas, en la primera mitad del siglo, por **Nicolai I. Lobachevski, J. Bolyai y F. Gauss**. La sorpresa de los matemáticos ante construcciones geométricas que contradecían a la euclídea y que eran tan consistentes como ella desde el punto de vista lógico**,** fue un punto de partida muy importante para tratar de repensar y entender mejor los fundamentos epistemológicos de la Matemática.

**Carl Friedrich Gauss** fue otro de los genios matemáticos dotados de una excelente habilidad con los números. A la edad de 3 años se cuenta que corrigió la nómina de los empleados de su padre. Un día en la escuela cuando tenía 10 años el maestro propuso como ejercicio sumar los 100 primeros números consecutivos. Gauss usó un método sencillo: La suma 1 + 2 + 3 + 4 + . . . . . + 97 + 98 + 99 + 100 , la escribió de la siguiente forma:

(1+100) + (2+99) + (3+ 98) + . . . + (50+51)

101 + 101 + 101 + . . .. . + 101 = 50 x 101 = 5050

Cuando al cabo de una hora acabaron sus compañeros, el maestro comprobó sorprendido como el resultado de Gauss que aparecía en la pizarra era el correcto. El maestro quedó tan impresionado que de su propio bolsillo compró un libro de aritmética y se lo regaló a Gauss quien rápidamente lo devoró.

Sucesores y seguidores de **Gauss** fueron **Dirichlet, Riemann, Weierstrass** y toda una escuela floreciente que contribuyó muy eficazmente a la fundamentación sólida del análisis y de otras ramas de la Matemática.

Al final del siglo XIX y comienzos del XX la preocupación por los fundamentos desemboca en el desarrollo de la teoría de conjuntos, por Cantor, y de la lógica matemática. La naturaleza epistemológica de la matemática fue analizada con sumo interés, con la intención de encontrar por fin una fundamentación sobre la que repose todo el edificio matemático.

Los matemáticos más importantes y encumbrados entre un siglo y otro son, sin duda, **Poincaré y Hilbert**, quienes se pueden contar como los últimos matemáticos verdaderamente universales que han poseído un dominio pleno de la mayor parte de la Matemática contemporánea.

El progreso de la Matemática en el siglo XX es tan espectacular en extensión y profundidad que se ha llegado a afirmar que las creaciones matemáticas en sólo este período vienen a superar toda la producción realizada antes del siglo XX. Esto hace que una descripción somera de la matemática de este siglo sea una tarea imposible. Pero hay varios desarrollos que probablemente dejarán muy marcado, fundamentalmente, el sendero de la matemática en el futuro.

Lo expuesto son evidencias, someras por supuesto, de la construcción de la matemática. Dichos conceptos, cuando son considerados en la enseñanza, adquieren importancia si en ellos se percibe su utilidad, para ello debemos estar informados del entorno cultural, social e histórico que lo rodeaban, para así ser revalorados por los estudiantes.

Una clase de geometría donde se trate el estudio de la pirámide como cuerpo espacial carece de importancia, para el estudiante y también para su entorno sociocultural, si en ella no hay referencias claras a las construcciones geométricas de los egipcios y los mayas; si no hay un sentido preciso de abordar con intenciones pedagógicas e investigativas todos los acontecimientos que alrededor de estas civilizaciones penetran en el desarrollo de la cultura universal. Pero junto a ello, se debe resaltar la estructuración de los resultados que en el campo de la formación de conceptos matemáticos aportaron desde un pensamiento productivo estos pueblos y que se evidencia en la solución de sus necesidades a través de la aplicación de estructuras matemáticas.

La Historia de la Matemática brinda a los docentes las posibilidades de reconocer, y por lo tanto de poder aplicar en el trabajo con los estudiantes, que la Matemática, en su desarrollo, ha acumulado un enorme conjunto de hechos que permiten atestiguar que los conceptos que la sustentan, las propiedades y todas las demostraciones tienen su procedencia en la práctica vinculada a los procesos reales del mundo y a la existencia de la sociedad civilizada: el surgimiento de la geometría está indisolublemente ligado a los problemas de las crecidas de los ríos y a la construcción de las pirámides de los egipcios antiguos.

Abundan hechos que posibilitan, dentro de la clase de Matemática, resaltar los valores humanos universales desde el conocimiento de la historia de esta ciencia; la laboriosidad con la cual los griegos estructuraron sus sistemas de conocimientos, la utilidad de sus métodos para el futuro de las ciencias y, en especial, para la Matemática; demuestran el carácter ingenioso de aquellos procedimientos en el empeño de mejorar el mundo.

El estudiante debe estar convencido que él participa en la construcción y que los teoremas y propiedades que descubre o aplica están frescos aun y no pensar que se trata de un conocimiento ya acabado, donde nada hay que descubrir, sino que es una ciencia viva en constante crecimiento y perfeccionamiento y que todos somos partícipes de ello.

## 2.4 LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y DE LA COMUNICACIÓN COMO RECURSO DIDÁCTICO

Los hombres y los grupos sociales permanentemente se renuevan y se adaptan, utilizando los productos tecnológicos que nos simplifican los procesos de rutina y permiten orientar nuestras energías al desarrollo de otras capacidades superiores como el aprender a pensar o descubrir nuevos algoritmos para nuevas necesidades.

Hoy en día nadie puede negar que las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC's) forman parte del quehacer no sólo de los profesionales sino también de la misma vida cotidiana, convirtiéndose no sólo en una ventaja para quien las posee o utiliza, sino también una necesidad. Y por supuesto, la educación matemática también necesita de ella. Hay situaciones que pueden ser resueltas mediante reglas o algoritmos conocidos, entonces el hombre debe hacer uso de las TIC's, optimizando el tiempo.

Por otro lado la práctica educativa nos persuade de la necesidad del apoyo de las calculadoras, computadoras, etc. que posibiliten un mejor aprendizaje de los alumnos, en campos como son las funciones, el cálculo numérico, las situaciones geométricas, etc. Con el apoyo de la computadora se pueden adquirir conocimientos matemáticos que con la pizarra, tizas, papel o lápices sería muy limitado y poco agradable a la vista de los estudiantes, los cuales están muy familiarizados con las nuevas tecnologías.

Sin embargo, el docente debe seleccionar con criterio los programas o softwares adecuados para reforzar los aprendizajes. De igual modo, el momento y la forma de utilizar este recurso tecnológico requiere de mucha pericia, que el docente irá perfeccionando con la práctica. A continuación, se presentan tres actividades utilizando dos softwares educativos: ***Winplot*** ; ***Wingeom*** y un software utilitario: ***Excel***.

### 2.4.1 APLICACIÓN DEL WINPLOT EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES[11]

A continuación, se va a presentar la resolución de ecuaciones en el conjunto de los Números Reales ($\Re$), teniendo en cuenta que todo planteamiento de solución de una ecuación necesita de una técnica (arreglo algebraico, cálculo numérico o un artificio en particular). Asimismo, se va a presentar un planteamiento de solución *geométrico intuitivo* a través del **Winplot**.

i) Ecuación de segundo grado :

Resolver: $x^2+2x-2=0$

<u>Solución algebraica:</u>

$$\begin{aligned} x^2+2x-2&=0\\ x^2+2x+1-1-2&=0\\ (x+1)^2-3&=0\\ (x+1+\sqrt{3})\,(x+1-\sqrt{3})&=0 \end{aligned}$$

$$x=-1-\sqrt{3} \quad \text{v} \quad x=\sqrt{3}-1$$

$$\textbf{C.S.}=\left\{-1-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}-1\right\}$$

<u>Winplot</u>: Graficamos las funciones **$f(x)=x^2+2x-2$** y **$g(x)=0$.** Luego, identificamos los puntos de intersección de dichas gráficas, figura 1, y obtenemos los pares ordenados **(-2,73205; 0)** y **(0,73205; 0),** donde **f(x)=g(x)** cuando $x\approx-2,73205$ v $x\approx0,73205$.

[11] Mendoza, Martín: "El Winplot como recurso didáctico en la enseñanza de la matemática", 2003.

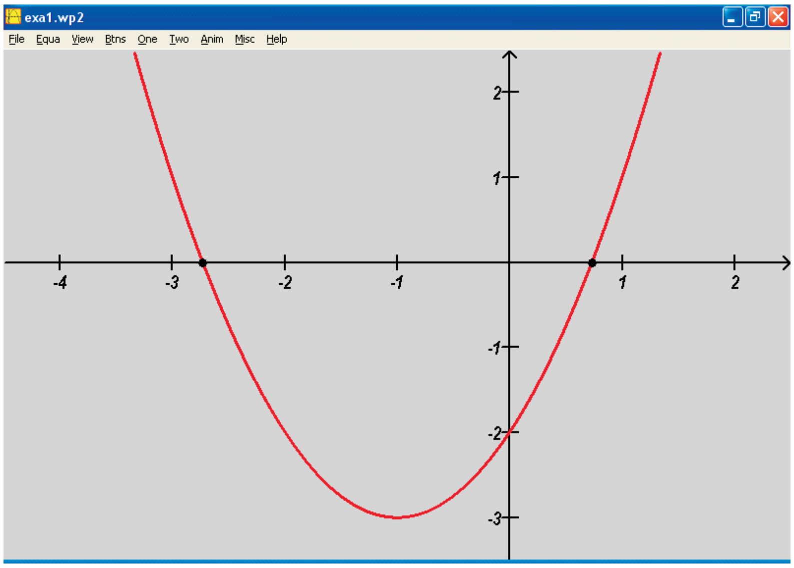



Fig 1

ii) Ecuación con raíz cuadrada:

Resolver: $\sqrt{x - 1} = 7 - 3x$

Solución algebraica:

$$\sqrt{x - 1} = 7 - 3x$$
$$x - 1 = (7-3x)^2 \ ; \ \mathbf{1 \leq x \leq 7/3}$$
$$x - 1 = 49 - 42x + 9x^2$$
$$9x^2 - 43x + 50 = 0$$
$$(9x-25)(x-2) = 0$$
$$X = 25/9 \ \vee \ x = 2$$

$$C.S. = \{2\}$$

Winplot[12] : graficamos las funciones **f(x) = $\sqrt{x-1}$** y **g(x) = 7 – 3x**. Luego, identificamos la intersección de dichas gráficas, figura 2, y obtenemos el par ordenado (2; 1), de donde f(x) = g(x) cuando x = 2.

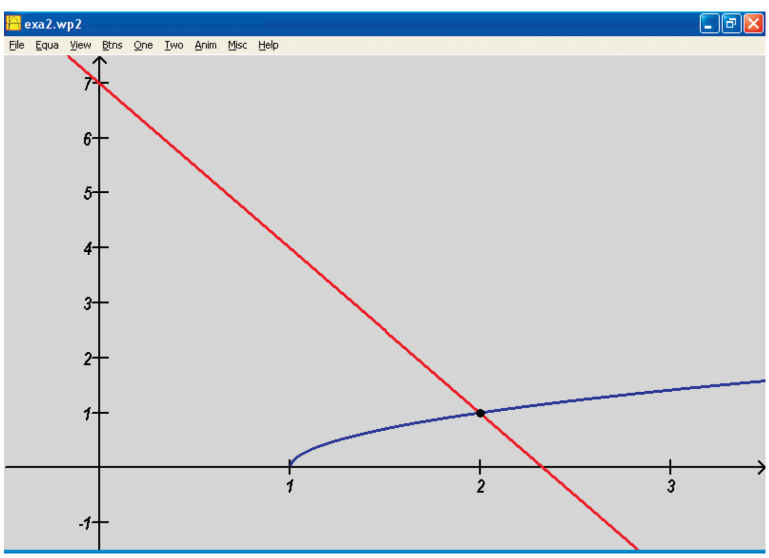



Fig 2

[12] Notación Winplot: $\sqrt{x}$ = sqr(x)

iii) Ecuación con valor absoluto:[13]

Resolver: $|x| - |x-1| = x-0,5$

Solución algebraica: $|x| - |x-1| = x-0,5$

$$\begin{aligned}
&\text{Si } x < 0: \ (-x) - (1-x) = x-0,5 \\
&\quad -x - 1 + x = x-0,5 \\
&\quad x = -0,5 \\
&\text{Si } 0 \le x < 1: \ (x) - (1-x) = x-0,5 \\
&\quad x - 1 + x = x-0,5 \\
&\quad x = 0,5 \\
&\text{Si } x \ge 1: \ (x) - (x-1) = x-0,5 \\
&\quad x - x + 1 = x-0,5 \\
&\quad x = 1,5
\end{aligned}$$

C.S.= {-0,5; 0,5; 1,5}

Winplot: Graficamos las funciones **f(x) = |x| - |x-1|** y **g(x) = x-0,5**. Luego, identificamos los puntos de intersección de dichas gráficas, figura 3, y obtenemos los pares ordenados **(-0,5; -1)**, **(0,5; 0)** y **(1,5; 1)**, de donde **f(x) = g(x)** cuando x = -0,5 v x = 0,5 v x = 1,5.

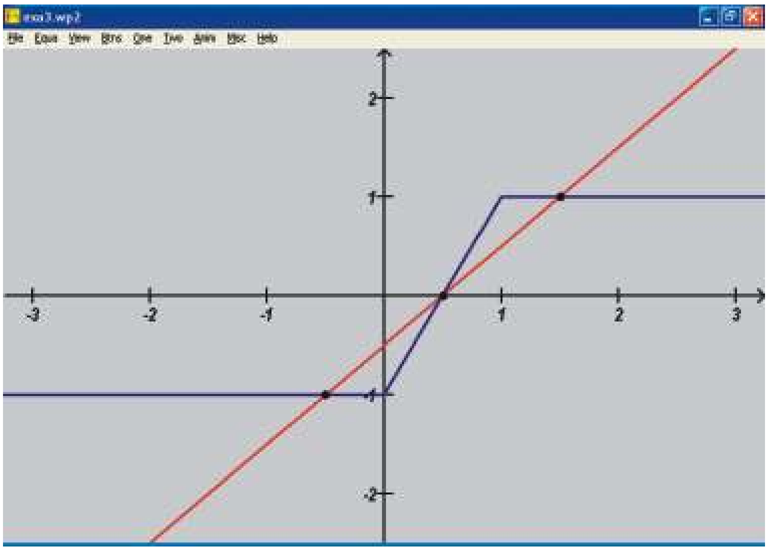



Fig 3

iv) Ecuación trigonométrica[14]:

Resolver: sen(2x) - cos(x) = 0; $\mathbf{0 \le x < 2\pi}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\text{sen}(2x) - \cos(x) &= 0 \\
2\text{sen}(x).\cos(x) - \cos(x) &= 0 \\
\cos(x)\,[2\text{sen}(x) - 1] &= 0 \\
\cos(x) = 0 \ \text{ v } \ 2\text{sen}(x) - 1 &= 0 \\
\cos(x) = 0 \ \text{ v } \ \text{sen}(x) &= 1/2
\end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ v } x = \frac{3\pi}{2} \text{ v } x = \frac{\pi}{6} \text{ v } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$$

[13] Notación Winplot: $|x|$ = abs(x)

[14] Notación Winplot: sen(x) = sin(x).

Winplot: Graficamos las funciones **f(x) = sen(2x) - cos(x)** y **g(x) = 0**. Luego, identificamos los puntos de intersección entre las gráficas, figura 4, y obtenemos los pares ordenados **(0,52360; 0)**, **(1,57080; 0)**, **(2,61799; 0)** y **(4,71239; 0)** de donde **f(x) = g(x)** cuando $x \approx 0{,}52360$ v $x \approx 1{,}57080$ v $x \approx 2{,}61799$ v $x \approx 4{,}71239$.

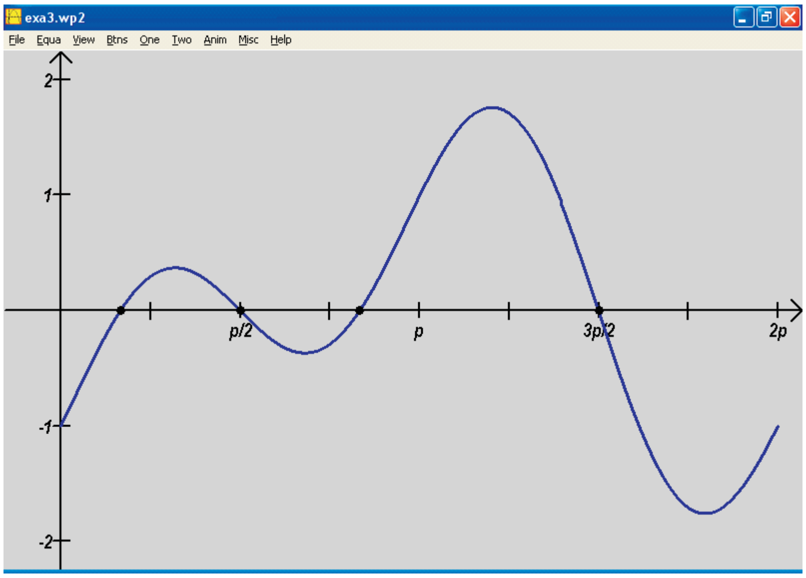



Fig 4

v) Ecuación exponencial[15]:

Resolver: $x\,e^{1-x^2} = x$

Solución algebraica:

$$x\,e^{1-x^2} = x$$
$$x\,e^{1-x^2} - x = 0$$
$$x\,(e^{1-x^2} - 1) = 0$$
$$x = 0 \;\; v \;\; (e^{1-x^2} - 1 = 0)$$
$$x = 0 \;\; v \;\; e^{1-x^2} = 1$$
$$x = 0 \;\; v \;\; 1 - x^2 = 0$$
$$x = 0 \;\; v \;\; (1+x)(1-x) = 0$$
$$x = 0 \;\; v \;\; (1+x = 0) \;\; v \;\; (1-x = 0)$$
$$x = 0 \;\; v \;\; x = -1 \;\; v \;\; x = 1$$

C.S. = {-1; 0; 1}

Winplot: Graficamos las funciones **f(x) =** $x\,e^{1-x^2}$ y **g(x) = x**. Luego, identificamos los puntos de intersección entre las gráficas, figura 5, y obtenemos los pares ordenados **(- 1; -1)**, **(0; 0)** y **(1; 1)**, de donde **f(x) = g(x)** cuando x = -1 v x = 0 v x = 1.

[15]Notación Winplot: $e^x$ = exp(x).

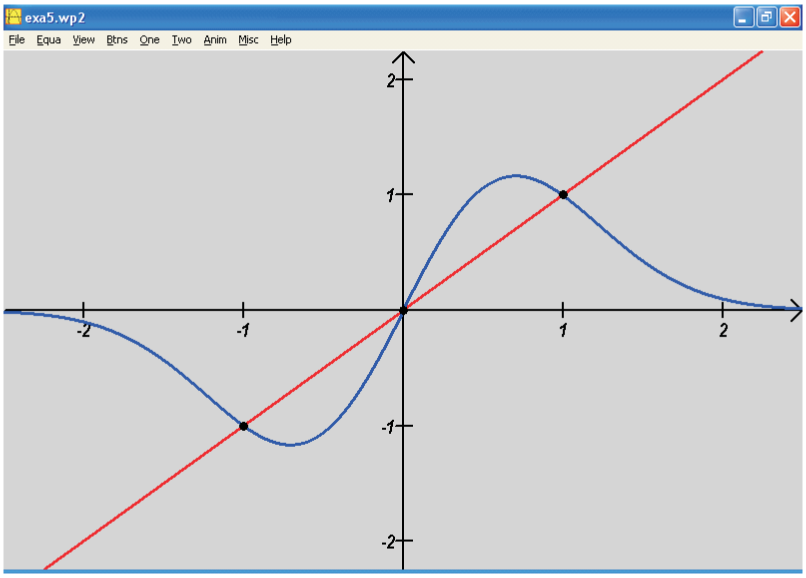



Fig 5

vi) Ecuación logarítmica

Solución algebraica

$$3\ln^2(x) - 2\ln(x) - 1 = 0$$
$$[3\ln(x)+1]\,[\ln(x) - 1] = 0$$
$$3\ln(x)+1 = 0 \ \vee \ \ln(x) - 1 = 0$$
$$\ln(x) = -1/3 \ \vee \ \ln(x) = 1$$
$$x = e^{-1/3} \ \vee \ x = e$$

$$C.S. = \{e^{-1/3};\ e\}$$

Winplot: Graficamos las funciones **f(x) =3ln²-2ln(x)-1** y **g(x) =0.** Luego, identificamos los puntos de intersección de dichas gráficas, figura 6, y obtenemos los pares ordenados **(0,71653;0)** y **(2,71828;0)**, de donde **f(x) = g(x)** cuando $x \approx 0{,}71653 \ \vee \ x \approx 2{,}71828$

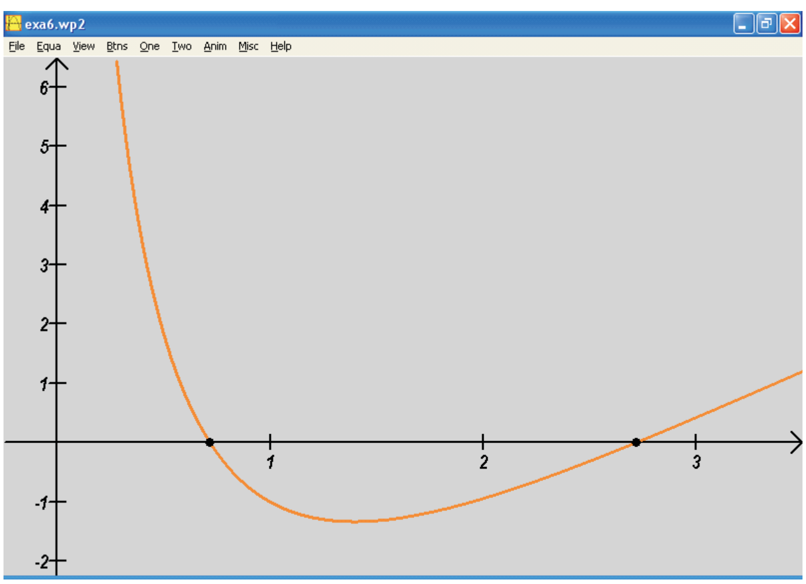
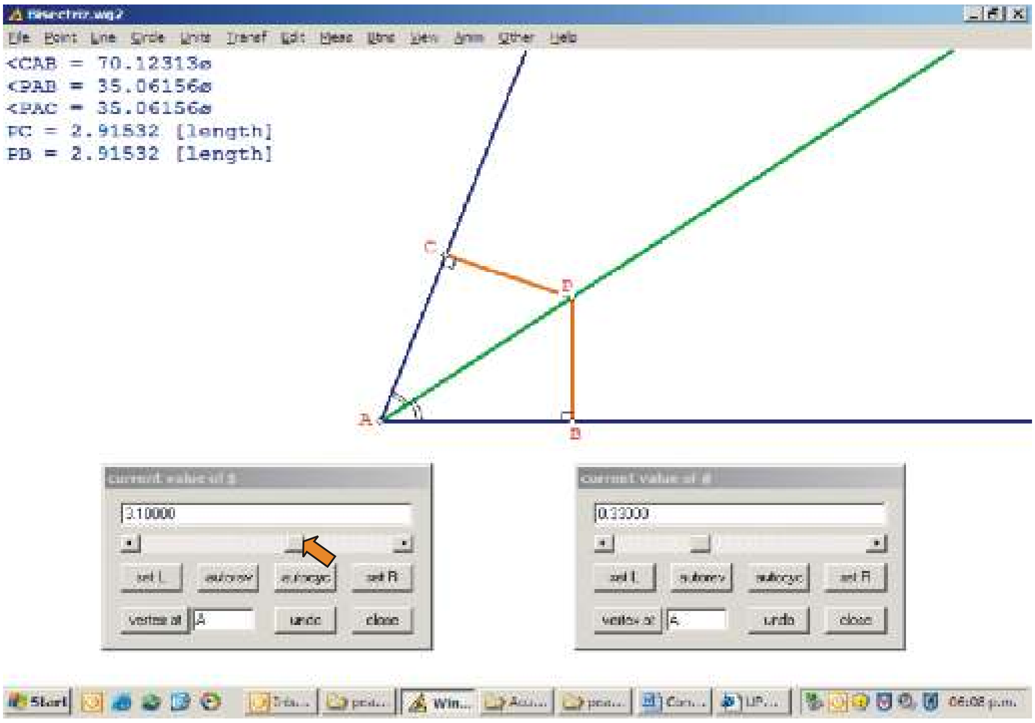



Fig 6

## 2.4.2 PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO UTILIZANDO EL WINGEOM

El objetivo de esta actividad es que el alumno descubra la propiedad de la bisectriz de un ángulo. Al ingresar a trabajar con el Wingeom, abrimos el archivo “Bisectriz” - que ha sido elaborado previamente - el cual aparece en pantalla como se muestra a continuación:




La pantalla nos muestra el ángulo CAB y su bisectriz $\overline{AP}$ . Las distancias del punto P a los lados del ángulo se determinan por la longitud de los segmentos $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$

**• Desplazamiento del punto P**

Ubique el cursor en el lugar que se muestra en la gráfica (primera ventana) y luego arrastre hacia la derecha e izquierda y observará que el punto P se desplaza a lo largo de la bisectriz.

**• Modificación de la medida del ángulo CAB**

Al arrastrar el cursor en la segunda ventana observará que la medida del ángulo CAB aumenta o disminuye.
En la parte superior izquierda de la pantalla se aprecia la medida de los ángulos CAB, PAB y PAC, así como la medida de los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PB}$ .

**Actividad:**
Modifique la medida del ángulo CAB de manera que sea siempre un ángulo agudo. Luego, ubique el punto P en tres posiciones distintas y registre en la tabla adjunta los datos que se solicitan para cada caso. Luego, realice el mismo proceso considerando el ángulo CAB obtuso.

| Medida del ángulo CAB | Medida del ángulo PAB | Medida del ángulo PAC | Medida del segmento PC | Medida del segmento PB |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Considerando que $\overrightarrow{AP}$ es la bisectriz del ángulo CAB, conteste las siguientes preguntas:

¿Qué relación existe entre las medidas de los segmentos $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ cuando el ángulo CAB es agudo?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

¿Qué relación existe entre las medidas de los segmentos $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ cuando el ángulo CAB es obtuso?

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

CONCLUSIONES:

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

### 2.4.3 HOJAS DE CÁLCULO: MICROSOFT EXCEL

Las hojas de cálculo son uno de los tipos de programas de usuario más extendidos y utilizados en diversidad de contextos. En esencia, es una hoja cuadriculada, formada por líneas y columnas donde el usuario puede disponer de las celdas generadas para almacenar datos numéricos; además, estos también pueden ser obtenidos y modificados mediante fórmulas. El software utilitario Microsoft Excel se puede aplicar en los siguientes tópicos del área de Matemática:

- Valor numérico de una expresión algebraica.
- Funciones.
- Estadística descriptiva.
- Conversión de unidades.

Las características de las hojas de cálculo son:

- Organizan y utilizan información en columnas, tanto numérica como alfanumérica.
- Realizan cálculos numéricos con dichos datos.
- Disponen de distintos tipos de funciones: financieras, estadísticas, científicas, lógicas, entre otras.
- Son herramientas dinámicas e interactivas.
- Generan diversos tipos de gráficos que ayudan a interpretar la información almacenada.
- Pueden compartir información con otras herramientas de usuario.
- Tienen la opción de imprimir tanto las hojas como los cálculos.

Cabe resaltar la "amigabilidad" de este tipo de herramienta, cuyo funcionamiento se basa en menús o ventanas. A continuación, presentamos una aplicación sencilla de la hoja de cálculo Excel de Microsoft.

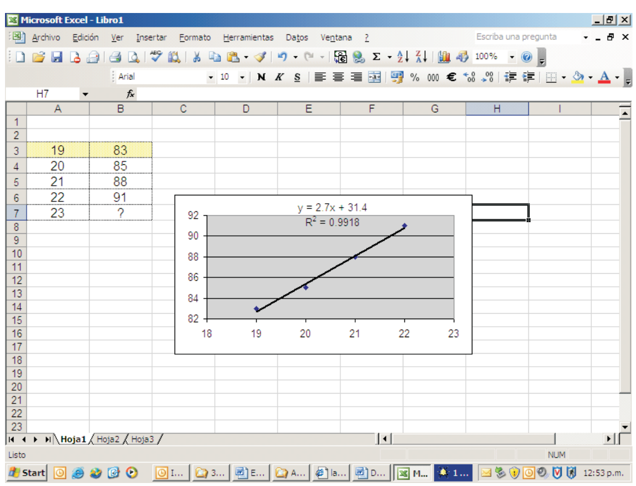
Los datos en la siguiente tabla relacionan el tiempo empleado por los estudiantes para prepararse ante una prueba y las calificaciones de las pruebas aplicadas.

| Tiempo empleado (en horas) | Calificación de la prueba (en porcentaje) |
|---|---|
| 19 | 83 |
| 20 | 85 |
| 21 | 88 |
| 22 | 91 |
| 23 | ? |

Utilice un modelo lineal para predecir la calificación de la prueba aplicada cuando un estudiante ha invertido un tiempo de 23 horas.

Con ayuda de la hoja de cálculo Excel, podemos elaborar un diagrama de dispersión de los datos y ajustar una línea de regresión. La recta de mejor ajuste es $y = 2{,}7x + 31{,}4$ ; en donde ***x*** representa las horas de estudio y **y** representa la calificación, en porcentaje, obtenida en la prueba. Así, para $x = 23$, se obtiene $y = 2{,}7(23) + 31{,}4 = 93{,}5$ %.

Es decir, se espera que un alumno que ha estudiado 23 horas obtenga una calificación del 93,5%.



## 2.5 MATEMÁTICA Y OTRAS DISCIPLINAS: INTERDISCIPLINARIEDAD

La Matemática y las demás ciencias surgen generalmente respondiendo a una necesidad, para resolver un problema. Y dichos problemas no surgen sólo en el terreno matemático sino en otras áreas o disciplinas del conocimiento. Sabida es su estrecha relación con las ciencias físicas y la química. Actualmente se sabe que la Matemática está presente en diversas actividades, desde el deporte hasta los negocios, para tener una idea general sobre la gran aplicabilidad de esta herramienta.

La Matemática ahora forma parte de proyectos interdisciplinarios. Interactúa con otras ciencias, con las empresas, las finanzas, las cuestiones de seguridad, la gestión, la toma de decisiones y la modelización de sistemas complejos. Y algunas de estas disciplinas, por su parte, están retando a los matemáticos con nuevas clases de problemas interesantes que, a su vez, están dando lugar a nuevas aplicaciones.

A continuación describimos brevemente algunas relaciones de la Matemática con otras ciencias y áreas del conocimiento.

**Matemática y Biología:** Actualmente la colaboración que más rápidamente crece es la que se da entre la Matemática y la Biología. Esta asociación se afianzó en el campo de la Ecología en los años 20, cuando el matemático italiano Vito Volterra desarrolló los primeros modelos de la relación depredador-presa y encontró que podía describir matemáticamente la sucesiva oscilación de las proporciones de depredadores y de presas en poblaciones de peces.

La Organización Mundial de la Salud (OMS) ha definido recientemente la obesidad como “la mayor epidemia del siglo XXI”, lo que nos da una idea de la gravedad de esta enfermedad. Según sus estimaciones, en la actualidad existen 250 millones de personas obesas y para el año 2025 prevé que se alcancen los 300 millones.Por ello, hay que dar su justa importancia a esos kilos de más que pueden repercutir negativamente en nuestra salud.

Existe un consenso generalizado entre sociedades científicas para la utilización del Índice de Masa Corporal o **IMC** como diagnóstico de obesidad. El Índice de Masa Corporal (IMC) es una operación matemática que relaciona el peso con la altura. La fórmula es:

$$IMC = \frac{W}{H^2}$$

Donde W indica el peso en kilogramos, H la altura en metros. Entonces el IMC estará expresado en la unidad $Kg / m^2$. Cuando el resultado está comprendido entre 18,5 y 25, el índice se considera normal. Si está por debajo puede haber desnutrición y si está por encima hay sobrepeso.

**Matemática e Informática y Comunicaciones:** Este amplio campo podría ocasionar tantos cambios en la sociedad como la revolución industrial. Quienes las incorporen temprano tendrán una ventaja competitiva a largo plazo. Los que tarden mucho en incorporarse encontrarán dificultades para ponerse al día. La base de los lenguajes de programación y de gestores de datos es la lógica matemática, así como de todos los softwares y aplicativos que usamos en todos los campos.

Los **códigos de barra** traducen una sucesión de números a una distribución de barras de distinto grosor: blancas y negras, que se puede leer con un lápiz óptico o con un escáner. Facilitan así poner el precio a los productos o cobrarlos, pues basta con que la computadora del almacén esté programada para asignar el precio convenido de la mercancía al código de barras de la misma.
Cuando el precio es fijo se utiliza un código de 13 números:
- Los dos primeros números indican dónde está hecho el producto: 74 es el de República Dominicana; cada país tiene un prefijo asignado.
- Los cinco números que siguen están asignados a la empresa productora; en este caso 60016.
- Los cinco números que siguen corresponden al producto: 70204.
- El último número es el de seguridad y se calcula así:

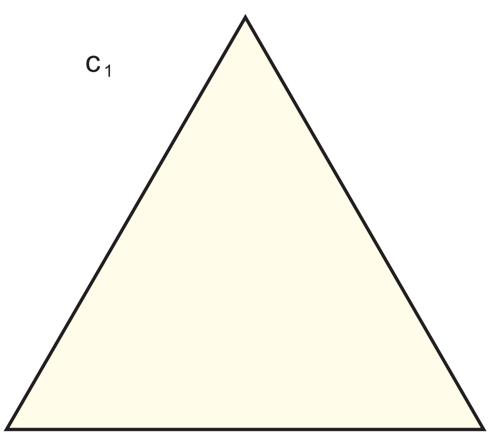
Se escriben las primeras doce cifras del código y debajo la secuencia 1 3 1 3 ...
**7 4 6 0 0 1 6 7 0 2 0 4**
**1 3 1 3 1 3 1 3 1 3 1 3**
Se suman los productos de cada par de números: 7x1 + 4x3 + 6x1 + 0x3 + 0x1 + 1x3 + 6x1 + 7x3 + 0x1 + 2x3 + 0x1 + 4x3. El resultado es 73.
El número de seguridad es 7, que es lo que falta al resultado para completar una decena más, en este caso 80, ya que 80 – 73 = 7.
Este número sirve para verificar que el lápiz óptico o el escáner leyeron bien.
En los productos también se ha de especificar el **precio final** de venta al público.

**Matemática y Física:** la Matemática es cada vez más necesaria en la representación de los diferentes fenómenos que estudia la física y en la solución de los modelos que resultan de estas formulaciones. La Geometría Algebraica está siendo utilizada por los físicos teóricos en su búsqueda de una teoría unificada de campos, o de manera más precisa, de una teoría que unifique la gravedad con las tres fuerzas fundamentales de la Física: la fuerza nuclear fuerte, la fuerza nuclear débil y el electromagnetismo.

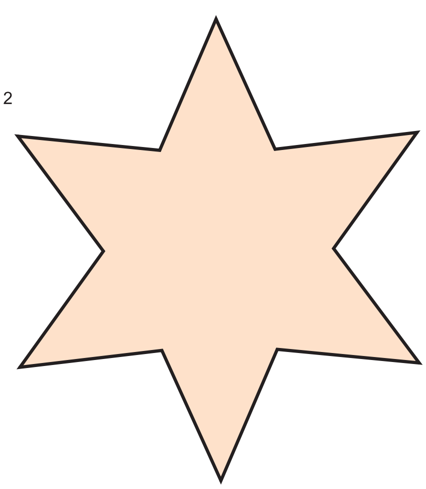
Los fractales son entes geométricos con propiedades intrínsecas: la figura se repite en sí misma una y otra vez (proceso iterativo); poseen dimensión no entera. Tienen múltiples aplicaciones en la compactación de imágenes, en la simulación de precios, en la construcción de modelos económicos, etc. Se presenta a continuación la generación del copo de nieve de Van Koch (1906).

A partir de un triángulo equilátero trisecamos sus lados para generar recursivamente otros triángulos equiláteros; así tenemos:

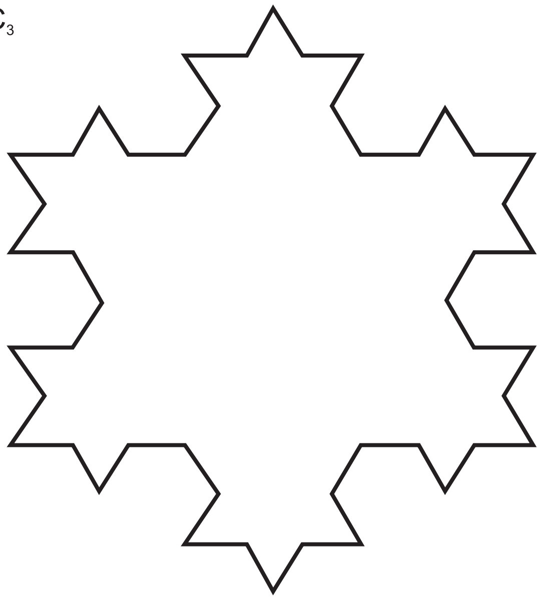
$c_1$



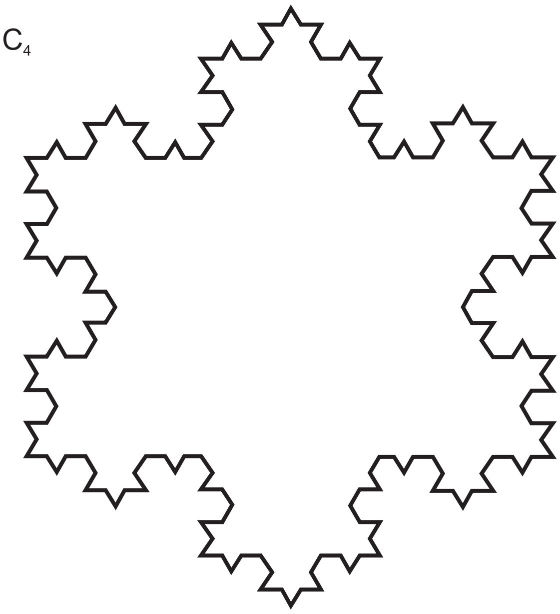
$c_2$



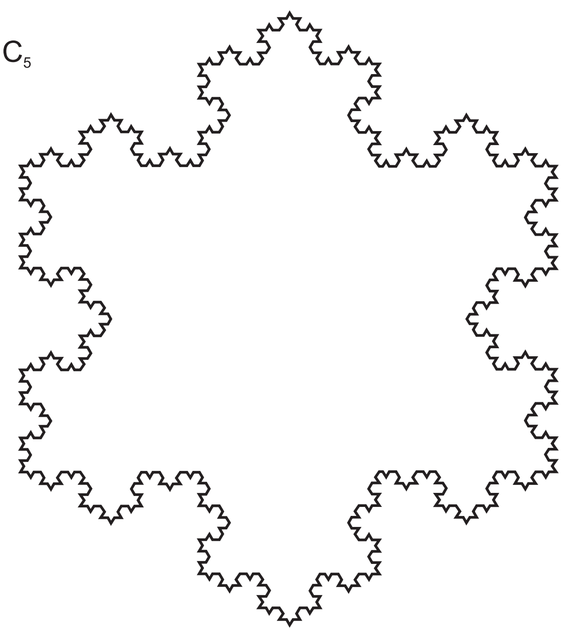
$C_3$



$C_4$



$C_5$



Resumiendo:

$L_1 = 3$

$L_2 = 3(4/3)$

$L_3 = 3(4/3)^2$

$L_4 = 3(4/3)^3$

...

$L_7 = 3(4/3)^6$

...

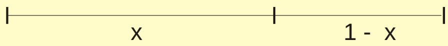
$\longrightarrow \quad L_{n+1} = 3(4/3)^n$

$\longrightarrow \quad \lim\limits_{n \to \infty} L_n = ?$

**Matemática y Arte:** la Matemática está presente en las diferentes escuelas clásicas de arte. En pintura, por ejemplo, los estudios sobre perspectiva en el renacimiento dieron lugar a la geometría proyectiva; en música fluye la matemática en casi cualquier concepto; en arquitectura, desde el Partenón a Gaudí, pasando por las catedrales, los estudios de geometría resultan básicos. Se puede afirmar, sin exagerar, que la arquitectura es inexplicable sin la Matemática.

"Una recta está dividida en extrema y media razón cuando la recta es al segmento mayor lo que este es al menor". Así define Euclides lo que hoy conocemos por sección áurea (número de oro), objeto de gran sencillez matemática y que, sin embargo, ha interpretado un importante papel en el arte y en el concepto de belleza que se ha tenido en distintas épocas.

Supongamos un segmento, que por comodidad consideramos de longitud 1, dividido en dos partes. Vamos a calcular qué valor debe tener x para que sea la sección áurea del segmento:




Según la definición de Euclides, se tiene:

$$\frac{1}{x} \qquad \frac{x}{1 - x}$$

$$1 - x = x^2$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

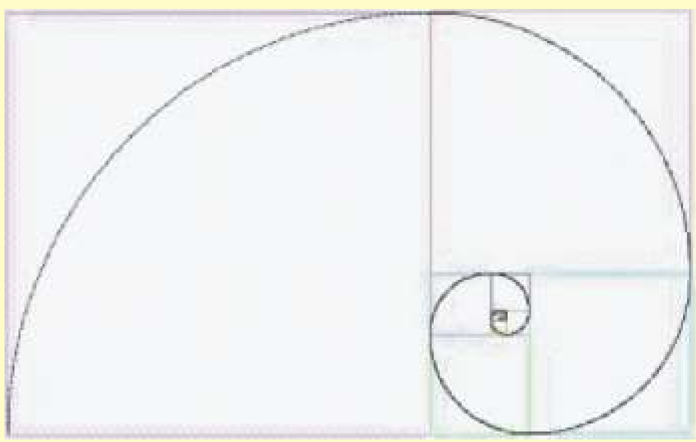
Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Como la razón áurea es el cociente entre la longitud del segmento y el valor de x, tenemos que:

$$\varphi = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

No cabe duda de que la autorreproductividad vista en la construcción anterior permite joyas como El Partenón, en la que la sección áurea proporciona un factor unificador para las medidas de los distintos elementos arquitectónicos y la consiguiente sensación de armonía. Un ejemplo matemático de lo anterior puede ser la espiral áurea, curva compuesta por una sucesión de cuartos de circunferencia tangentes a cuadrados cuyos lados están en razón áurea.

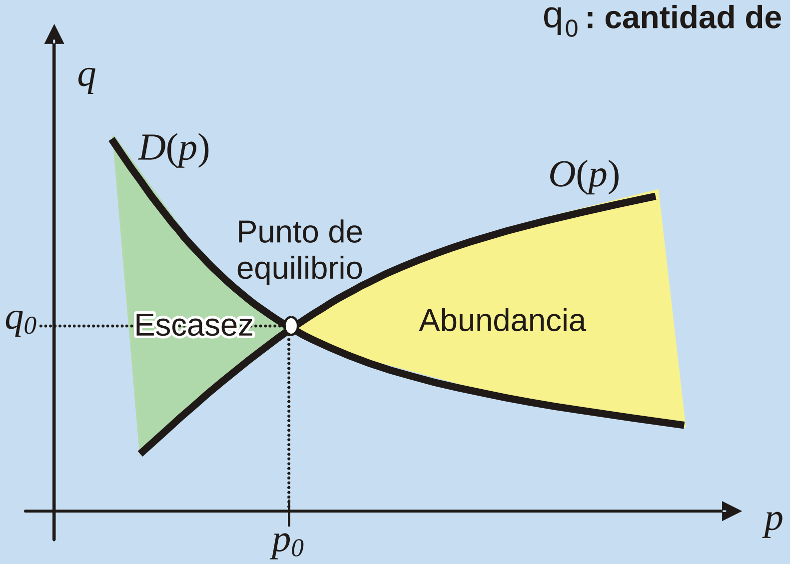


**Matemática y Economía:** Las finanzas modernas, aunque no son una ciencia en el sentido tradicional de la palabra, tienen una interacción con la Matemática que no se limita a la teoría; hoy la Matemática juega un rol central en el funcionamiento diario de los mercados financieros del mundo. Son muchas las oportunidades de investigación que existen en las zonas limítrofes de la Matemática con la economía y las finanzas, áreas que utilizan inexorablemente métodos matemáticos.

En economía se estudia la Ley de la Oferta y la Demanda, de gran aplicación en el mercado para la determinación del precio adecuado. En este contexto, la ecuación de oferta $q = O(p)$ relaciona el precio de mercado "p" de un artículo con el número de unidades "q" del artículo que los fabricantes están dispuestos a ofrecer a ese precio. La ecuación de demanda $q = D(p)$ relaciona el precio de mercado "p" de un artículo con el número de unidades "q" del artículo que los consumidores están dispuestos a comprar a ese precio. En la mayoría de los casos, la oferta de los fabricantes $O(p)$ aumenta y la demanda de los consumidores $D(p)$ disminuye cuando el precio p aumenta en el mercado. Al punto de intersección de la oferta con la demanda se le llama "punto de equilibrio".

$p_0$ **: precio de equilibrio**

$q_0$ **: cantidad de equilibrio**




**Matemática y Química:** Una de las principales causas del progreso de la química en el siglo XX ha sido la provechosa relación que se estableció con la Matemática para el establecimiento de nuevas teorías y la solución de los problemas emergentes de ella.

En la química se estudia el concepto de vida media, que se refiere al tiempo necesario para que se desintegre la mitad de los átomos radioactivos existentes en un instante inicial. Con el apoyo de la Matemática se logra determinar que:

$$V_m = \frac{0{,}301\, t}{2{,}303\, \log\left(\frac{N_0}{N}\right)}$$

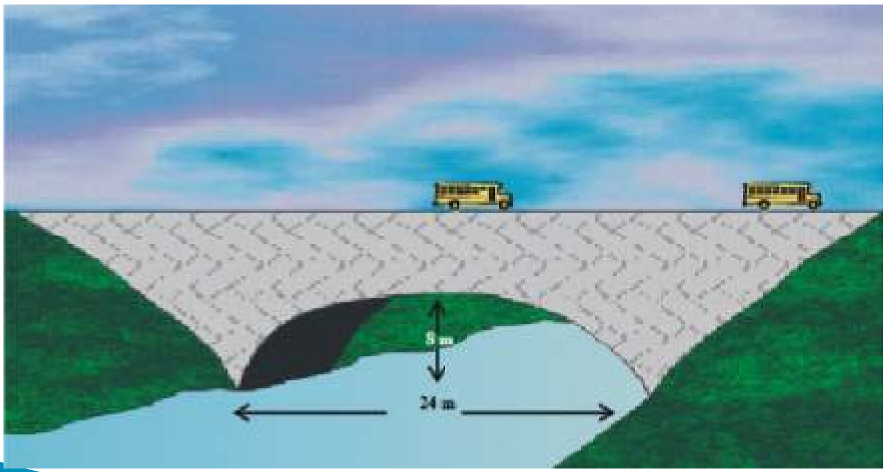
donde,
- $t$ : tiempo transcurrido
- $N_0$ : masa inicial de materia radioactiva
- $N$ : masa final de materia radioactiva
- $V_m$ : vida media

E incluso se ha llegado a obtener el tiempo de vida media para algunos radioisótopos. Por ejemplo:

| ***Radioisótopo*** | $V_m$ |
|---|---|
| $^{3}_{1}H$ | ***12,5 años*** |
| $^{15}_{8}O$ | ***2,0 minutos*** |
| $^{32}_{15}P$ | ***14,3 días*** |

**Matemática e Ingeniería:** Todas las ramas de la ingeniería se basan en la Matemática. Ello se traduce en la modelización de procesos mediante representaciones matemáticas que permitan resolver una diversidad de problemas. Es decir obtener modelos que expliquen diversos fenómenos y permitan realizar predicciones.

Por ejemplo, en el campo de la Ingeniería Civil al momento de realizar el diseño y posterior construcción de un puente se puede identificar, como en la figura adjunta, un **arco semielíptico**; dicho arco tiene la forma de la mitad superior de una elipse y es usado para sostener un puente que debe atravesar un río de 24 metros de ancho. En el centro de arco la longitud de la altura es de 8 metros, desde el centro del río. Esta descripción nos puede llevar a plantear una situación problemática de la vida real; por ejemplo se puede plantear que se deduzca la ecuación de la elipse que contiene al arco semielíptico. Además, se puede pedir encontrar la altura del arco a 3, 6 y 9 metros desde el centro del río. Sugerencia: seleccionar un sistema de coordenadas rectangulares adecuado, por ejemplo hacer que el Eje X coincida con el nivel del agua y el Eje Y pase por el centro del arco.



# CAPÍTULO 3

# ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS PARA DESARROLLAR EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO EN EL AULA

## 3.1 CAPACIDADES DE ÁREA

La OTP-2005, describe la relación que debe existir entre las capacidades fundamentales, capacidades de área y las capacidades específicas. Entre ellas no hay una relación lineal de implicación, es decir que una capacidad específica no es exclusiva para una capacidad de área, ni tampoco que esta pertenezca al dominio exclusivo de una capacidad fundamental, sino que la relación de estas es integral. Es más, la elección de las capacidades es una propuesta metodológica, como también pueden existir otras propuestas, pero lo importante ahora es emprender nuestro trabajo pedagógico para desarrollar el pensamiento matemático del estudiante. Vamos a referirnos a cada capacidad de área, las cuales a su vez están estrechamente relacionadas.

### 3.1.1 RAZONAMIENTO Y DEMOSTRACIÓN

Esta capacidad, como las otras, comprende diversas capacidades específicas: generalizar, hacer conjeturas, argumentar, demostrar, verificar, hallar contraejemplos. El desarrollo de esta capacidad se hace permanentemente en el aprendizaje de la Matemática; los estudiantes siempre lo han hecho, ya sea acertando en sus argumentos como errando en ellos, no en vano se afirma que el mejor método para aprender Matemática es razonando.

Actualmente la Matemática es un terreno abierto, en el sentido que se siguen descubriendo teoremas, propiedades, así como se formulan nuevas conjeturas. Esto demuestra que la Matemática no es una ciencia acabada, sobre la cual ya nada hay que aportar, sino que todos los que estamos involucrados en esta ciencia, incluidos los estudiantes, ponemos nuestro grano de arena para su desarrollo como ciencia.

No sólo en la geometría podemos realizar demostraciones, como a veces se cree, estas pueden darse en la aritmética, álgebra o la trigonometría. Así por ejemplo el álgebra es un buen terreno para que el estudiante verifique algunos teoremas o propiedades, conjeture y demuestre por sí solo estos teoremas y otras verdades matemáticas y así cultivar su autonomía en el aprendizaje.
Analicemos los beneficios que nos prodigan los productos notables. Tomemos el cuadrado de un binomio. A partir de él podemos desarrollar diversas capacidades específicas. Veamos:

$$(a+b)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En primer lugar, cuando se le presenta por primera vez esta expresión a los estudiantes, muchos de ellos suelen creer que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. Y es un buen motivo pedagógico para persuadirlos de que no siempre la intuición nos conduce a conclusiones correctas, sino que es necesario verificarlas matemáticamente. Para ello tenemos los contraejemplos. Así, para a = 6 y b = 5, tendríamos que $(6 + 5)^2 = 6^2 + 5^2$. Es decir, que 121 = 36 + 25, lo cual es falso. Entonces, es falsa tal suposición dado que falló para un caso particular.

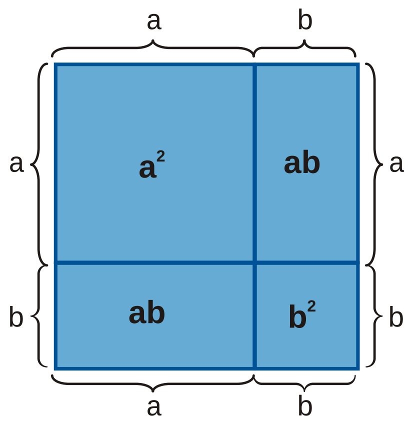
En segundo lugar hay que demostrarles, con la participación activa de los estudiantes, senda identidad apelando a sus saberes previos como son las operaciones con polinomios. No olvidemos que el docente modela cuando está interactuando con los alumnos. El estudiante aprende que cada paso debe estar sustentado con el rigor científico que exigen las demostraciones, aprenderá a ser creativo si así demostramos serlo.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b).(a+b) && \text{... Definición de potencia}\\
&= a^2 + ab + ba + b^2 && \text{... Multiplicación de polinomios}\\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \text{... Simplificación de términos semejantes}
\end{aligned}
$$

El resultado anterior es cierto para cualesquiera de los valores reales de **a** y **b**. Debemos acostumbrarnos, tanto docente como estudiantes, a leer e interpretar una demostración. En este caso, que comprendan la demostración en ambos sentidos: el progresivo, de izquierda a derecha; y el regresivo, en el sentido inverso.

En tercer lugar, podemos brindar una verificación o "demostración" geométrica. Ello es interesante, pues le da integridad y sustento científico a la matemática y el estudiante aprende a valorarla. Así, para nuestro ejemplo utilizamos el concepto de área Se observa que el cuadrado grande, de lado "a + b" ha sido dividido en cuatro partes: un cuadrado de lado "a", otro menor de lado "b" y dos rectángulos de lados "a" y "b". Entonces el área del cuadrado mayor equivaldrá a la suma de las áreas de sus partes. Es decir:

$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$,
simplificando
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$




En cuarto lugar, sabemos la cantidad de fórmulas que se presentan y desarrollan en las sesiones de aprendizaje, por lo que es comprensible que muchas de ellas las olvidemos, porque no las aplicamos u otros factores. Para ello el estudiante debe habituarse a demostrarlas, dar ejemplos y contraejemplos, hasta encontrar la relación correcta como la que hemos presentado; es decir, debemos promover su autonomía en el aprendizaje.

A propósito de los productos notables del álgebra, debemos aprovechar su aplicabilidad. Por ejemplo, el cálculo de $6749^2 - 3251^2$ con los métodos aritméticos resultaría tedioso, pero si aplicamos la propiedad algebraica $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
6\,7492 - 3\,2512 &= (6\,749 + 3\,251)(6\,749 - 3\,251)\\
&= 10\,000 \times 3\,498\\
&= 34\,980\,000 && \text{...¡ Resulta más sencillo!}
\end{aligned}
$$

Cuando sea oportuno el docente debe mostrar la aplicabilidad de lo que se realiza, pues esto favorece que el aprendizaje sea significativo. Además, como en este caso, el relacionar los objetos algebraicos con los aritméticos y geométricos le da unidad a la Matemática.

## LAS CONJETURAS

Las conjeturas son juicios que se obtienen a partir de regularidades que se observan en el comportamiento de objetos o hechos, pero que aún no existe una demostración formalmente aceptada para ellas.

La historia de la Matemática contiene muchos ejemplos de conjeturas. Muchas de las cuales aún no han sido demostradas, pero abrieron grandes campos de investigación matemática y otras que ya lo fueron pero pasaron muchos siglos para ello.

## CONJETURA DE GOLDBACH

Todo gira en torno a una carta fechada el 7 de junio de 1742 que el profesor de matemática en San Petersburgo, Christian Goldbach, le escribía a su celebérrimo colega y amigo Leonhard Euler. Lo importante de esta carta lo escribió en el último momento, conjeturaba que: “todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos.”

Veamos algunos casos:

90 = 83 + 7     94 = 47 + 47     96 = 37 + 59     2006 = 1003 + 1003

Se entiende que la conjetura no nos afirma que dicha pareja de números primos sea única. Así por ejemplo para el **102** podemos encontrar hasta 8 posibilidades:

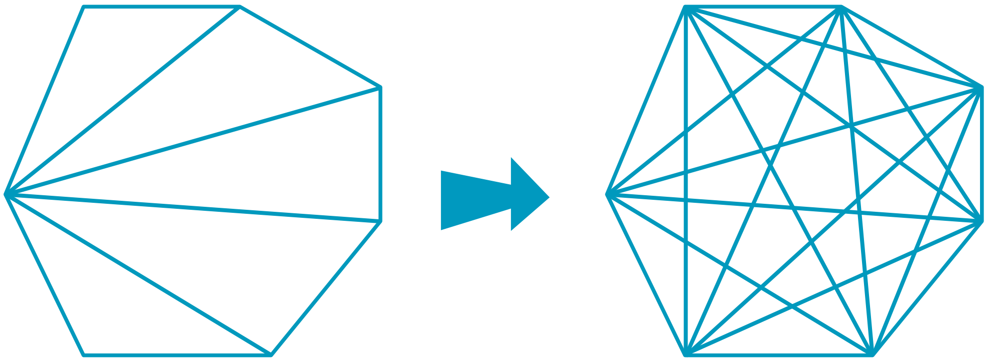
| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 + 97 | 13 + 89 | 19 + 83 | 23 + 79 |
| 29 + 73 | 31 + 71 | 41 + 61 | 43 + 59 |

Esta Conjetura ha sido verificada hasta 100 000 000 000 000 pero todavía no se ha encontrado una demostración matemática para todo número par. Resulta oportuno utilizar esta conjetura para afianzar el concepto y manejo de los números primos en los alumnos. Se les puede proponer hallar dos números primos para algunos pares como: 124; 396; 600; etc. o los que el docente considere conveniente.

Hay muchas conjeturas más que el docente debe investigar. Otra muy conocida es la siguiente: “Todo número se puede expresar como la suma de 4 cuadrados perfectos.” Como aplicación tomemos el número que representa al año 2006, el cual se puede expresar como $2006 = 44^2 + 6^2 + 5^2 + 3^2$. NOTA: la conjetura nos permite utilizar cuadrados iguales, el cero y hasta puede haber más de una forma para construir el número. Para nuestro ejemplo, tenemos otra forma $41^2 + 15^2 + 8^2 + 6^2 = 2006$.

## PARADOJAS Y FALACIAS

Las paradojas son un poderoso recurso para desarrollar el pensamiento, conducen al estudiante a un gran conflicto cognitivo, pues su habitual manera de pensar parece que no es suficiente para el desafío que estas proponen. Decía René Descartes: "A fin de alcanzar la verdad, es necesario una vez en la vida poner todo en duda hasta donde sea posible." El mensaje es claro. Oportunamente el docente puede preparar interrogantes que hagan repensar al alumno sobre algunos procedimientos o situaciones que parecen simples, pero que no lo son realmente ya que demandan reflexionar más de lo habitual.
Por ejemplo, cuando en una sesión de aprendizaje se hace referencia a las diagonales de un polígono, se les puede mostrar el caso particular de un heptágono de la siguiente manera: “si de un solo vértice se pueden trazar 4 diagonales, entonces, como el heptágono tiene 7 vértices, en total se podrán trazar 7x4 = 28”, ¿es correcta dicha afirmación?... sin embargo, cuando trazamos todas las diagonales son 14, ver figura adjunta, ¿qué está pasando con nuestro razonamiento?



Es interesante la expresión y actitud de los estudiantes cuando se les plantea este caso. Luego, ellos mismos, o con la mediación del docente, descubrirán el error en el razonamiento. Vemos pues que no es necesario ir muy lejos de los contenidos que estamos trabajando, sino de que la forma como los presentamos provocará el conflicto cognitivo en ellos, y en consecuencia el desarrollo de sus capacidades.

El término “paradoja” viene del griego (para y doxos) y significa "más allá de lo creíble." En la actualidad la palabra "paradoja" tiene varias connotaciones:

- Afirmación que parece falsa, aunque en realidad es verdadera.
- Afirmación que parece verdadera, pero en realidad es falsa.
- Cadena de razonamientos aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas. (Las paradojas de esta clase suelen llamarse falacias.)
- Declaración cuya veracidad o falsedad es indecidible. Es decir no se puede demostrar que sea falso o verdadero.
- Encierra en sí misma contradicciones.

Las paradojas matemáticas, como las de otras ciencias, pueden ser mucho más que amenidades, y llevarnos hasta nociones muy profundas. A los primeros pensadores griegos les resultaba tan paradójico como insoportable que la diagonal de un cuadrado de lado unidad no pudiera ser medida exactamente por finas que se hicieran las graduaciones de la regla. Este hecho perturbador sirvió para abrir el vasto dominio de los números irracionales. Los matemáticos del siglo pasado encontraban enormemente paradójico que todos los elementos de un conjunto infinito puedan ponerse en correspondencia biunívoca con los elementos de algún subconjunto del dado; mientras por otra parte, podían existir conjuntos infinitos entre los cuales es imposible establecer una correspondencia biunívoca. Tales paradojas condujeron a desarrollar la moderna teoría de conjuntos, que a su vez ha ejercido profunda influencia sobre la filosofía de la ciencia. Mucho podemos aprender de las paradojas. Es difícil analizar en pocas palabras el atractivo de las paradojas, pero probablemente se debe a la contradicción inesperada que surge en la que - en general - se considera la única ciencia "exacta". Y una paradoja es siempre instructiva, porque para aclarar el enfadoso razonamiento se necesita hacer un análisis muy detenido de los principios fundamentales que lo afectan. A continuación, presentamos dos falacias para analizar:

Ejemplo 1

Tesis: $2 = 1$

Argumentación:

1) Sean a, b números, con $a = b$ (Hipótesis)

2) $a^2 = a.b$

3) $a^2 - b^2 = a.b - b^2$
4) $(a - b)(a + b) = (a - b)b$
5) $a + b = b$
6) $b + b = b$
7) $2b = b$
8) $2 = 1$

**Ejemplo 2**

$2 = \sqrt{4} = 4^{1/2} = \left[(-2)^2\right]^{1/2} = (-2)^{2x1/2} = (-2)^1 = -2$, por transitividad $2 = -2$

La conclusión en ambos ejemplos es falsa y la argumentación, aunque parece correcta, contiene uno o más errores que usted debe encontrar. Así en el ejemplo 1, el paso 5 es un error, pues sólo podemos cancelar, si $a - b \neq 0$, es decir si $a \neq b$, lo cual contradice a nuestra hipótesis inicial. En consecuencia lo que sigue ya no tiene justificación matemática y se puede llegar a cualquier relación. A su vez, para el ejemplo 2, el paso 4 es correcto sólo si la base es positiva.

La utilización de las paradojas hay que hacerlas oportunamente, mejor cuando ya se desarrolló el tema y nos queremos cerciorar si los conceptos quedaron claros.

### 3.1.2 COMUNICACIÓN MATEMÁTICA

La comunidad científica, los diversos equipos profesionales de las diferentes áreas del conocimiento, los comunicadores y, en general, todos para comunicamos y entendernos mejor, usamos cada vez más el recurso gráfico: gráficas estadísticas bidimensionales o tridimensionales, tablas o cuadros de doble entrada, diagramas de flujos, mapas, etc. Así también, el uso de símbolos matemáticos por diversos equipos de profesionales se hace más cotidiano, pues simplifica la información. Es decir, se entiende la matemática como la herramienta que ofrece potentes recursos en la comunicación. Esto es reconocido en la frase: “La matemática es un medio de comunicación potente, económico y sin ambigüedades” (Cocckcroft, 1988).

En tal sentido el alumno ya posee nociones sobre estos recursos de comunicación, de modo que ya tenemos una ventaja y desventaja a la vez, pero este hecho nos sirve para planificar y ejecutar adecuadamente nuestro trabajo pedagógico. Cuando decimos desventaja nos referimos fundamentalmente a la interpretación adecuada e inteligente que debemos hacer de estos recursos, pues a veces son utilizados para inducirnos hacia una interpretación tendenciosa, la cual no necesariamente es rigurosa.

Por ejemplo podemos aprovechar algunos entretenimientos saludables de los estudiantes, como son los deportes.

### ¿CUÁL ES TU DEPORTE PREFERIDO?

Generalmente los deportes que se practican con mayor frecuencia en las Instituciones Educativas son: fútbol, básquet, vóleibol, atletismo y ajedrez.

Gabino, Doris y Begonia, estudiantes y amigos de la I.E. "MICOLE" cursan, respectivamente, los tres primeros grados de Secundaria y quieren saber las preferencias de sus amigos, en dichos grados de estudios, en la práctica de estos deportes. Para ello han realizado una encuesta a un grupo de compañeros, tomados al azar, mediante la pregunta: ¿Qué deporte practicas con más frecuencia?, aclarando que estos debían indicar no más de un deporte.

De la información recogida se obtuvo los siguientes resultados:

| Deporte | Primer Grado | | Segundo Grado | | Tercer Grado | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Varones* | *Mujeres* | *Varones* | *Mujeres* | *Varones* | *Mujeres* |
| Fútbol | 12 | 0 | 13 | 0 | 8 | 0 |
| Básquet | 10 | 10 | 9 | 10 | 6 | 14 |
| Vóleibol | 3 | 4 | 5 | 2 | 0 | 2 |
| Atletismo | 9 | 5 | 8 | 5 | 8 | 7 |
| Ajedrez | 4 | 1 | 4 | 2 | 4 | 0 |
| Ninguno | 24 | 19 | 10 | 19 | 4 | 10 |

Te convencerás que los datos recopilados han sido organizados en esta tabla, la cual nos permite una mejor lectura y obtener algunas conclusiones. Este es uno de los objetivos de la estadística: organizar información y plasmarla en tablas, cuadros, gráficas y otros a fin de una mejor interpretación de los acontecimientos y tomar decisiones responsables.

En base al cuadro podemos afirmar que:

- La celda de la 4ta. fila y 1ra. columna nos expresa que hay 9 varones del primer grado que practican frecuentemente atletismo ... ¡Engloba tres conceptos!
- El total de mujeres encuestadas del tercer grado fueron: 0 + 14 + 2 + 7 + 0 + 10 = 33.

**COMPLETA Y RESPONDE:**

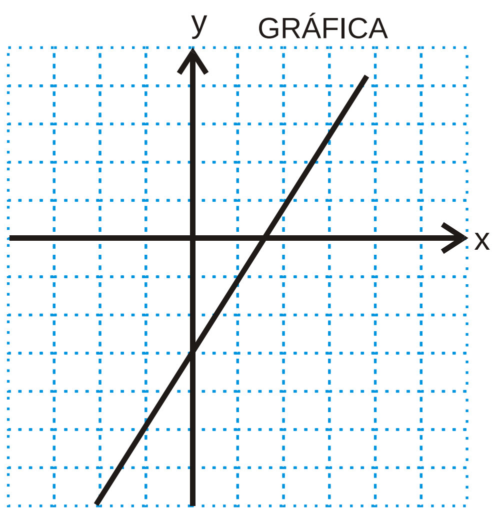
- En el segundo grado se encuestaron a .... varones y …. mujeres.
- La mayoría de los varones del tercer grado que practican deportes prefieren: ...................... y .....................
- El total de alumnos encuestados en el primer grado fue: ........
- ¿Cuál es el porcentaje de ajedrecistas en el tercer grado?
- ¿Cuál es el porcentaje de mujeres respecto del total de los encuestados?
- ¿Qué deporte es el más practicado en el primer grado?
- Elabora un diagrama de barras sobre los deportes practicados en el primer grado donde se pueda comparar las aficiones de los varones y mujeres.

Mediante el desarrollo de la comunicación matemática no sólo podemos aprender a representar ideas mediante los diversos recursos algebraicos o gráficos: codificar, sino también a expresar en otra forma de lenguaje lo que se tiene: recodificar.

Esto lo vemos, por ejemplo, cuando tratamos las "funciones" en nuestra labor pedagógica. Muchas de las funciones que se desarrollan en la Secundaria se pueden expresar mediante una tabla (tabulación), gráficamente o mediante su regla de correspondencia. En tal sentido es conveniente que el estudiante a partir de una de las formas de expresión (codificación) de una función pueda, no sólo interpretarla (decodificación), sino expresarla en otra de las formas (recodificación)

**REGLA DE CORRESPONDENCIA**
**$f(x)=2x-3$**

| TABLA | |
|---|---|
| X | f(X) |
| -2 | -7 |
| -1 | -5 |
| 0 | -3 |
| 1 | -1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 5 |
| 5 | 7 |
| 6 | 9 |
| --- | --- |




### 3.1.3 RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En la actualidad esta capacidad es considerada como medular en el quehacer matemático, según vimos anteriormente. Su aplicación metodológica requiere mucha pericia por parte del docente al igual que su aprendizaje para el estudiante.

Partamos por precisar qué entendemos por un problema, pues este será nuestro objeto de trabajo permanente. En La OTP-2005 se define como: "una situación a la que se enfrenta un individuo o un grupo para la cuál no se vislumbra un camino aparente u obvio que conduzca hacia su solución."

Juan Antonio García Cruz[16] considera que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

**1) Aceptación.** El individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.

**2) Bloqueo.** Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.

**3) Exploración.** El compromiso personal o del grupo fuerza la exploración de nuevos métodos para enfrentar el problema.

Un problema involucra la aplicación de múltiples capacidades: nos va a exigir una lectura cuidadosa, explorar alguna estrategia que nos permita resolverlo, analizar los datos conocidos, las incógnitas, buscar relaciones nuevas entre ellos, realizar conjeturas, es preciso poner en juego conocimientos diversos, no sólo matemáticos, toma de decisiones, etc.

No está de más reiterar que se debe poner énfasis en proponer situaciones para las cuales no existan a la vista algoritmos que la resuelvan, que no necesariamente conduzcan a una respuesta única, en suma que propicien el desarrollo de las capacidades fundamentales.

### Procesos para resolver problemas

Se han determinado una variedad de pautas que están presentes en el proceso de la resolución de problemas. Para George Polya[17] la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases, las cuales describiremos textualmente como él las enunció:

**Comprender el problema.** Es decir entender de qué se trata y qué solicita la situación presentada. Ello significa responder a las preguntas:

- ¿Cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?, ¿es la condición suficiente para determinar la incógnita?, ¿es insuficiente?, ¿redundante?, ¿contradictoria?



16 Juan Antonio García Cruz: La Didáctica de las Matemáticas: una visión general.
17 George Polya: Matemático húngaro. Autor de “How to solve it” (1945)

**Concebir un plan** Idear una estrategia que nos conduzca a la solución del problema. Para ello se debe tomar en cuenta:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante? o ¿ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado con éste?, ¿conoce algún teorema que le pueda ser útil? Mire atentamente la incógnita y trate de recordar un problema que le sea familiar y que tenga la misma incógnita o una incógnita similar.
- He aquí un problema relacionado al suyo y que se ha resuelto ya. ¿Podría utilizarlo?, ¿podría utilizar su resultado?, ¿podría emplear su método?, ¿le haría falta introducir algún elemento auxiliar a fin de poder utilizarlo?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma?, ¿podría plantearlo en forma diferente nuevamente?
- Si no puede resolver el problema propuesto, trate de resolver primero algún problema similar. ¿Podría imaginarse un problema análogo un tanto más accesible?, ¿un problema más general?, ¿un problema más particular?, ¿puede resolver una parte del problema? Considere sólo una parte de la condición, descarte la otra parte. ¿En qué medida la incógnita queda ahora determinada?, ¿en qué forma puede variar?, ¿puede deducir algún elemento útil de los datos?, ¿puede pensar en algunos otros datos apropiados para determinar la incógnita?, ¿puede cambiar la incógnita?, ¿puede cambiar la incógnita o los datos, o ambos si es necesario, de tal forma que la nueva incógnita y los nuevos datos estén más cercanos entre si?
- ¿Ha empleado todos los datos?, ¿ha empleado todas las condiciones?, ¿ha considerado usted todas las nociones esenciales concernientes al problema?

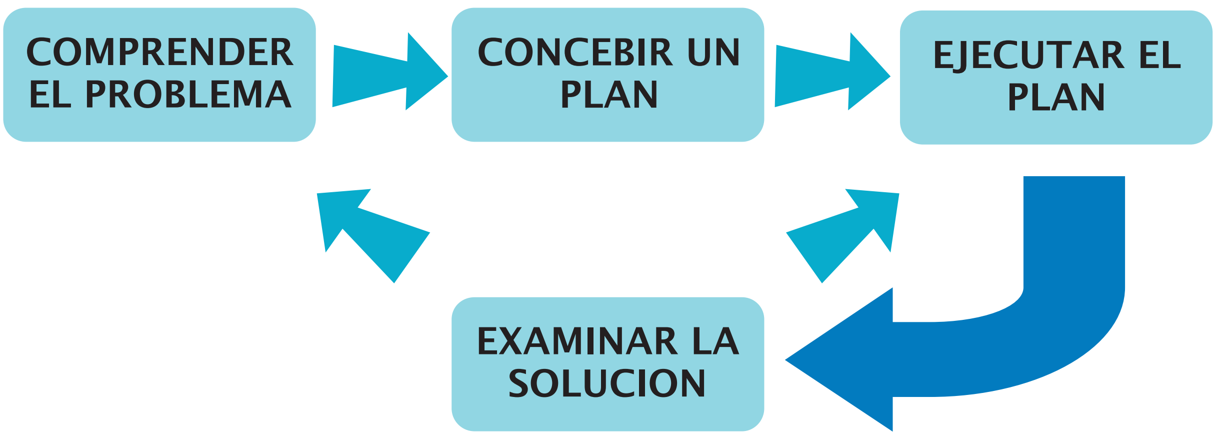
**Ejecución del plan**

- Al ejecutar su plan de solución compruebe cada uno de los pasos.
- ¿Puede usted ver claramente que el paso es correcto?, ¿puede usted demostrarlo?

**Examinar la solución obtenida**

- ¿Puede usted verificar el resultado? ¿puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?, ¿puede verlo de golpe?, ¿puede usted emplear el re sultado o el método en algún otro problema?

Podemos esquematizar la propuesta de G. Polya. En la figura, se observa que el problema no termina cuando se obtiene una solución, sino cuando el estudiante o el docente lo decidan. La fase de examinar el proceso realizado es de suma importancia, pues habitúa al estudiante a gestionar mejor su pensamiento.




Al respecto podemos añadir que este proceso es interativo, las fases a veces se superponen y el estar en una de ellas no significa que las demás no estén presentes. Además, resaltar que la última fase es una de las más importantes en la vida diaria, y poco aprovechada, pues nos hace concientes de reflexionar acerca del camino llevado acabo en la resolución del problema, del control y regulación que debemos hacer de dicho proceso. A esto se denomina metacognición.

Vamos a ilustrar estas fases con la resolución de un problema: “los soldados de una compañía de 2000 hombres deben ubicarse, según el número que les haya tocado, en una de las cinco columnas como indica el cuadro en la formación de los primeros. Pero a David le tocó el número 1794, sin embargo no necesita esperar que todos los anteriores a él estén ubicados para saber a qué columna pertenece, ¿puedes averiguar a cuál de ellas le corresponde?”

| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | |
| | 8 | 7 | 6 | 5 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | |
| | 16 | 15 | 14 | 13 |
| 17 | - | - | - | |
| | - | - | - | - |
| - | - | - | - | |

**Resolución**

| COMPRENDER EL PROBLEMA | CONCEBIR UN PLAN | EJECUTAR EL PLAN |
|---|---|---|
| • ¿Cómo están distribuidos los números?<br>• Al terminar una fila para pasar a la siguiente se corre una columna y siguen los números, pero en otro sentido.<br>• Haré algunas filas más para entender la distribución correcta. | • Puedo continuar ubicando los números y llegar al 1794, pero demoraré demasiado.<br>• En la 1ra, 3ra y 5ta no puede estar porque allí sólo están los impares.<br>• Sólo puede ubicarse en la 2da o 4ta columna.<br>• En la 1ra y 5ta van de 8 en 8, en la 3ra de 4 en 4; en cambio, en las otras columnas varían en su formación. | • Tomaré la 1ra columna, a ver a donde llego. En ésta todos los números al dividir entre 8 dan 1 como residuo. Además los números que siguen siempre se ubican hacia la derecha.<br>• Es decir si 1794 entre 8 da residuo 1, entonces estará en la 1ra columna<br>$\begin{array}{r\|l} 1794 & \underline{\ 8\ \ \ } \\ 2 & 224 \end{array}$<br>• ¡Por 1!, entonces 1793 si está en la 1ra columna. Y los que siguen se ubican hacia la derecha, entonces 1794 está en la 2da. Columna. |

**EXAMINAR LA SOLUCIÓN**

Hay otras formas de llegar a la solución. Por ejemplo al completar más filas se puede notar que los números 8, 16, 24, 32, 48, ..., es decir los múltiplos de 8 están en la 2da columna y el número que sigue corre a la izquierda y los que siguen van a la derecha. Entonces, según la división hecha, 1792 está en la 2da columna, luego:

| I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|
| - | - | - | - | - |
| | **1792** | - | - | - |
| 1793 | 1794 | - | - | - |
| | - | - | - | - |

Otra forma sería tomando la 3ra, es más simple de entender que las otras, no sólo van de 4 en 4, sino que allí están todos los números que al dividirse por 4 se obtiene 3 de residuo. Pero el problema es que a partir de esa columna hay dos posibilidades de continuar: a la derecha o a la izquierda . . .

**Schoenfeld**[18], a su vez, nos da cuenta de la importancia de tomar decisiones durante el proceso de resolución, las llama: *decisiones ejecutivas*. Estas influyen significativamente durante el proceso, pues permitirán usar de manera más eficiente

18 Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, New York.

nuestros recursos y habilidades mentales. Entre ellas señala:

- Hacer un plan.
- Seleccionar objetivos centrales y sub-objetivos.
- Evaluar el proceso de resolución a medida que evoluciona.
- Revisar o abandonar planes cuando su evaluación indica que hay que hacerlo.

Cuanto más precisas sean las respuestas a las preguntas ¿qué estoy haciendo?, ¿por qué lo hago?, ¿para qué lo hago?, ¿cómo lo usaré después?, mejor será el control global que se tenga sobre el problema y sobre las decisiones que conducen a su solución.

Hay otras actitudes que imposibilitan la toma de buenas decisiones durante la fase de resolución. Entre ellas cabe destacar:

**• Inflexibilidad para considerar alternativas.**

Cuando una y otra vez fallan los procedimientos empleados no hay más salida que cambiar de perspectiva para salir del bloqueo.

**• Rigidez en la ejecución de procedimientos.**

Más de una vez intentaremos encajar un procedimiento conocido en una situación en la que no es aplicable. Nuestra obstinación es debida al simple hecho de que nos parece apropiado a primera vista, o porque la situación, aunque distinta, se parece a aquella en que el procedimiento fue eficaz.

**• Incapacidad de anticipar las consecuencias de una acción.**

Al respecto cabe hacerse siempre la siguiente pregunta antes de ejecutar una acción pensada: cuando haya ejecutado lo que pienso ¿qué consecuencias tendrá para la resolución del problema?

**• El efecto "túnel".**

Se produce cuando la ejecución de una tarea es tan absorbente que no hay energías disponibles para la evaluación de lo que se esta realizando. Suele darse más fácilmente cuanto más embebido se esta en la ejecución de una acción.

Miguel de Guzmán[19] partiendo de las ideas de Polya, Schoenfeld y otros elaboró el siguiente modelo:

**Familiarízate con el problema**

- Trata de entender a fondo la situación.
- Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar "el aire" del problema, piérdele el miedo.

**Búsqueda de estrategias**

- Empieza por lo fácil.
- Hazte un esquema, una figura, un diagrama.
- Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
- Supongamos el problema resuelto.

**Lleva adelante tu estrategia**

- Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te han ocurrido en la fase anterior.
- Actúa con flexibilidad. No te desanimes fácilmente. No te enfrasques en una idea. Si las cosas se complican demasiado elige otra vía.



[19] Miguel De Guzmán (1991). Para pensar mejor. Labor

### Revisa el proceso y saca conclusiones de él

- Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución?, o bien, ¿por qué no llegaste?
- Observa si encuentras un camino más simple.
- Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca conclusiones para el futuro.

Estas sugerencias se han sistematizado en base a las observaciones hechas en las aulas, atendiendo a los procesos que surgen con los más expertos en resolver problemas como con los que tienen cierta dificultad en ello. Pues como sabemos, el aula es un laboratorio del cual debemos aprender lo máximo posible para mejorar en la enseñanza y el aprendizaje. Sin embargo hay que precisar que en la práctica uno no siempre procede de este modo racional, según las fases, como lo planteado, sino transitamos en la incertidumbre, ensayando, hasta dar con una idea útil para el problema.

Finalmente, complementamos con algunas ideas que el docente puede tomar en cuenta:

- El docente no debe resolver solo los problemas, sino con la participación activa de los estudiantes.
- El estudiante debe estar motivado para resolver la situación, le debe interesar, debe aceptar el desafío que le plantea el problema.
- El docente debe promover el ensayo, la experimentación, valorar el error del estudiante.
- El docente debe leer adecuadamente el enunciado de un problema y, lo más importante, promover en los estudiantes la comprensión lectora. Que el estudiante lea las veces que sean necesarias hasta comprender el problema.
- Ejecutar diversas estrategias sugeridas por el docente y los estudiantes; estrategias sencillas, elegantes, complicadas o tediosas que nos lleven a la solución del problema e incluso aquellas que no nos conducen a la solución. De todas ellas se aprende, permiten reflexionar sobre nuestro pensamiento y nos prepara para futuras situaciones.
- Promover la argumentación de las soluciones de los estudiantes, ellos tienen mucho que aprender de sus compañeros como también nosotros.
- Cuando nos toque explicar la resolución de un problema, simular que nosotros no sabemos con antelación la respuesta ni el procedimiento.

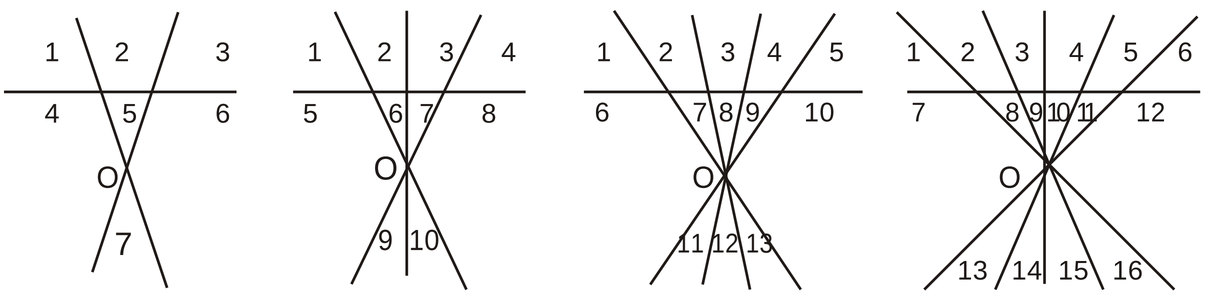
Ejemplo: **Rectas concurrentes**

Se trazan 43 rectas en el plano, concurrentes en un punto O. Ahora trazamos una recta que no pasa por O y que no es paralela a ninguna de las 43 anteriores. ¿En cuántas regiones queda dividido el plano?

## RESOLUCIÓN

Luego de entender el enunciado se deduce que se trata de un problema que requiere del elemento gráfico. Pero son muchas rectas para dibujarlas y analizarlas a la vez, entonces conviene particularizar el problema, es decir trazar sólo las necesarias y tratar de encontrar alguna relación lógica o patrón, para luego retomar el problema original.

Para 2 Para 3 Para 4 Para 5



**Tabulamos la información**

| Nro. Rectas concurrentes | Regiones generadas |
|---|---|
| **2** | **7** |
| **3** | **10** |
| **4** | **13** |
| **5** | **16** |
| **6** | **19** |
| **...** | **...** |
| **43** | **?** |

Entendemos que el número de regiones determinadas depende de la cantidad de rectas concurrentes. Entonces debemos hallar la relación matemática entre ellas. Analizando, deducimos que es el triple de rectas y uno más. Es decir para 43 rectas se generarán: 3x43 + 1 = 130 regiones

**REFLEXIÓN:** Debe haber otra(s) estrategia(s) para abordar la solución. Asimismo, podemos plantear algunas cuestiones, para identificar qué parte del proceso fue dificultoso para muchos de ellos.

i) Si fuesen 100 las rectas concurrentes, ¿cuántas regiones se generarían?

........................................................................
........................................................................
........................................................................

ii) Si el número de regiones obtenidas es 220, ¿cuántas rectas concurrentes se han trazado?

........................................................................
........................................................................
........................................................................

iii) ¿Es posible que se generen 500 regiones para una cantidad de rectas concurrentes?, ¿por qué?

........................................................................
........................................................................
........................................................................

iv) Si sólo nos hubiesen pedido las regiones generadas por las 43 rectas concurrentes en "O", ¿cuántas regiones se generarían?

........................................................................
........................................................................
........................................................................
........................................................................

v) ¿En cuánto aumenta el número de regiones al trazar una recta que no pasa por "O"?

........................................................................

vi) Con las dos informaciones anteriores podemos saber cuántas se generan en total. ¿Cuántas son?

........................................................................

vii) Si "n" es el número de rectas concurrentes y "r" el total de regiones generadas, ¿cuál es la relación matemática entre ambas variables?

........................................................................

viii) Para el problema original, ¿cuántas regiones se generarían en total si en lugar de una se trazan dos rectas paralelas que no pasan por "O"?

........................................................................
........................................................................
........................................................................
........................................................................
........................................................................

ix) Si en lugar de 2 paralelas, se hubiesen trazado 40 paralelas que no pasan por "O", ¿cuántas regiones se generarían?

........................................................................
........................................................................
........................................................................

Valga la oportunidad para aclarar algunas posturas extremas que se adoptan y nos conducen a resultados negativos. No estamos proponiendo que los problemas conocidos, para los cuales ya existe un algoritmo estandarizado, no los desarrollemos en clase. Lo que se cuestiona, y no es coherente con el desarrollo del pensamiento es la metodología empleada, el mensaje matemático sobre la unicidad de respuestas o estrategias empleadas, sabiendo que existen otras e incluso puede haber más de una solución. Aquí radica la importancia del criterio y la experiencia pedagógica de los docentes para una adecuada aplicación de las sugerencias dadas.

## 3.2 CAPACIDADES ESPECÍFICAS[20] PRESENTES EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Frecuentemente utilizamos más de una capacidad específica en el desarrollo de las capacidades de área y fundamentales, y de manera particular en el pensamiento matemático. El conocimiento de lo que es cada una de estas nos ayudará a planificar nuestras estrategias, así como nuestros criterios e indicadores de evaluación. A continuación describimos un conjunto de capacidades específicas con su respectivo ejemplo:

- ***Definir;*** es explicar la naturaleza de un ente matemático o fijar la significación de un objeto matemático.

  Ejemplos:

  Dos ángulos son complementarios, si y sólo sí, la suma de sus medidas es 90°.

  En un triángulo rectángulo, el seno de un ángulo agudo se obtiene del cociente de la longitud de su cateto opuesto entre la longitud de su hipotenusa.

- ***Demostrar***; es establecer una sucesión finita de pasos para fundamentar la veracidad de una proposición o su refutación.

  Ejemplo:

  Cuando se demuestra que “la medida de un ángulo exterior a un triángulo es la suma de las medidas de los ángulo interiores no adyacentes.”

[20] Adaptado de las habilidades generales matemáticas y la estructuración del conocimiento,: Lic. Juan Raúl Delgado Rubí. Instituto Superior Politécnico “José A. Echeverría”.La Habana, Cuba.

• ***Identificar***; es distinguir el objeto de estudio matemático, sobre la base de sus rasgos esenciales. Es determinar si el objeto pertenece a una determinada clase de objetos que presentan ciertas características distintivas.

Ejemplos:

De los siguientes números: 57; 65; 41; 2007; 401, 143, los que son primos son: ...

De los siguientes triángulos: ..., son isósceles: .......

• ***Interpretar;*** es atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o del problema a resolver.

Ejemplo:

La longitud de un cateto de un triángulo rectángulo satisface la ecuación $x^2 - x - 12 = 0$. De las raíces, -3 y 4, tomaremos sólo 4, pues no hay longitud negativa.

• ***Recodificar;*** es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. Es expresar el mismo tipo de objeto a través de formas diferentes; esto es, el uso de símbolos diferentes para un mismo modelo.

Ejemplos:

Exprese simbólicamente: “hace diez años, la edad de Juan era el doble de la edad de Alicia”. Si **x** e **y** representan las edades actuales de Juan y Alicia respectivamente, entonces la afirmación anterior queda simbolizada por: $x - 10 = 2(y - 10)$.

La ecuación ordinaria de la cónica $y^2 - 2y - 4x + 13 = 0$ es $(y - 1)^2 = 4(x - 3)$.

• ***Graficar;*** es representar relaciones entre objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista geométrico, como de diagramas o tablas; y recíprocamente, colegir las relaciones existentes a partir de su representación gráfica.

Ejemplos:

Representa la grafica de la curva que corresponde a la ecuación: $x^2 - 2x + y^2 = 8$

Realiza un diagrama de flujo que plasme el proceso seguido en la resolución de un problema determinado.

• ***Calcular;*** es aplicar un algoritmo de una o más operaciones. Este proceso puede ser manual, mental o usando tablas, calculadoras, etc.

Ejemplo:

Halla el valor numérico de $E = x^2 - 3xy + y$, para $x = 4$, $y = -1$.

• ***Modelar;*** es asociar a una situación o fenómeno, matemático o no, una relación o correspondencia matemática que represente determinados comportamientos o características, con el objetivo de ser investigado a través de él.

Ejemplo:

La siguiente situación: “Cuando el aire seco se eleva, se expande y enfría. Si la temperatura en el suelo es de 20°C y la temperatura a un kilómetro de altura es de

10°C”. Suponiendo que un modelo lineal es apropiado podemos expresar la temperatura “T”, en grados centígrados, en función de la altura “h” en kilómetros de la siguiente manera: $T = -10h + 20$.

• ***Comparar;*** es establecer una relación entre lo cuantitativo o cualitativo que hay entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase. Identificar rasgos o características en que se diferencian dos o más objetos o situaciones sobre la base de un criterio.

Ejemplo:

Para decidir si un elemento pertenece o no a un conjunto, al contrastar la forma de dos figuras, al hacer estimaciones de magnitudes, etc.

• ***Optimizar;*** es encontrar al objeto (valor numérico, función, conjunto, etc.) que maximiza o minimiza (en algún sentido) la clase de objetos a la que pertenece o el método óptimo de resolución de un determinado problema.

Ejemplo:

Al hallar el precio óptimo de venta de un determinado artículo o al determinar el método más apropiado para resolver una ecuación, etc.

• ***Aproximar;*** es sustituir un objeto por otro al cual se considera un modelo suyo. Es conjeturar sobre las posibles soluciones a obtener o pronosticar características de las mismas.

Ejemplo:

La velocidad de la luz en el vacío es 299 999 km/s, pero para efectos operativos o referenciales usamos comúnmente 300 000 km/s.

• ***Resolver;*** es encontrar un método o vía que conduzca a la solución de un problema.

Ejemplo: Los 35 alumnos de una clase deciden confraternizar su amistad, para ello todos se saludan con un fuerte abrazo. ¿Cuántos abrazos hubo?

## 3.3 APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA A SITUACIONES PROBLEMÁTICAS DE LA VIDA COTIDIANA

### 3.3.1 MODELACIÓN MATEMÁTICA

Dentro de los aprendizajes esperados que se piensa lograr en la Educación Secundaria, la modelización es de gran importancia, pues permite al alumno aplicar los recursos matemáticos útiles para la solución de diversas situaciones problemáticas de la vida cotidiana. También somos concientes que esta práctica aún no es habitual en nuestro quehacer matemático, pero sí una necesidad ineludible para que tenga sentido el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática durante la Educación Básica Regular, de modo que promover esta actividad requiere de pericia y voluntad.

Entendemos por “modelo” a la descripción matemática que se realiza de una situación real, que explica su comportamiento y nos permite realizar predicciones sobre su futuro comportamiento.

La modelización matemática se entiende como el proceso por el cual se interpreta matemáticamente situaciones para tomar algún tipo de decisión, lo que implica centrarse en elementos de la situación, sus relaciones, patrones y características, teniendo como producto un modelo en algún nivel de sofisticación con relación al propósito.

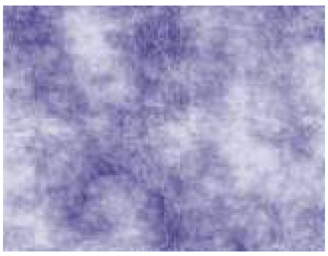
En un principio podemos iniciar al alumno invitándolo a participar en situaciones lúdicas que permitan desarrollar su capacidad de generalización para lograr modelizar la situación problemática. Y en un segundo momento abordar situaciones de su interés o de la vida cotidiana. El alumno debe descubrir el concepto o proceso subyacente en la situación planteada. Esto definitivamente lo logrará con la práctica.

Presentamos, a continuación, tres ejemplos que pueden servir de guía para el docente y así promover en los estudiantes la creatividad a partir de la construcción de relaciones matemáticas que le permitan predecir el comportamiento de diversos fenómenos.

### i) Aplicación de funciones cuadráticas

Se quiere cercar un terreno rectangular con 200 m de tela metálica. ¿Cuáles deben ser las medidas de las longitudes de los lados del terreno para que el área comprendida sea la máxima posible?

x



y

Perímetro

$2x + 2y = 100$

$x+y = 100$

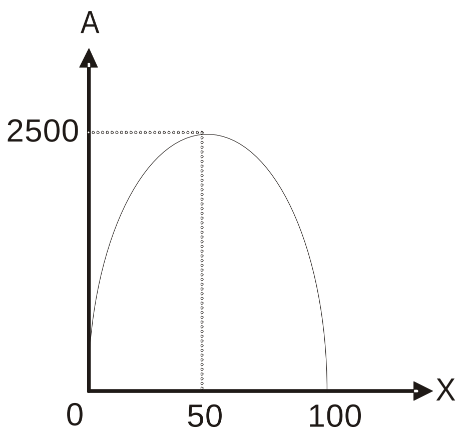
$y = 100-x$

Área

$A = x(100-x)$

$A = 100x - x^2$

$A = 2500 - (x - 50)^2$




Según el procedimiento usado, el área del terreno rectangular está en función de su base “x”. Es decir: $A(x) = 100x – x^2$. Se trata de una función cuadrática, cuya gráfica es una parábola, abierta hacia abajo. Y por nuestros estudios sabemos que tomará su valor máximo en su vértice (50; 2500)

## ii) Programación Lineal

La Programación Lineal fue desarrollada por George B. Dantzig al final de la década de 1940, y la Fuerza Aérea de Estados Unidos fue quien la utilizó primero como una ayuda en la toma de decisiones. Actualmente tiene una amplia aplicación en el análisis industrial y económico.

Algunas veces se desea maximizar o minimizar una función sujeta a algunas restricciones. Por ejemplo, un fabricante puede querer maximizar una función de utilidad sujeta a las restricciones de producción, que imponen las limitaciones sobre el uso de la maquinaria y mano de obra. Ahora consideraremos cómo resolver tales problema cuando la función a maximizar o minimizar es lineal, es decir, la función es de la forma $Z = ax + by$, donde $a$ y $b$ son constantes. También requeriremos que las restricciones estén representadas por un sistema de desigualdades lineales que incluyan "$\leqslant$" o "$\geqslant$" o ecuaciones lineales en **x** y **y**, además que todas las variables sean no negativas. Un problema con todas estas condiciones se llama Problema de Programación Lineal.

En un Problema de Programación Lineal, la función a optimizar se llama función objetivo. Por lo general existe un número infinito de soluciones para el sistema de restricciones llamadas soluciones factibles, la meta es encontrar una que sea una solución óptima de la función objetivo. A continuación daremos un enfoque geométrico de la Programación Lineal.

Consideremos el problema siguiente: Un fabricante de juguetes prepara un programa de producción para dos nuevos juguetes, muñecas y soldados, teniendo como base la información concerniente a sus tiempos de producción dados en la tabla adjunta

| | *Máquina A* | *Máquina B* | *Acabado* |
|---|---|---|---|
| Muñecas | 2 hr | 1 hr | 1 hr |
| Soldados | 1 hr | 1 hr | 3 hr |

Por ejemplo, cada muñeca requiere de 2 horas en la máquina A. Las horas disponibles empleadas por semana son: para operación de la máquina A, 70 horas; para la B, 40 horas; para acabado, 90 horas. Si las utilidades en cada muñeca y cada soldado son de US$4 y US$6, respectivamente, ¿cuántos juguetes de cada uno debe producir por semana el fabricante con el fin de maximizar la utilidad?, ¿cuál es esa utilidad máxima?

Para resolver el problema, definimos **x** y **y** como el número de muñecas y soldados a producir por semana respectivamente. Note que, **$x \geq 0$** y **$y \geq 0$.**

Las horas disponibles para operación en la máquina A son 70, de modo que $2x + y \leq 70$.

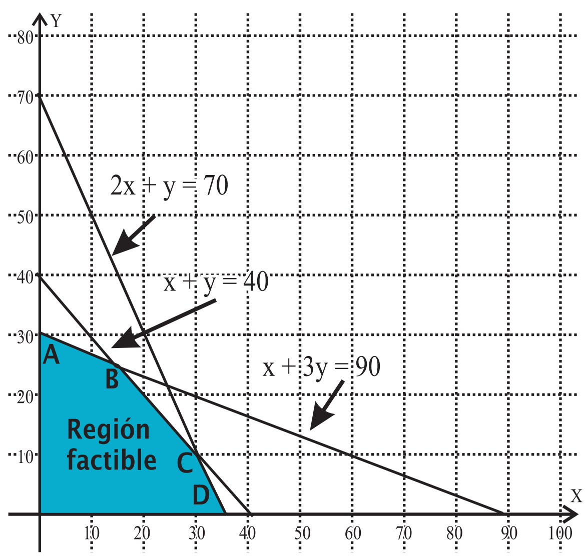
De manera semejante, las restricciones para la máquina B y acabado dan $x + y \leq 40$; $x + 3y \leq 90$.

La utilidad U está dada por la función de utilidad $U(x;y) = 4x + 6y$.

En resumen, queremos maximizar la función objetivo $U(x;y) = 4x + 6y$, sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 70 \\ x + y \leq 40 \\ x + 3y \leq 90 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$

La última de las restricciones se llama condición de no negatividad. La región que satisface de manera simultánea las restricciones está sombreada en la figura. Cada punto en esta región representa una solución factible, y dicha región se llama **región factible.**




La función objetivo $U(x;y) = 4x + 6y$ es equivalente a

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{U}{6}$$

que define una familia de rectas paralelas, cada una con pendiente –2/3 e intersección con el eje Y en (0; U/6).
Para cada valor de U la recta es llamada de isoutilidad, y da todas las combinaciones posibles de **x** y **y** con las que se obtiene la misma utilidad.

Busquemos un miembro de la familia de rectas que tenga un punto factible y cuyo valor de U sea máximo.

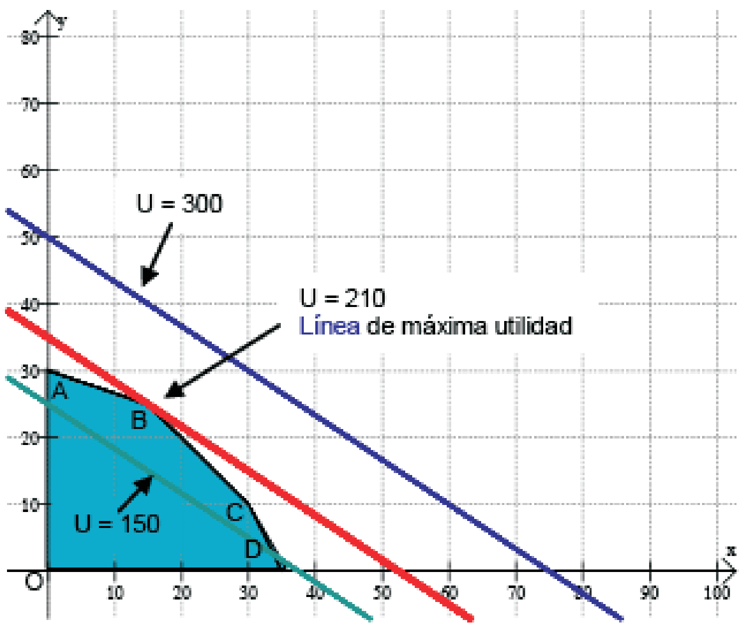
Para U = 150, $y = -\frac{2}{3}x + 25$

Para U = 300, $y = -\frac{2}{3}x + 50$

Para U = 210, $y = -\frac{2}{3}x + 35$

Esta será la recta cuya intersección con el eje Y sea la más lejana del origen y que al mismo tiempo tenga al menos un punto en común con la región factible.

En el gráfico observamos que la recta de máxima utilidad se obtiene para U = 210 y se alcanza en el punto B(15; 25); es decir, la máxima utilidad es de US$210 para x = 15 muñecas; y = 25 soldados




### iii) Geometría Analítica

En el puente colgante que se muestra en la figura adjunta, la forma de los cables de suspensión es parabólica. Los pilones u horcas (torres de apoyo), están separados 600 metros de distancia, el punto más bajo de los cables portadores está a 150 metros por debajo del extremo superior de los pilones y la losa del puente está 10 m por debajo del punto más bajo del cable parabólico. Además, la estructura cuenta con dos tirantes laterales que conectan las partes superiores de los pilones con los extremos del puente. Cada tirante es un cable perpendicular a la recta tangente a la parábola en su punto de contacto con el pilón.

1. Deduzca la ecuación de la parte parabólica de los cables, colocando el origen del sistema de coordenadas en el vértice.

2. Determine a qué distancia de los pilones se empotra el tirante en la losa.

Ecuación de la recta tangente a una parábola en el punto de contacto $(x_1;y_1)$

- Sea la ecuación de la parábola $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ -----------------------(I)
- Sea la ecuación de la recta tangente de la forma $y = mx + b$
- El punto de contacto $(x_1;y_1)$ también pertenece a la recta tangente $y = mx + b$, entonces , luego $y_1 = mx_1 + b$, luego $b = y_1 - mx_1$
- La ecuación de la recta tangente es de la forma $y = mx + y_1 - mx_1$ --------(II)
- Reemplazando (II) en (I), obtenemos la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$
- Para la tangencia, el discriminante de esta cuadrática debe ser igual a cero. Luego encontraremos el valor de m.
- Reemplazando el valor de m en la ecuación (II) obtenemos la ecuación de la recta tangente.

### 3.3.2 ACTIVIDADES LÚDICAS PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

El juego tiene una estructura similar a la matemática. Su desarrollo se basa en reglas que se deben respetar y aplicando estas se pueden obtener y predecir resultados, descubrir estrategias y ganar.

| | JUEGO | MATEMÁTICA |
|---|---|---|
| REGLAS | Instrucciones | Axiomas<br>Conceptos<br>Definiciones |
| PRODUCTOS OBTENIDOS | Estrategias ganadoras | Propiedades<br>Teoremas |

Por ello es conveniente su uso en la Educación Secundaria, no sólo porque su aplicación desarrolla capacidades similares a las de la Matemática, sino porque muchos de estos juegos, cuidadosamente elegidos, son adecuados para el desarrollo de contenidos y procesos matemáticos.

Como se sugiere en la OTP-2005 su característica de diversión y pasatiempo favorece una predisposición y reacción positiva de los estudiantes, conveniente durante las sesiones de aprendizaje de matemática. Incluso si adquirimos mayor pericia en su uso, podemos desarrollar gran parte de los contenidos y procesos matemáticos en una forma más amena, sin atentar contra el rigor matemático. Casos que ejemplifican este argumento hay muchísimos, como por ejemplo las pirámides en Z y otras actividades que presentamos a continuación:

#### 3.3.2.1 JUEGOS ARITMÉTICOS QUE PERMITEN EL DESARROLLO DE HABILIDADES OPERATIVAS

#### SÓLO CIFRAS

Años atrás se veía en la televisión peruana el programa: "Sólo Cifras". Las pruebas eran realmente interesantes. Cada prueba consistía en obtener a partir de seis números dados, utilizando sólo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones (y manteniéndose dentro del campo numérico de los números enteros positivos), otro número de tres cifras, denominado número objetivo.

#### MATERIALES:

Una pizarra, tizas o plumones.
Hojas y lápices para cada participante (equipo).

#### CONSIDERACIONES:

- Los seis números de origen pueden ser catalogados como unidades o decenas-centenas. Una unidad es un número cualquiera entre 1 y 9. Una decena-centena es uno de los números 10, 25, 50, 75, 100.
- El número objetivo debe ser mayor o igual que 100.

- No es necesario usar todos los números de origen. Un mismo número no puede usarse dos veces.
- Si no se es capaz de obtener el número objetivo, se procurará acercarse a él lo más que se pueda. En algunos casos puede ser completamente imposible conseguir el número objetivo, ya que todos los números se eligen al azar.
- Cada participante o equipo, dependiendo como se esté jugando, tiene 60 segundos como máximo para formar el número objetivo.

Por ejemplo para la primera prueba del NIVEL I:

$$10x6x(7–3)+75+25=340$$

A continuación proponemos algunas pruebas, con diferentes niveles de dificultad. El docente adecuará los tiempos y niveles, según el grado de los estudiantes.

Nivel 1

| Pruebas | Números Elegidos | | | | | | Número Objetivo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3 | 10 | 7 | 6 | 75 | 25 | 340 |
| **2** | 8 | 25 | 10 | 2 | 9 | 4 | 549 |
| **3** | 4 | 10 | 7 | 9 | 2 | 25 | 232 |
| **4** | 3 | 1 | 9 | 4 | 50 | 100 | 286 |
| **5** | 50 | 5 | 4 | 7 | 10 | 2 | 219 |
| **6** | 10 | 2 | 9 | 5 | 7 | 100 | 298 |
| **7** | 7 | 10 | 3 | 2 | 1 | 25 | 223 |
| **8** | 7 | 4 | 100 | 5 | 9 | 10 | 156 |
| **9** | 2 | 75 | 9 | 6 | 100 | 8 | 474 |
| **10** | 7 | 3 | 50 | 25 | 6 | 100 | 741 |

Nivel 2

| Pruebas | Números Elegidos | | | | | | Número Objetivo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 8 | 25 | 4 | 25 | 5 | 731 |
| **2** | 75 | 9 | 10 | 6 | 50 | 2 | 182 |
| **3** | 9 | 50 | 6 | 4 | 75 | 1 | 826 |
| **4** | 9 | 6 | 75 | 7 | 2 | 50 | 264 |
| **5** | 10 | 8 | 7 | 2 | 100 | 25 | 276 |
| **6** | 10 | 7 | 8 | 50 | 5 | 9 | 834 |
| **7** | 9 | 10 | 1 | 50 | 10 | 3 | 373 |
| **8** | 6 | 1 | 75 | 25 | 8 | 4 | 384 |

| Pruebas | Números Elegidos | | | | | | Número Objetivo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 5 | 9 | 10 | 25 | 2 | 408 |
| **2** | 2 | 4 | 5 | 100 | 25 | 1 | 901 |
| **3** | 25 | 4 | 6 | 100 | 3 | 75 | 425 |
| **4** | 9 | 10 | 1 | 50 | 10 | 3 | 267 |
| **5** | 10 | 7 | 2 | 50 | 9 | 75 | 586 |

**NOTA:** Es posible que haya pruebas en las cuales sea humanamente imposible resolverlo. Por ejemplo para la prueba:

| 4 | 75 | 6 | 100 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|

$\Longrightarrow$ 783

Una buena aproximación sería: 100 x (6 + 1) + 75 + 5 + 4 = 784

## RECOMENDACIONES

Es conveniente que el docente posea una calculadora para dilucidar con rapidez y exactitud algunas dudas que se puedan presentar.
Con los números dados el docente puede generar otras combinaciones de operaciones y obtener nuevos números objetivos para otras pruebas.
Durante la ejecución de este juego se van a dar situaciones diversas:

- Que no logren obtener el número objetivo, entonces se aceptará la mejor aproximación.
- Que logren obtener el número objetivo usando diversas estrategias, para ello se tomará en cuenta el tiempo.

Nivel 1

| Pruebas | Estrategia |
|---|---|
| 1 | 10x6x(7-3) + 75 + 25 = 340 |
| 2 | (25 + 8:4)x(10x2) + 9 =549 |
| 3 | 25x9 + 7 = 232 |
| 4 | 3x100 - (1 + 9 + 4) = 286 |
| 5 | 50x4 + 7x2 + 10 - 5 = 219 |
| 6 | 100x(10 - 7) - (9 - 5 - 2) = 298 |
| 7 | 7x10x3 + (25 + 1): 2 = 223 |
| 8 | 100 + 5x10 +4 + 9 - 7 =156 |
| 9 | 6x(75 + 8:2) = 474 |
| 10 | (100 + 6)x7 - (3 - 50:25) = 741 |

Nivel 2

| Pruebas | Estrategia |
|---|---|
| 1 | 25x(25+4) + 8 - 2 = 731 |
| 2 | (9 - 6)x(10+50) + 2 = 182 |
| 3 | 75x(9+6-4) + 1 = 826 |
| 4 | (9 + 2)x(75+6-50-7) = 264 |
| 5 | 8x7 + 2x(100+10) = 276 |
| 6 | (50 + 5)x(7 + 8) + 9 = 834 |
| 7 | (50 - 10)x10 - 3x9 = 373 |
| 8 | (75 + 25 - 6)x4 + 8 = 384 |

Nivel 3

| Pruebas | Estrategia |
|---|---|
| 1 | (25-1)x(9+10-2) = 408 |
| 2 | 2x4x5x25 - 100 +1 = 901 |
| 3 | 100 x (6 - 4) + 3x75 = 425 |
| 4 | (50+10 - 1)x3+9 x 10 = 267 |
| 5 | (75x10-50x9-7)x2 = 586 |

## 3.3.2.2 ACTIVIDADES QUE PROPICIAN EL DESARROLLO DE ESTRATEGIAS

### EL JUEGO DEL 20

**MATERIALES:** lápiz y papel

**OBJETIVO:** llegar a 20

**INSTRUCCIONES**

El primer jugador escribe 1 ó 2; luego el segundo jugador agrega 1 ó 2 a lo escrito por el primero; nuevamente el primer jugador añade 1 ó 2 a la cantidad que escribió el otro jugador; y así sucesivamente cada jugador, a su turno, puede sumar 1 ó 2 a la cantidad que se tiene. El que llega a 20 es el ganador.

A continuación presentamos un juego, que inicia el jugador A y finalmente lo gana el jugador B.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| JUGADOR A | 2 | | 4 | | 8 | | 11 | | 15 | | 18 | |
| JUGADOR B | | 3 | | 6 | | 9 | | 13 | | 17 | | 20 |

**RECOMENDACIONES:**

Este juego lo deben practicar los estudiantes en parejas las veces que el docente considere conveniente, luego se puede invitar a los que más han ganado, descubierto o casi descubierto una estrategia ganadora para que lo jueguen públicamente en la pizarra. El que gana sigue jugando, ello hasta que la mayoría descubra o entienda cuál es la estrategia ganadora.

**ESTRATEGIA:**

Después de jugar varias veces la mayoría concluirá en que el que llega a 17 se asegura la victoria, pues el otro jugador (A) sólo tiene dos posibilidades:

| Añadir 1<br>18 | o | Añadir 2<br>19 |
|---|---|---|
| 17 20<br>Y B le añade 2 | | 17 20<br>Y B le añade 1 |

Entonces el objetivo de llegar a 20 se transforma ahora en tratar de llegar a 17. Razonando de modo similar el objetivo de llegar a 17 se transforma en llegar a 14. Y así sucesivamente se obtiene que los números ganadores son:

2 5 8 11 14 17 20

Esto significa que un jugador para ganar debe llegar o ubicarse en dichos números. En consecuencia gana el que juega primero, iniciando con 2 y además conoce la estrategia ganadora. Para llegar a los números ganadores, observe que van de 3 en 3, simplemente hay que completar 3 a lo que diga el otro jugador. Es decir cuando el segundo jugador aumente en 1, el primero debe añadir 2 más; pero si el segundo jugador aumenta en 2, el primero le añadirá 1.

Se entiende que el concepto matemático implicado en el juego es la divisibilidad por 3. A partir de ello se pueden plantear algunas cuestiones, como: si se tratase de llegar hasta 43 y ambos jugadores saben la estrategia, ¿con qué número se debe empezar el juego para ganar?

....................................................................................................................................

Y si se trata de llegar a 2007, ¿gana el que inicia el juego?. Fundamenta tu respuesta

....................................................................................................................................

## VARIANTES

Hay muchas, por ejemplo:

• Con las condiciones iniciales, si cambiamos por los números 1, 2 ó 3, es sencillo deducir que el segundo en jugar siempre gana, pues basta que a lo que el primero agregue (n), el otro debe a su turno agregar (4 – n). Es decir el concepto matemático es la divisibilidad por 4, a lo que el docente debe llegar con la participación de los alumnos, logrando así reconocer la importancia de la Matemática en dicho juego.

• Se pueden jugar con fichas y en lugar de agregar, se van quitando 1 ó 2 fichas y el que se queda con la última ficha pierde. Después de un análisis similar, se concluye que el primero en jugar gana, para ello debe quitar 1 ficha y en adelante si el otro quita "n", el primero debe quitar "3 – n" .

• Se tiene el siguiente juego para dos personas:

A) En una fila de 40 casillas se ubica una ficha en la primera de la izquierda.
B) Cada jugador, a su turno, mueve la ficha 1; 2 ó 5 casillas a la derecha.
C) Pierde el jugador que coloca la ficha en la ultima casilla, o sea el último en jugar.

Encontrar, si existe, una estrategia ganadora. Luego de analizar el juego se llega a concluir que gana el que juega en segundo lugar (B). Para ello si el primero (A) mueve "n" casillas, el segundo (B) a su vez debe completarle un múltiplo de 3, es decir "3n" o "6n". A continuación presentamos un juego ganado por B. Note que A empieza moviendo 1 y B mueve a su vez 5 (le completó 6), luego A movió 2 y B a su vez movió 1 (le completo 3), y así sucesivamente le va completando lo que falta para 6 ó 3:

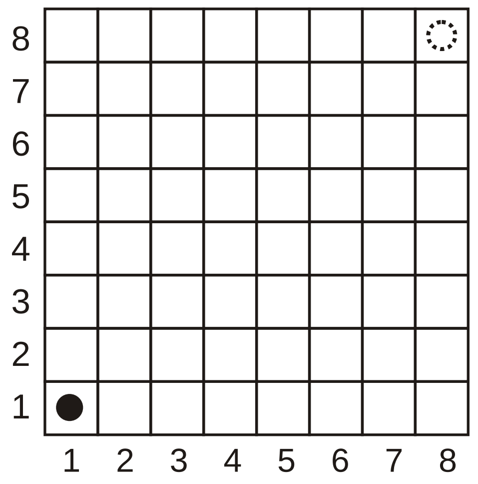
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ● | ◌ | | | | | ◌ | | ◌ | ◌ | | | | | ◌ | ◌ | | | | |
| | A | | | | | B | | A | B | | | | | A | B | | | | |

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ◌ | ◌ | | ◌ | ◌ | ◌ | | | | | ◌ | | | | | ◌ | ◌ | | ◌ | ◌ |
| A | B | | A | B | A | | | | | B | | | | | A | B | | A | B |

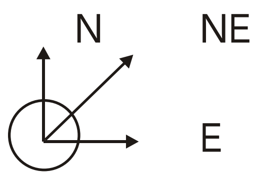
## RECORRIDO CARTESIANO

- **MATERIALES:**
  Un tablero cuadriculado de 8x8, como el ajedrez.
  Una ficha
- **PARTICIPANTES:** dos jugadores: A y B.
- **INSTRUCCIONES**

Se coloca la ficha en la esquina inferior izquierda. Juega A y debe mover la ficha un recuadro hacia arriba, hacia la derecha o en la dirección de la diagonal (NE). A continuación juega B y del mismo modo, debe mover la ficha desde la posición que ahora ocupa, un cuadro hacia el N, E o bien NE, luego le toca jugar de nuevo a A y así sucesivamente. Gana quien coloque la ficha en la esquina superior derecha.




Movimientos:



## RECOMENDACIONES

Como en muchas actividades de este género, se debe jugar las veces necesarias para familiarizarse con las reglas y descubrir una estrategia ganadora. Al docente le corresponde sistematizar el razonamiento de los estudiantes. Puede ser mediante algunas preguntas guías como:

¿Si la ficha se encuentra en el casillero (6 ; 6), y le toca jugar, gana o pierde?

.............................................................................................................................

¿Si la ficha se encuentra en el casillero (6 ; 7), y le toca jugar, gana o pierde?

.............................................................................................................................

¿Si la ficha se encuentra en el casillero (6 ; 8), y le toca jugar, gana o pierde?

.............................................................................................................................

¿Si la ficha se encuentra en el casillero (7 ; 6), y le toca jugar, gana o pierde?

.............................................................................................................................

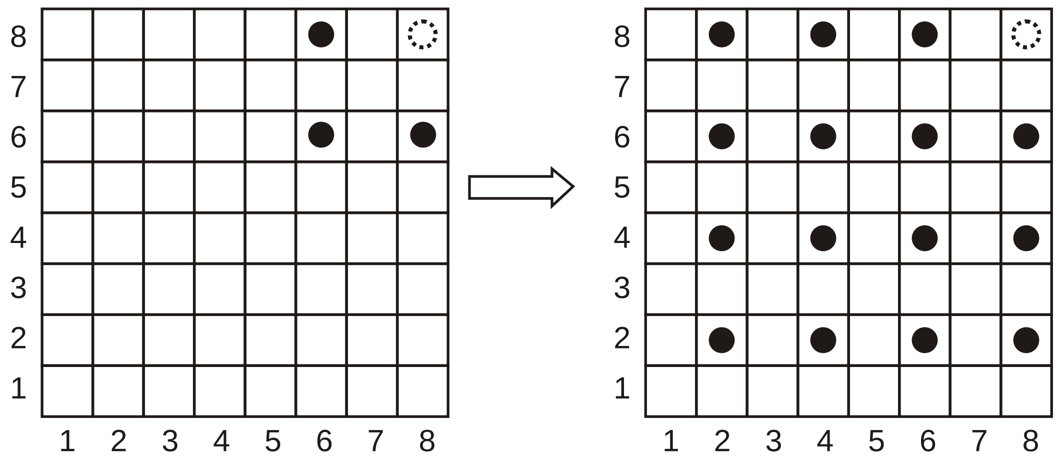
¿Si la ficha se encuentra en el casillero (8 ; 6), al que le toca jugar, gana o pierde?

.............................................................................................................................

## ESTRATEGIA

Por lo anterior, se obtiene que inicialmente los casilleros ganadores son los de la Tabla 1

Tabla 1 Tabla 2

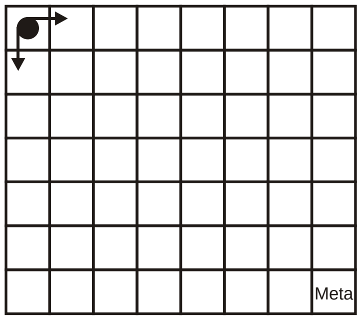


Y razonando de manera similar podemos deducir los demás (Tabla 2). Es decir la estrategia ganadora consiste en ubicarse en los casilleros de negro, por lo tanto gana el que inicia el juego moviendo en dirección NE al casillero (2 ; 2) y además si sabe jugar. Los casilleros ganadores son aquellos cuyas coordenadas son números pares.

## VARIANTES

Se pueden utilizar tableros de otros tamaños, por ejemplo rectangulares

TABLERÍN




**Número de jugadores: 2.**

**Objetos y tablero:** un tablero como el del ajedrez, con 8x7 casillas y una ficha (o un peón) en el extremo superior izquierdo. La meta en el extremo inferior derecho.

**Instrucciones del juego:** cada jugador en su turno mueve la ficha roja en uno de los dos sentidos: horizontal-derecha, vertical-abajo (no diagonal), tantos espacios como se quiera pero un espacio al menos.

**Final:** gana el jugador que llega a la meta, la casilla inferior derecha.

Piensa un plan de trabajo y escríbelo. Consulta pautas si te hace falta.

Algunas cuestiones para analizar este juego podrían ser:

- Empieza por el final. Investiga cómo jugarías si te encuentras en las casillas cercanas a la meta. Sigue analizando el juego en las casillas más alejadas de la meta.

-¿Existen algunas casillas en donde desearías encontrarte en tu turno? ¿O donde no te gustaría encontrarte? Toma nota de ellas.

¿Quién tiene ventaja, el jugador que empieza o el segundo? ¿Cuándo tiene ventaja cada uno de ellos?

Ejecuta el plan. Toma nota de las observaciones que vas haciendo.
Comprueba y redacta las conclusiones.

## 3.3.2.3 MAGIA MATEMÁTICA

Resulta interesante, como recurso motivador, la utilización de “trucos” o “magias” que realmente no lo son, pues tienen fundamento matemático, obedecen a alguna propiedad que el receptor no lo distingue fácilmente. A continuación, presentaremos algunos de ellos.

## LA CIFRA TACHADA

Se trata de adivinar una de las cifras de un número, conociendo la suma de las demás

**MATERIALES:** papel y lápiz

**PROCEDIMIENTO**

Pídeles a tus alumnos que escriban cualquier número de 3 o más cifras sin que tú puedas verlo. Por ejemplo, 1964.
Luego, les dices que a la derecha escriban otro número, pero usando las mismas cifras que el primero, es decir que cambien de orden las cifras del número original
Ejemplo: 6491

Seguidamente que resten ambos números, el mayor menos el menor. Hacer hincapié sobre el cuidado al escribir los números y no equivocarse en la resta.

$$\begin{array}{r} 6491 \\ \underline{1964} \\ 4527 \end{array}$$

Diles que <u>tachen con una rayita</u> una de las cifras del resultado. Por ejemplo: 4.~~5~~27
Le dices finalmente que te diga la suma de las otras cifras, es decir: 4 + 2 + 7 = 13. En menos de 4 segundos le dices la cifra que tachó.

**FUNDAMENTACIÓN**

Una propiedad de la divisibilidad es "todo número se puede expresar como un múltiplo de 9 más la suma de <u>sus</u> cifras". Veamos:
Consideremos N = abcd , realizando su descomposición polinómica tendremos:

| | | |
|---|---|---|
| $N = 1000a + 100b + 10c + d$ | | |
| $N = (999)a + (99)b + 9c + a+b+c+d$ | ... | Hemos descompuesto |
| $N = \dot{9}a + \dot{9}b + \dot{9}c + a+b+c+d$ | ... | Son múltiplos de 9 ( $\dot{9}$ ) |
| $N = \dot{9} + \dot{9} + \dot{9} + a+b+c+d$ | ... | $\dot{9} \times k = \dot{9}$ |
| $N = \dot{9} + s$ | ... | $\dot{9} + \dot{9} = \dot{9}$, además hacemos: $a+b+c+d = s$ |

Si N' es el número que se obtiene de cambiar el orden de las cifras de N, se tendrá que:
$N' = 9 + s$. Luego: $(\dot{9} + s) - (\dot{9} + s) = \dot{9}$ . Vemos que la diferencia es $\dot{9}$ .

Para el caso presentado el resultado (la diferencia) siempre será un múltiplo de 9. Es decir la suma de sus cifras de esta resta será un múltiplo de 9. Entonces la **cifra tachada** será **lo que le falta** a la suma que te den **para completar un múltiplo de 9.** En nuestro ejemplo a 13 le falta 5 para ser un múltiplo de 9 (el múltiplo más próximo).

Se debe ensayar con varios casos y se observará que la suma de las cifras de los resultados pueden ser: 9; 18; 27, etc. Entonces si el estudiante le dice que la suma es 10; 21 ó 26, la cifra tachada será: 8; 6 ó 1, respectivamente.

**NOTA:** Puede suceder que la cifras tachadas sean: 0 ó 9, en ese caso usted debe solicitarle una información más, por ejemplo: ¿la cifra es grande o pequeña?, pero estos casos los debe dejar para el final y primero "adivinar" las demás respuestas que los alumnos den, para que no se pierda el atractivo.

## CÁLCULO ULTRA RÁPIDO

Hay cálculos operativos que dan la impresión de ser tediosos, pero reconociendo la forma de los números y los operadores que intervienen se pueden realizar de manera abreviada, mediante la aplicación de propiedades aritméticas o algebraicas.

### INSTRUCCIONES:

Los estudiantes deben realizar los siguientes pasos:

1º. Que te dicten y escriban dos números de 3 dígitos; por ejemplo: 861 y 791.

2º. Que multipliquen ambos números, recalcándoles que tengan cuidado en las operaciones que realicen. Se tendrá: 861 x 791 = 681 051

3º. A continuación, que multipliquen uno de los números iniciales que el docente debe fijar, por ejemplo **861**, por otro que el docente propone, que lo perciban como si fuese cualquier número al azar, este será 208 (lo obtendrás de 999 – 791). Así, se tendrá: 861 x 208 = 179 088

4º. Finalmente que sumen ambos resultados: 681 051 + 179 088 = 860 139

Antes que ellos terminen el docente conocerá el resultado y lo escribirá en un papel sin que los estudiantes lo vean.

### EXPLICACIÓN MATEMÁTICA

Se tiene: MxN + Mx(999 – N) = Mx999

Es decir: Mx(1000 – 1) = Mx1000 – M

Esto es: $\overline{[\,M-1][C.A.(M)]}$

Donde M es el número fijado y C.A.(M) es el complemento aritmético de M, es decir lo que le falta para 1000.

### TÉCNICA:

Basta escribir el multiplicando, en este caso el 861, disminuido en una unidad y anotar a su derecha su complemento (lo que le falta a 861 para 1000). Es decir: 860 139.

## RECOMENDACIONES

El número de cifras puede variar, según el grupo o nivel al que vamos a presentar esta situación, se pueden usar de dos cifras o de cuatro.

Es conveniente la presentación de este tipo de particularidades operativas al culminar el desarrollo de contenidos y proceso que están relacionados con él, mas no al inicio para no tergiversar la correcta construcción de los conceptos y principios matemáticos.

Es recomendable tener a la mano una calculadora para verificar los resultados y no quede duda alguna de las operaciones que realicemos.

## ADIVINAR LA EDAD Y FECHA DE NACIMIENTO

**MATERIALES:** lápiz, papel y calculadora

**PROCEDIMIENTO.**

Oralmente se dan las siguientes indicaciones: “al número del día de tu nacimiento lo multiplicas por 25, a dicho resultado le sumas 2, ahora al resultado anterior lo multiplicas por 4 y le añades el número del mes de tu nacimiento, al resultado anterior lo multiplicas por 5 y luego le añades 6, a dicho resultado lo multiplicas por 2 y le añades 8, al resultado anterior lo multiplicas por 10 y a ello le sumas los dos últimos dígitos del número del año de tu nacimiento”.

Les pides el resultado final y a ello le restas 1000 y se obtendrá: d / m / a, que justamente es la fecha de nacimiento del alumno. Sólo queda separar las cifras de dos en dos.

$10x\{2x[5x(4x[25 x d + 2] + m) + 6] + 8\} + a$

Por ejemplo: la señora Carmen nació el 15 de enero de 1970. Se escribe 15 / 01 / 70. O sea $d = 15$, $m = 1$ y $a = 70$

Reemplazando, tendremos $10x\{2x[5x(4x[25 x 15 + 2] + 1) + 6] + 8\} + 70$

$25 x 15 \Rightarrow 375 + 2 \Rightarrow 377 x 4 \Rightarrow 1\,508 + 1 \Rightarrow 1\,509 x 5 \Rightarrow 7\,545 + 6 \Rightarrow 7\,551 x 2 \Rightarrow 15\,102$

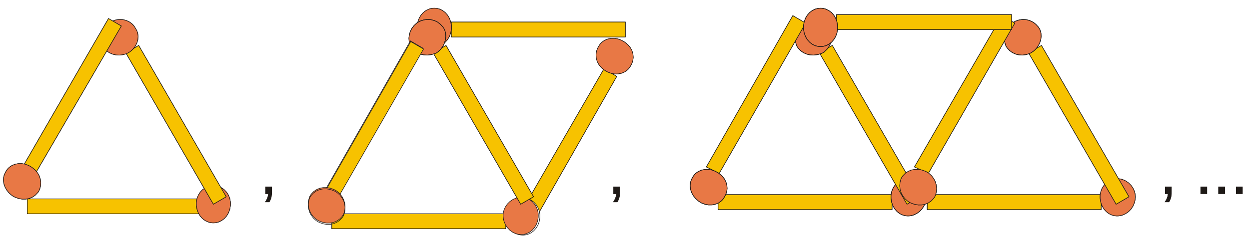
$15\,102 + 8 \Rightarrow 15\,110 x 10 \Rightarrow 15\,1100 + 70 \Rightarrow 15\,1170 - 1000 \Rightarrow 15 / 01 / 70$

### 3.3.2.4 ACTIVIDADES DE INDUCCIÓN Y GENERALIZACIÓN

La búsqueda de regularidades, de patrones es usual en la actividad matemática. El docente puede promover esto en forma lúdica.

### ACTIVIDAD CON CERILLOS

Forma tiras de triángulos como en la figura. Observa la secuencia de figuras que se muestra en el dibujo que sigue y completa dos tiras más.



Ahora responde a las siguientes cuestiones:

a. ¿Cuántos palillos se necesitan para hacer una fila de 199 triángulos?

b. Con 2 007 palillos, ¿cuántos triángulos, en fila, pueden formarse?

### RESOLUCIÓN

Una forma de observar los datos en cada tira de triángulos es organizarlos en una tabla (tabular) para observar la relación cuantitativa entre el número de triángulos y el de palitos usados.

| Nº de triángulos (t) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ····· | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de palitos (p) | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | ····· | 201 |

Se puede deducir que cualquiera de los valores de "p" es el doble que el valor de "t" respectivo más uno. Es decir:

$$3 = 2(1) + 1$$
$$5 = 2(2) + 1$$
$$7 = 2(3) + 1$$
$$9 = 2(4) + 1$$
$$\vdots$$

Luego las respuestas a las preguntas serán:

a. $p = 2(199) + 1 = 399$

b. $t = (2007 - 1) : 2 = 1003$

¿Puedes escribir una ecuación que relacione **p** y **t**?

$$\mathbf{p = 2t + 1}$$

En forma de función: $\mathbf{f(t) = 2t + 1}$

Donde t: variable independiente

p: variable dependiente

El dominio está definido por: $Dom(f) = Z^+$

El rango es: Rang(f) : los números impares, mayores o iguales que 3

Intentando generalizar

Observando los casos anteriores intenta averiguar lo que sucedería con los pentágonos.

| Nº de pentágonos: n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | ..... | ..... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nº de palitos: p | 5 | | | | | | | | | |

¿Puedes escribir una ecuación que relacione **p** y **n**?

## ACTIVIDAD SOBRE SUMAS

### DESARROLLO

Se arman equipos de cuatro estudiantes y el docente propone el siguiente desafío, usando sólo lápiz y papel.

### Parte 1: Exploración

"El profesor les da diez números consecutivos y el equipo que primero encuentre la suma de estos números será el ganador". Esto lo realizará cuatro veces, cada una de las cuales tendrá un máximo de 5 minutos.

El docente propone, a continuación, comenzar a jugar y escribe en el pizarrón:

1era : 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

2da : 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88.

3ra : 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840.

4ta : 6 980, 6 981, 6 982, 6 983, 6 984, 6 985, 6 986, 6 987, 6 988, 6 989.

### Parte 2: Búsqueda de estrategias

Cada equipo tendrá un tiempo para buscar alguna estrategia que permita ganar rápidamente, cualquiera sean los diez números consecutivos que se propongan. Luego, cada grupo tendrá que presentar la estrategia diseñada y dar razones que justifiquen por qué ella sirve cualquiera sean los diez números consecutivos y por qué creen que permite ganar rápidamente.

### Puesta en común

Al finalizar la Parte 2 se realiza una puesta en común en la cual se discuten las estrategias propuestas y se analizan aquellas que supuestamente permiten ganar más rápido.

### Parte 3: Generalización mediante una fórmula

Se busca ahora escribir una fórmula que permita, dado el primero de los diez números consecutivos que hay que sumar, obtener como resultado la suma de éstos.

Cada grupo tendrá que explicar cómo ha obtenido la fórmula.

Puesta en común.

Se analizan, se comparan y se validan las diferentes producciones.

### Parte 4 : Reflexión

1. ¿Es posible que la suma de diez números consecutivos dé por resultado 735 245?
   ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son los números que se han sumado?

2. ¿Es posible que la suma de diez números consecutivos dé por resultado18 450? ¿Por qué? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son los números que se han sumado?

## COMENTARIOS

En la Parte 1, frente a una respuesta de un grupo, el docente controla el resultado de la suma. En caso de obtenerse una respuesta incorrecta, el juego continúa hasta que aparezca la primera respuesta correcta. En esta instancia no hay ningún tipo de discusión en relación a la manera de obtener los resultados (cada equipo no deberá divulgar la estrategia que supuestamente le permite ganar el juego). En la primera parte de la situación, los números que se proponen son cada vez mayores, de tal manera que la realización de todas las cuentas comience a manifestarse como un método "poco económico" y así motivar al alumno en la búsqueda de otros procedimientos. El hecho de no conocer de antemano el conjunto de números que el docente propondrá podría funcionar como "motor de generalización": las estrategias locales diseñadas en la primera parte (esencialmente ligadas a estrategias de cálculo mental) no son fácilmente generalizables, fundamentalmente frente a la exigencia de comunicación; muchas de ellas deberán reformularse a partir de la exigencia de la producción de una fórmula. Es importante, en la Parte 3, discutir la equivalencia de diferentes fórmulas posibles, cada una de ellas proveniente de diferentes regularidades, como por ejemplo:

1. **p** x 10 + 45
   siendo **p** el primer número de la secuencia

2. u x 10 – 45 siendo u el último número de la secuencia

3. [($\mathbf{c_1}$ + $\mathbf{c_2}$ ): 2] x 10
   donde $\mathbf{c_1}$ y $\mathbf{c_2}$ son los números centrales de la secuencia

4. **q** x 10 + 5
   siendo **q** el quinto número de la secuencia

5. **s** x 10 – 5
   siendo **s** el sexto número de la secuencia; etc.

## REFLEXIÓN

Se trata de una actividad que puede ser utilizada en los comienzos del álgebra. La producción de fórmulas es un recurso interesante para la introducción de “las variables” en la clase de Matemática; en este caso, el recurso algebraico aparece como un medio para resolver problemas que implican la exploración de regularidades.

Asimismo, la situación exige la puesta en funcionamiento de un proceso de generalización y abre un espacio para el trabajo sobre la problemática de la validación en las sesiones de Matemática, en particular, la validación de un proceso de generalización.

## TEOREMA DE EULER: C + V = A + 2

Se trata de modelar un fenómeno geométrico, como es el caso de los elementos de los sólidos geométricos. A partir de la construcción y manipulación de estos, los estudiantes pueden descubrir algunas propiedades, por ejemplo el interesante teorema de Euler.

El enunciado de dicho teorema es: “En todo poliedro convexo, el número de caras aumentado con el de vértices equivale al número de aristas más dos”. No hay que perder de vista que un poliedro es convexo, si sus caras son polígonos convexos.

## MATERIALES

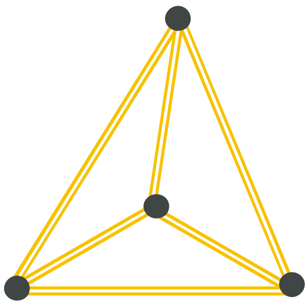
- Limpiatipo.
- Cerillos o palitos de diente.

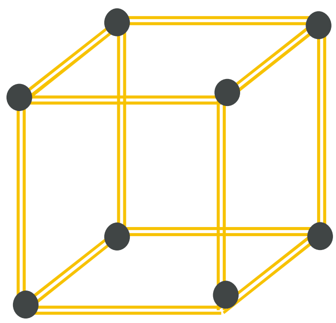
## PROCEDIMIENTO

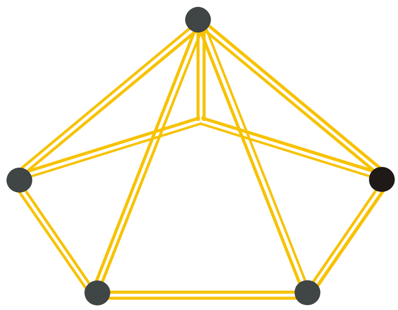
- Se invita a los alumnos a construir sus poliedros uniendo los cerillos (aristas) por sus extremos (vértices) con limpiatipo.

- Inicialmente el profesor construye un poliedro que sirva de guía para la actividad de los alumnos y así mismo reconozca con ellos sus elementos.

- Progresivamente deben ir construyendo sus poliedros: de 4 caras, luego de 5 caras, seguidamente de 6, y así sucesivamente hasta un icosaedro, si es posible. A su vez deben ir registrando en un cuadro sus elementos, así como sus nombres, con la ayuda del docente.







El docente a su vez debe hacer el cuadro también en la pizarra, tomando la información de uno de los grupos.

| Nº de Caras (C) | Nº de Vértices (V) | Nº de Aristas (A) | Nombre |
|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 6 | Tetraedro |
| 5 | 6 | 9 | Pentaedro |
| 6 | 8 | 12 | Hexaedro |
| 7 | 10 | 15 | Heptaedro |
| 8 | 6 | 12 | Octaedro |
| 9 | 9 | 16 | Nonaedro |
| 10 | 16 | 24 | Decaedro |
| 11 | 11 | 20 | Undecaedro |
| 12 | 20 | 30 | Dodecaedro |
| ... | ... | ... | ... |
| 20 | 12 | 30 | Icosaedro |

**NOTA:** va a suceder que varios datos de la tabla no son los mismos en los grupos, lo cual resalta las diferentes formas de construir estos sólidos y **poner** énfasis en el entendimiento de un enunciado, el cual habla de la relación matemática que hay entre los elementos de los sólidos, mas no de cantidades arbitrarias de ellos.

Por ejemplo para el octaedro, tenemos otras posibilidades, por ejemplo:

| C | V | A |
|---|---|---|
| 8 | 12 | 18 |
| 8 | 8 | 14 |

## RECOMENDACIONES

Una vez terminado el cuadro ellos deben descubrir la relación matemática entre las caras, vértices y aristas, con la información que poseen y con la mediación del docente. Esto puede hacerse didácticamente mediante preguntas guías, por ejemplo:

- ¿Qué relación pueden encontrar entre las C, V y A de cada poliedro?
- Alguno de ellos (C, V o A), ¿cómo es siempre respecto de los otros?
- ¿Uno de ellos es siempre mayor que los otros?, ¿cuál?
- Como el número de aristas A es mayor, ¿operando las C con los V podemos obtener el número de A?
- ¿Qué operación entre C y V es la que más se aproxima al valor de A?
- ¿Si sumamos C + V resulta A?
- ¿Cuánto faltaría?
- Entonces la relación entre C, V y A es:

$$\mathbf{C + V = A + 2}$$

Estas preguntas van de lo más general hacia lo específico, que el docente puede utilizar de tal modo que ellos logren formular la relación correcta.

Y allí no debe terminar la actividad, sino reflexionar sobre esta. Por ejemplo se pueden plantear cuestiones como:

¿Es posible construir un poliedro con 9 caras, 14 vértices y 20 aristas?

.......................................................................................................................

¿Es posible construir un poliedro con 13 caras, 24 aristas y 39 vértices?

.......................................................................................................................

En un poliedro, el número de caras es igual al de sus vértices y tiene 98 aristas. ¿Cómo se llama el poliedro?.

.......................................................................................................................

¿El teorema de Euler se cumple para poliedros que no son convexos?

.......................................................................................................................

### 3.3.2.5 FIGURAS Y ESQUEMAS NUMÉRICOS

Hay una variedad de casos en los cuales por la forma de las figuras, en estas se pueden distribuir números, logrando formar regularidades. Entre ellas están los cuadrados mágicos, triángulos mágicos, estrellas mágicas, etc., y otras que gozan de propiedades particulares.

#### CUADRADOS MÁGICOS

Las filas, columnas y diagonales tienen la misma suma, denominándose a dicha suma número mágico.

#### SUMA 15.

Hay que distribuir los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 en los nueve casilleros de un cuadrado de 3x3, de modo que este sea mágico.

#### COMENTARIO:

Se debe permitir al alumno ensayar hasta obtener el cuadrado mágico deseado, y no darles las respuestas o artificios que inhiben el desarrollo de habilidades, limitándolo a repetir las instrucciones.

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

## EXTENSIÓN:

SUMA 34. Es un cuadrado mágico de 4x4. Hay que distribuir convenientemente los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16.

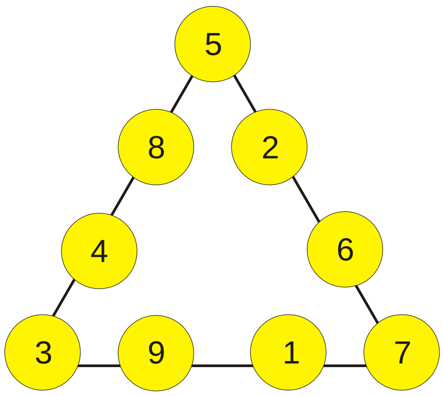
## SUGERENCIA:

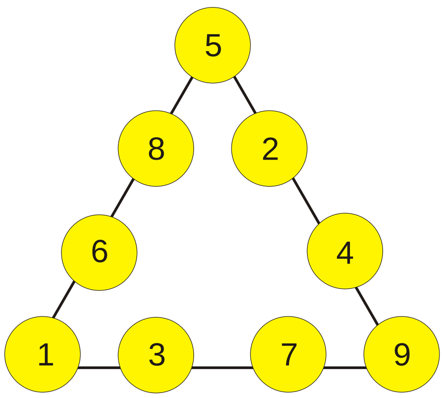
Se le puede dar algunos números guía para que ellos completen los demás, pues a medida que aumenta el tamaño de los cuadrados la dificultad aumenta también.

## TRIÁNGULOS MÁGICOS

De manera similar hay que distribuir los números: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 y 9, de modo tal que la suma de cada lado del triángulo sea 20

Presentamos dos soluciones. Anímate a encontrar las otras soluciones.

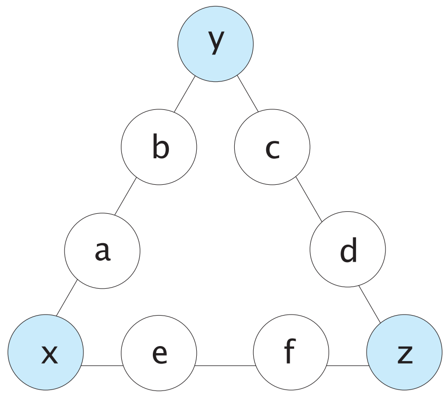


Además de promover la búsqueda de más soluciones, es oportuno también **inventar** desafíos y discriminar los casos que no son posibles como figuras mágicas.

Por ejemplo para el caso de los triángulos mágicos, podemos usar recursos algebraicos para la construcción de estas figuras. Veamos:

Para que sea mágico los lados deben sumar igual a **k**. Entonces planteamos:




$x + a + b + y = k$

$y + c + d + z = k$

$x + e + f + z = k$

Sumando las 3 ecuaciones y reemplazando:

$x + y + z + 45 = 3k$

$x + y + z$ mínimo: $1 + 2 + 3 = 6$

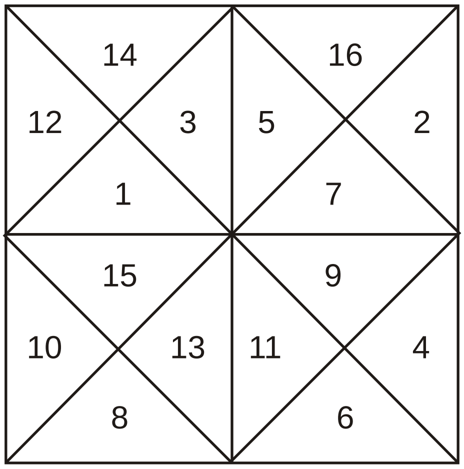
$x + y + z$ máximo: $7 + 8 + 9 = 24$

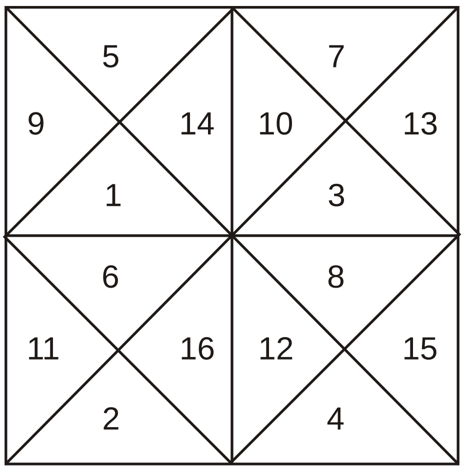
Entonces "k" puede ser: 17, 18,..., 23

Hemos obtenido un método para **inventar** triángulos mágicos. Son procesos que el docente y los estudiantes pueden abordar. En nuestro ejemplo presentado: $k = 20$, luego $x + y + z = 15$. Estas deducciones nos permiten invertir menor tiempo en nuestros ensayos de solución, así como la imposibilidad de solución. Por ejemplo no hay triángulo mágico, cuyos lados sumen 24. No es necesario intentarlo. Hemos visto que todos podemos inventar y de eso deben estar convencidos los estudiantes

## NO CONSECUTIVOS

Los números: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15 y 16 se deben distribuir en las diez regiones, de modo que dos números consecutivos no se encuentren en dos regiones contigüas (que comparten un mismo lado o vértice).



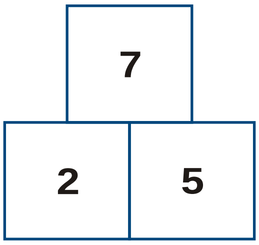

La exploración de soluciones para este desafío nos puede llevar a formular estrategias para encontrar más soluciones. Por ejemplo, algunos estudiantes logran determinar que si en las regiones internas colocamos los impares y en las externas los pares, o a la inversa, no se tocarán los consecutivos. Similares estrategias el docente debe promover entre sus estudiantes.

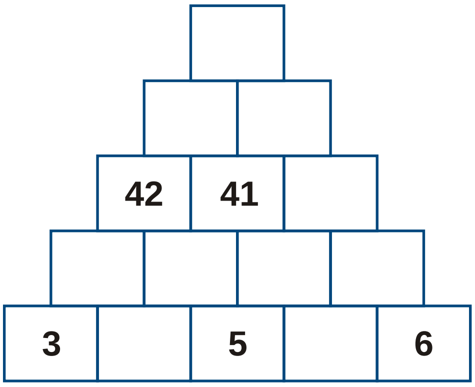
## PIRÁMIDES NUMÉRICAS

El uso de estas pirámides nos es familiar, pues son frecuentes en los diarios o en textos de primaria; así también en el nivel secundario se pueden presentar estos elementos, pero con una dificultad mayor o con desafíos más interesantes.

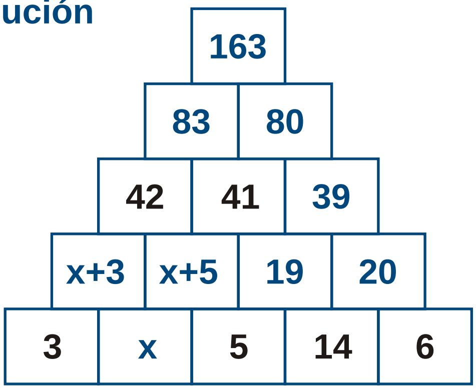
El número de cada casilla se obtiene de sumar los números de las dos casillas que lo sostienen. Observa el modelo adjunto:

En cada pirámide numérica debes ingeniarte y completar los números que faltan en las casillas vacías basándote en esta condición.




Solución




Es interesante observar que el método usado por la mayoría de los estudiantes es ensayar con algunos números hasta dar con la respuesta.

Muy pocos seguramente detectarán el concepto de ecuación subyacente a esta actividad. A la derecha se observa el uso de esta estrategia, que teniendo en cuenta la condición nos conduce a plantear la ecuación: $x + 3 + x + 5 = 42$, resolviendo $x = 17$, reemplazando se podrá completar los números que faltan en la pirámide.

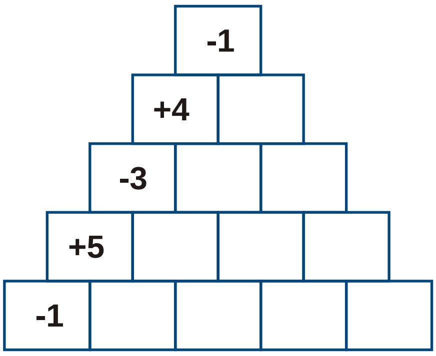
## RECOMENDACIONES

Aquí el docente no debe dejar escapar la oportunidad para comentar con los estudiantes que los conceptos matemáticos están presentes en muchas situaciones lúdicas, reales o imaginarias.

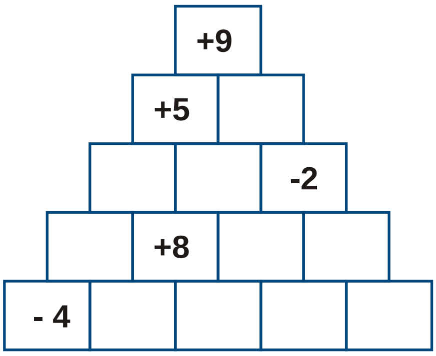
## VARIANTES

Se puede extender para el conjunto Z. Aquí resultaría más productivo, pues durante toda la Secundaria, perduran aún las dificultades de los signos para los jóvenes.

**a)**




**b)**




Es importante que los estudiantes puedan crear sus propias pirámides desarrollando así su pensamiento creativo y afirmando la confianza en sí mismos. Incluso se pueden plantear retos o competencias de a dos, o por equipos.

El docente puede promover en los estudiantes la creación de otros esquemas para lograr un mayor dominio, *de forma amena*, de las operaciones con números enteros, que como sabemos un buen porcentaje de alumnos tienen dificultades.

## CRUCINÚMEROS

Completa los números enteros que faltan en cada recuadro, si se tienen los resultados de las filas (⇛) y de las columnas (⤋).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -6 | | | ⇛ | + 6 |
| | +5 | | ⇛ | - 5 |
| +7 | | - 4 | ⇛ | + 4 |
| ⤋ | ⤋ | ⤋ | | |
| -1 | +2 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| -4 | | +1 | ⇛ | + 6 |
| | +2 | | ⇛ | + 5 |
| +3 | | | ⇛ | |
| ⤋ | ⤋ | ⤋ | | |
| - 1 | - 2 | - 3 | | |

## SACA 20

Para ello descubre los números que deben estar en los círculos, para que el resultado final sea 20, con las operaciones indicadas.

( ) $\xrightarrow{+7}$ ( ) $\xrightarrow{:(-2)}$ ( ) $\xrightarrow{x\,(+4)}$ ( ) $\xrightarrow{-(4)}$ (20)

## BIBLIOGRAFÍA


- Brousseau, G.; "Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas en Matemáticas", en http://fractus.mat.uson.mx/Papers/ Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm
- Callejo de la Vega, M.; Cuadernos de Sociedad y Educación, No.12; AECI, Editorial Centro Cultural Poveda.
- COMAP; "Las Matemáticas en la vida cotidiana"; Universidad Autónoma de Madrid; Addison Wesley Iberoamericana S.A.; 1998.
- De Guzmán, M.; "Para pensar mejor"; Madrid: Pirámide; 2001.
- García, A.; Martínez, A.; Miñano, R.; "Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas"; Editorial Síntesis S.A.; 1995.
- García Cruz, J.A.; "La Didáctica de las Matemáticas: una visión general", en http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/didmat.htm
- Godino, J.; "Hacia una teoría de la didáctica de la matemática"; pp. 105-148. Madrid: Síntesis, 1991.
- Haeussler, F., Ernest Jr.; "Matemáticas para administración y economía"; Editorial Pearson; 2003.
- Hatfield, M.; Edwards, N.; Bitter, C.; "Mathematics Methods for Elementary and middle school teachers". Ed. Wiley; 2004.
- Hoffman, L., Bradley, G.; "Cálculo para administración, economía y ciencias sociales" Editorial Mc Graw Hill; 2001.
- Informe Cockcrof; "Las matemáticas sí cuentan"; Madrid: MEC; 1985.
- Jensen, E.; "Cerebro y Aprendizaje"; Madrid: Narcea S.A.; 2004.
- Kilpatrick, J.; Gómez, P.; Rico, L.; "Educación Matemática"; Grupo Editorial Iberoamericana S.A.; 1995.
- Mendoza Bolo, M.; "El Winplot como recurso didáctico en la enseñanza de la matemática"; Lima: Editorial Horizonte; 2003.
- Millar, C.; Heeren, V.; Hornsby Jr, E.; "Matemática: Razonamiento y Aplicaciones"; México: Addison Wesley Longman; 1999.
- Moll, L.; *"Vygotsky y la educación*"; Buenos Aires: Aique; 1990.
- Palomares Alvariño, L.; "Didáctica Creativa para la enseñanza-aprendizaje de la Matemátca"; Lima; 1996.
- Priestley, M.; "Técnicas y Estrategias del Pensamiento Crítico"; México: Editorial Trillas; 1996.
- Ruiz Bolívar, C.;**"**Neurociencia y Educación",en **www.revistaparadigma.org.ve/**volumenes/ articulo1p.html
- Salas Silva, R.; ¿La Educación necesita realmente de la Neurociencia? Does education really

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de
**FIMART S.A.C.** Editores e Impresores
Av. Del Río 111 - Pueblo Libre
Teléfono: 424-0662