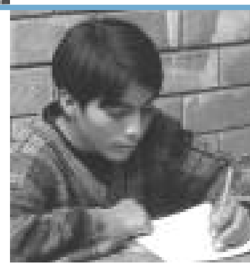
Unidad de Medición
de la Calidad Educativa
UMC



Evaluación Nacional del Rendimiento Estudiantil 2004

Informe pedagógico de resultados

Formación matemática

Tercer grado de Secundaria
Quinto grado de Secundaria

17
Documento de trabajo
UMC

MINISTERIO DE EDUCACION
REPUBLICA DEL PERU

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Javier Sota Nadal

SECRETARIO DE PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA
Enrique Prochazka Garavito

SECRETARIO ADJUNTO DE PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA
Walter Twanama Altamirano

JEFE DE LA OFICINA DE PLANIFICACIÓN ESTRATÉGICA
Carlos Pizano Paniagua

JEFA DE LA UMC
Liliana Miranda Molina

COORDINADORA DEL EQUIPO DE EVALUACIÓN
Tania Pacheco Valenzuela

EQUIPO DE EVALUACIÓN DEL ÁREA DE MATEMÁTICA
Gustavo Cruz Ampuero (especialista de tercer grado de secundaria)
Úrsula Asmad Falcón (especialista de quinto grado de secundaria)
Karim Boccio Zúñiga
David Palomino Alva

EDITORA
Ximena Urbina Keller

Calle Van de Velde N° 160, Lima 41 – Perú
Teléfono: 215 5800
www.minedu.gob.pe

Contenido

Presentación 5

PARTE I
La evaluación del rendimiento estudiantil 7

1. La Evaluación Nacional 2004 9
2. Niveles de desempeño en las pruebas de rendimiento 15
3. Marco de evaluación del área de Matemática 18

PARTE II
Tercer grado de secundaria 31

1. Importancia y alcances de la evaluación 33
2. ¿Qué pueden hacer los estudiantes en cada nivel de desempeño? 35
3. Resultados según niveles de desempeño 53
4. Análisis de las preguntas de la prueba y de respuestas de los estudiantes 58
5. Principales dificultades en el desempeño en matemática 85
6. ¿Cómo usar las preguntas mostradas en este informe? 107

PARTE III
Quinto grado de secundaria 113

1. Importancia y alcances de la evaluación 115
2. ¿Qué pueden hacer los estudiantes en cada nivel de desempeño? 117
3. Resultados según niveles de desempeño 139
4. Análisis de las preguntas de la prueba y de respuestas de los estudiantes 144
5. Principales dificultades en el desempeño en matemática 179
6. ¿Cómo usar las preguntas mostradas en este informe? 212

PARTE IV
Conclusiones 217

Bibliografía 223

ANEXOS 227

Anexo 1: Definición de los procedimientos generales matemáticos 229

Anexo 2: Glosario 231

Presentación

Este informe presenta los resultados de los estudiantes de tercer grado y quinto grado de secundaria en las pruebas del área de Matemática que formaron parte de la Evaluación Nacional 2004 (EN 2004) realizada por la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC).

La UMC es la instancia técnica del Ministerio de Educación del Perú responsable de diseñar e implementar evaluaciones nacionales de rendimiento. Estas evaluaciones constan de un conjunto de pruebas y cuestionarios, y proporcionan información acerca del nivel de rendimiento académico de los estudiantes de las escuelas del Perú. Además, brindan información acerca de los factores escolares y extraescolares que influyen en dicho rendimiento.

Los resultados de las evaluaciones nacionales de rendimiento son muy importantes porque ofrecen información que sirve para propiciar acciones de mejora y tomar decisiones de política educativa en diversas instancias. Para que la información obtenida en la evaluación cumpla estos propósitos es necesario que sea difundida no solo entre las autoridades y los especialistas en la materia, sino también entre los docentes, directores, padres de familia y la sociedad en general. Este informe pedagógico está dirigido especialmente a los docentes, pues les brinda información para reflexionar acerca de algunos aspectos de su práctica pedagógica y les proporciona herramientas para mejorarla en el área de Matemática.

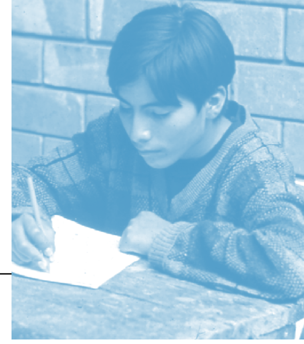
Este informe proporciona, además, una descripción de las habilidades matemáticas que deberían haber desarrollado los estudiantes hasta el grado que cursan, un análisis de aquellas con las que cuentan efectivamente y una aproximación a las dificultades que presentan al enfrentarse a la resolución de situaciones problemáticas. Asimismo, se brindan algunas sugerencias para mejorar el rendimiento de los estudiantes en el área de Matemática desde el trabajo en el aula.

Este informe consta de cuatro partes: la primera presenta información general acerca de la EN 2004 y un resumen de su marco de trabajo; la segunda parte ofrece los resultados en tercer grado de secundaria; la tercera, los resultados en quinto grado de secundaria; finalmente, la cuarta parte presenta las conclusiones y la bibliografía. Además, en los anexos se incluye una definición de los procedimientos generales matemáticos y un glosario con la explicación de los términos técnicos utilizados.

PARTE I

LA EVALUACIÓN DEL RENDIMIENTO ESTUDIANTIL

1 La Evaluación Nacional 2004



¿Qué es la Evaluación Nacional 2004?

La Evaluación Nacional 2004 (EN 2004) es la cuarta de las evaluaciones nacionales del rendimiento estudiantil realizadas por el Ministerio de Educación (MED). Esta evaluación recoge información acerca del sistema educativo peruano en su conjunto mediante la aplicación de diversos instrumentos de medición, como pruebas de rendimiento y cuestionarios, a los diferentes actores que intervienen en el proceso educativo.

Evaluaciones de este tipo se llevan a cabo periódicamente con el fin de proporcionar al sistema educativo, a los investigadores y a la sociedad en general información válida y oportuna sobre el rendimiento académico de los estudiantes y sobre los factores o condiciones escolares y extraescolares asociados a este rendimiento. De esta manera, la evaluación identifica los aspectos que deben ser considerados para mejorar el aprendizaje de los estudiantes peruanos.

Las pruebas de rendimiento aplicadas a los estudiantes en la EN 2004 han sido diseñadas bajo un modelo de evaluación basado en criterios. Este modelo permite identificar lo que deberían saber los estudiantes de acuerdo con el grado de estudios que cursan, los conocimientos con los que cuentan y lo que saben hacer con ellos. También permite ordenar a los estudiantes en función de su rendimiento y efectuar una comparación relativa entre ellos.

¿Qué áreas y grados se evaluaron?

En la EN 2004, han sido evaluadas las áreas curriculares de Comunicación y de Matemática,[1] pues proporcionan las herramientas necesarias para el logro de aprendizajes en otras áreas. Además, se recogió información para un estudio que tiene el objetivo de aproximarse al eje curricular de Formación Ciudadana.[2]

Grados evaluados en la EN 2004 según área

		Matemática	Comunicación	Formación Ciudadana
Primaria	Segundo	✔	✔	—
	Sexto	✔	✔	✔
Secundaria	Tercero	✔	✔	—
	Quinto	✔	✔	✔

1. El término Comunicación se utilizará también para el área de Comunicación Integral del nivel primario y el término de Matemática para el área de Lógico Matemática del mismo nivel.
2. Los resultados de este estudio se presentarán en un informe aparte.

Como se aprecia en el cuadro anterior, se eligieron los grados de segundo y sexto de primaria y tercero y quinto de secundaria. Se decidió evaluar sexto grado de primaria y quinto grado de secundaria, pues es muy importante recoger información sobre los logros alcanzados por los estudiantes al término de cada nivel educativo. Los estudiantes de quinto grado de secundaria no solo están finalizando el nivel sino que están terminando la escolaridad, por lo que esta evaluación constituye un buen diagnóstico de las capacidades que han desarrollado tras su paso por la educación básica regular (EBR). Asimismo, se eligió evaluar segundo grado de primaria y tercer grado de secundaria por tratarse de los grados finales del primer ciclo en sus respectivos niveles.[3]

¿Quiénes participaron en la EN 2004?

En la EN 2004 participaron estudiantes de aproximadamente 850 instituciones educativas (IE) de educación primaria y 640 de educación secundaria de todas las regiones del Perú. Se evaluaron alrededor de 14 500 estudiantes en cada grado.

¿Cómo se eligieron a las IE participantes?

Las IE se seleccionaron de manera aleatoria (al azar) con el propósito de que la muestra fuese técnicamente adecuada para realizar inferencias generales acerca del rendimiento de toda la población estudiantil del Perú y de los estratos establecidos para los grados evaluados. Una vez definidas las IE participantes, se seleccionaron también de manera aleatoria el turno, la(s) sección(es) y un total de treinta estudiantes, como máximo, en cada grado.

Estratos representativos de la muestra de la EN 2004

- NACIONAL
  - ESTATAL
    - En este estrato, están representados los estudiantes según:
    - Área de residencia
      - Urbana
      - Rural
    - Tipo de IE (primaria)
      - Polidocente completa
      - Multigrado[4]
  - NO ESTATAL[5]

---

3. Este criterio tuvo como base los currículos vigentes en la etapa de diseño de la evaluación. El Plan de Estudios de la Educación Básica Regular actual establece que segundo de primaria es el último grado del ciclo III y tercero de secundaria es el primer grado del ciclo VII (ciclo final de la educación secundaria).
4. En este estrato están incluidas las IE unidocentes.
5. Entre otras IE, en este estrato se encuentran aquellas IE cooperativas, parroquiales, particulares y comunales.

Los recuadros sombreados en el gráfico muestran los estratos representados en la EN 2004. La información ofrecida en este reporte tiene índices de precisión y confiabilidad adecuados para estos estratos.[6]

¿Qué instrumentos se aplicaron?

Se aplicaron dos tipos de instrumentos: pruebas de rendimiento y cuestionarios de factores asociados.

- *Pruebas de rendimiento*

  Evalúan el nivel de dominio de las capacidades y los contenidos curriculares. Constan de un conjunto de preguntas para que el estudiante marque o elabore su respuesta. Si bien las pruebas de rendimiento elaboradas para la EN 2004 son pruebas de lápiz y papel, presentan una serie de situaciones significativas para los estudiantes con la intención de evaluar el grado de incorporación de los aprendizajes como una herramienta útil para enfrentar a diversas situaciones dentro y fuera de la escuela.

- *Cuestionarios de factores asociados al rendimiento*

  Recogen información acerca de diversos aspectos que influyen en el rendimiento académico de los estudiantes. Estos instrumentos constan de varias preguntas cuyo objetivo es recoger información que permita interpretar los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas de rendimiento. Esta información hace posible identificar los factores que favorecen o desfavorecen el aprendizaje de los estudiantes. Cada uno de estos cuestionarios está dirigido a uno de los actores del sistema: los estudiantes evaluados, sus profesores y sus padres o apoderados.

¿Cómo son las pruebas de rendimiento de la EN 2004?

Las pruebas de rendimiento de la EN 2004 presentan preguntas de diversos formatos. Entre estos, destacan las preguntas de «producción de respuesta», llamadas así porque se pide a los estudiantes que elaboren o produzcan su propia respuesta. Por ejemplo, se les pide que redacten y justifiquen su respuesta o que muestren el procedimiento completo para llegar a ella.

Considerando el área, las pruebas de rendimiento estuvieron constituidas por preguntas que han sido elaboradas según los siguientes formatos:

- *En el área de Matemática*. La prueba está constituida por un conjunto de preguntas para marcar la opción correcta, aparear, escribir una respuesta corta (una palabra, un número, etc.), desarrollar el procedimiento necesario para resolver un problema (respuesta extensa), justificar una afirmación, etc.

- *En el área de Comunicación*. Para esta área se han elaborado dos pruebas que evalúan comprensión y producción de textos.

---

6. El margen de error es de cinco puntos porcentuales como máximo, con un nivel de confianza de 95%.

– *Comprensión de textos*: La prueba está constituida por diversos textos seguidos de un conjunto de preguntas de diferentes formatos, como marcar la opción correcta, escribir una respuesta corta o desarrollar una respuesta extensa.
– *Producción de textos*: La prueba está constituida por estímulos que invitan a los estudiantes a escribir un texto y, a continuación, presentan un espacio para que el estudiante lo produzca.

El modelo de evaluación empleado en la EN 2004, llamado «evaluación basada en criterios», requiere de una gran cantidad de preguntas para poder recoger información sobre lo que saben y hacen los estudiantes respecto de lo que deberían saber y deberían hacer de acuerdo con la estructura curricular. Estas preguntas responden a una propuesta de evaluación en la que las especificaciones de las pruebas determinan el número necesario de preguntas para evaluar las capacidades más importantes del área. Este número excede lo que podría realizar un estudiante, incluso en varias sesiones, pues se trata de más de un centenar de preguntas para cada una de las pruebas. Por esta razón, se ha recurrido al diseño de bloques rotados y al modelo de análisis Rasch[7] que permiten estimar el desempeño del estudiante en toda la prueba a partir de las respuestas que dio a las preguntas a las que se enfrentó. Metodologías como estas son altamente confiables y se suelen usar en este tipo de estudios.

¿Cómo se elaboraron las pruebas de rendimiento?

Para la elaboración de las pruebas de rendimiento se ha tomado como base, tanto para seleccionar los contenidos como para determinar las capacidades por evaluar, los currículos oficiales vigentes de cada uno de los niveles. A continuación se describe el proceso de elaboración de las pruebas.

1) Análisis curricular. Se analizaron no solo los documentos oficiales como la Estructura Curricular Básica (ECB) de Educación Primaria y el Diseño Curricular Básico (DCB) de Educación Secundaria,[8] sino también los textos educativos de cada área de mayor circulación comercial en el medio.
2) Elaboración del marco de trabajo. Este marco incluye el enfoque del área, las especificaciones de las pruebas, es decir, la selección y adecuación de las capacidades y contenidos a evaluar, la determinación del número apropiado de las preguntas y el diseño adecuado de estas.
3) Elaboración de las preguntas según las especificaciones de la prueba.
4) Aplicaciones piloto de las preguntas de la prueba.[9]
5) Análisis estadístico y pedagógico de los resultados de las aplicaciones piloto.
6) Elaboración de las pruebas definitivas.

---

7. Este modelo estima la probabilidad de que un estudiante con una habilidad específica responda en forma correcta una pregunta con una dificultad particular.
8. Vigentes en el momento de diseñar la evaluación.
9. De acuerdo con las necesidades técnicas de algunas de las pruebas, se llevaron a cabo varias aplicaciones piloto a diversas muestras.

Todos estos procesos han comprometido la participación de diversos expertos. Algunos han requerido de talleres de consulta a especialistas de las áreas evaluadas, a docentes con experiencia en la enseñanza a los estudiantes de los grados que evalúan las pruebas y a otros profesionales que pudieran aportar, desde sus perspectivas, a la generación de pruebas apropiadas, no solo en términos estadísticos sino también en términos conceptuales. La construcción de las pruebas de la EN 2004 ha sido, entonces, un ejercicio colectivo desarrollado en múltiples fases interdependientes y coordinado por un equipo interdisciplinario.

Finalmente, ha tenido una importancia especial la observación del comportamiento estadístico de las preguntas en el campo. Las aplicaciones piloto permitieron el acercamiento a los propios estudiantes y la puesta a prueba de los instrumentos. Esto ha sido decisivo para evaluar la mejor manera de formular las preguntas, detectar y relativizar los posibles sesgos culturales o sociales, y establecer los tiempos e indicaciones requeridos por los estudiantes para responder a los instrumentos.

¿Cuándo y cómo se aplicaron las pruebas?

La aplicación de los instrumentos se llevó a cabo, de manera simultánea, en todas las IE de la muestra durante la segunda semana del mes de noviembre de 2004. Para ello, se tuvo que establecer una red de aplicación tanto para la distribución de los instrumentos como para la selección y capacitación de profesionales de distintas áreas para la administración, coordinación, supervisión, control de calidad y aplicación de los instrumentos. Dicha red incluía a dos docentes por cada una de las IE de la muestra.[10] La decisión de fijar la aplicación de la prueba en noviembre obedeció principalmente a la necesidad de garantizar que, para entonces, los estudiantes evaluados hubieran tenido la oportunidad de realizar la mayoría de las actividades programadas para el año lectivo.

En cada uno de los grados, los estudiantes resolvieron una sola prueba de rendimiento por día. El tiempo máximo con el que contaba cada estudiante para la resolución de una prueba fue de sesenta minutos, con la posibilidad de una extensión de diez minutos si existía en el grupo evaluado algún estudiante que manifestara no haber concluido su prueba.[11] La distribución de las horas de las pruebas buscó que el rendimiento de los estudiantes no se viera afectado por el cansancio.

Como se ha indicado, tanto el número de preguntas como el tiempo otorgado para su resolución fueron determinados mediante el análisis y revisión de la información recogida en las aplicaciones piloto realizadas en la fase previa.

Para rendir las pruebas en condiciones estandarizadas, cada estudiante recibió un cuadernillo con la prueba y una cartuchera con los útiles necesarios para desarrollarla (lápiz, tajador, borrador y regla). Los estudiantes respondieron a las preguntas en el mismo cuadernillo de la prueba.

---

10. Los docentes que desempeñaban el papel de examinadores en el nivel de su especialidad no pertenecían a las IE de la muestra y fueron capacitados en forma rigurosa para la aplicación de los instrumentos de manera estandarizada. Debido a la corta edad y a las características de los estudiantes de segundo grado de primaria, las pruebas fueron aplicadas en grupos de no más de quince estudiantes, de modo que los examinadores pudieran aplicar los instrumentos de manera estandarizada y, a la vez, establecer condiciones adecuadas para que los estudiantes resolvieran la prueba.
11. En promedio, los cuadernillos de las pruebas tenían veinte preguntas.

¿Cómo se codificaron las respuestas de los estudiantes?

El proceso de codificación de los instrumentos se llevó a cabo por un grupo de docentes especialmente capacitados y seleccionados.[12] En efecto, como se ha señalado, las pruebas constan no solo de preguntas de opción múltiple, sino de otros formatos en los que el estudiante debía elaborar su propia respuesta, la cual debía ser codificada. Esto último ha permitido obtener una mayor cantidad de información, en especial, la relacionada con las habilidades más complejas.

La codificación consistió en la clasificación de las respuestas[13] de los estudiantes de acuerdo con la diversidad de estrategias empleadas para resolver las preguntas. Dicha clasificación se llevó a cabo a partir de un conjunto de criterios específicos definidos previamente para cada pregunta y que figuraban en los manuales de codificación. Estos criterios de codificación recogen evidencias del grado de desarrollo de las habilidades evaluadas en las respuestas de los estudiantes.

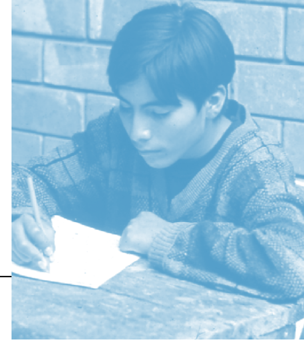
Para asegurar que el proceso fuera lo más objetivo posible y que todas las respuestas fueran codificadas bajo los mismos criterios, además de trabajar con docentes capacitados y manuales de codificación detallados, se aplicaron mecanismos de control de calidad para evaluar la adecuada aplicación de los criterios por parte de cada codificador a lo largo de los dos meses que duró la codificación.[14]

¿Cómo se procesaron y analizaron los datos?

Después de codificar las respuestas de todos los estudiantes evaluados, se consolidaron y depuraron las bases de datos, a partir de las cuales se realizaron los análisis psicométricos utilizando la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI), en particular el modelo Rasch. Como se ha señalado, este modelo permite estimar tanto la habilidad de los estudiantes como la dificultad de las preguntas. Además, se realizó un análisis pedagógico, que consistió en el estudio del comportamiento de cada una de las preguntas y de sus criterios de codificación, de manera que la prueba en su conjunto reflejara fielmente el enfoque formulado en el marco de trabajo de cada una de las áreas. Un propósito que se debe destacar, porque atraviesa ambos enfoques de las áreas consideradas, es la búsqueda de una evaluación que permita recoger información de un aprendizaje funcional, formativo y útil a la vez, que trascienda los muros de la escuela y que se refleje en la mejora de la calidad de vida de los estudiantes.

Por otro lado, los cuestionarios de factores asociados fueron procesados y analizados de muy diversas maneras debido a su distinta naturaleza y formato. Así, algunos cuestionarios han sido analizados mediante el análisis TRI y otros tipos de análisis —como el análisis multivariado— para identificar factores que están relacionados con las variables investigadas.

12. Muchos de estos docentes codificadores poseen la experiencia de haber participado en anteriores procesos de codificación durante la fase piloto e, incluso, en anteriores evaluaciones nacionales.
13. Nos referimos a todo el proceso mostrado por el estudiante (procedimiento y respuesta) y no solo a la respuesta final.
14. Estos meses fueron enero y febrero de 2005.

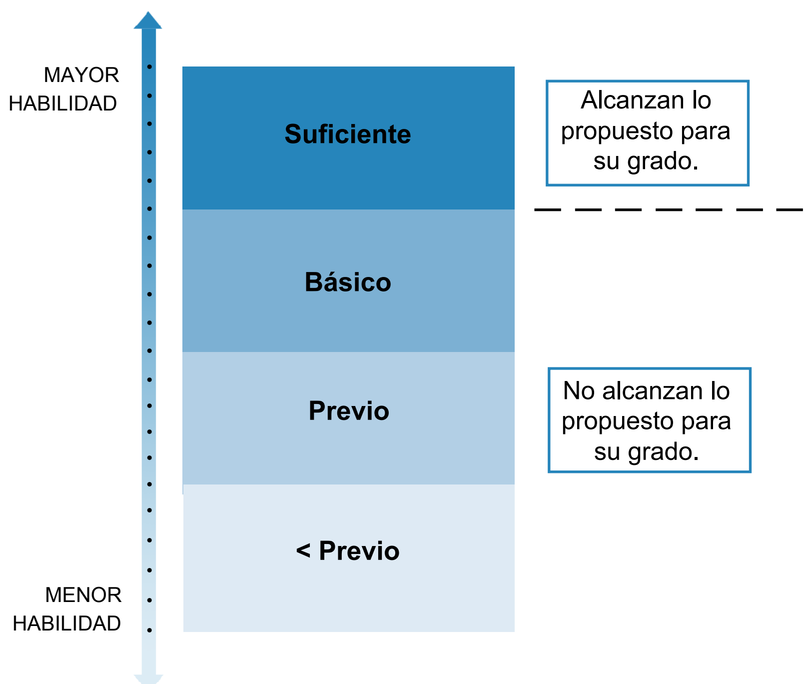


2 Niveles de desempeño en las pruebas de rendimiento

Como ya se indicó, el modelo de evaluación de la EN 2004 permite estimar lo que saben y hacen los estudiantes, a partir de su desempeño en las pruebas, respecto de lo que deberían saber y deberían hacer.

La Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) realizó diversas consultas a grupos de expertos en educación[15] con la finalidad de determinar cuáles son los niveles de desempeño pertinentes para clasificar a los estudiantes en las pruebas. Para esta labor, se partió del análisis de cada una de las preguntas que formaron parte de las pruebas. Estas preguntas se ordenaron de acuerdo con su nivel de dificultad desde la más difícil hasta la más fácil formando una escala en la que se determinaron tres niveles de desempeño: suficiente, básico y previo.

DISTRIBUCIÓN DE LOS ESTUDIANTES SEGÚN SU HABILIDAD



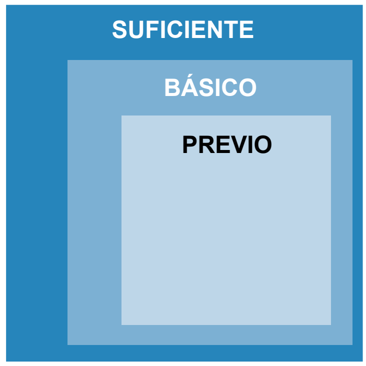
15. Se consultó a alrededor de 160 personas, entre docentes, representantes de editoriales, investigadores, especialistas del área pedagógica de las instancias de gestión descentralizadas y del MED para que determinaran los puntos de corte entre los niveles. Por lo tanto, se convocó no solo a «expertos teóricos», sino también a «expertos prácticos», conocedores de la realidad, de los intereses y de las necesidades de los estudiantes de diversas zonas del país.

Los límites que indicaron hasta qué pregunta de la escala ordenada por dificultad tenía, por lo menos, que responder un estudiante para ser considerado en uno de los niveles de desempeño fueron definidos por un grupo de expertos en cada una de las áreas evaluadas. A este procedimiento se le conoce como establecimiento de «puntos de corte».[16]

Establecer los puntos de corte de las pruebas ha permitido identificar el conjunto de preguntas que debe resolver un estudiante para ser clasificado en uno de los niveles de desempeño para el grado que cursa. De esta manera, la población evaluada ha podido ser categorizada en función de los niveles de desempeño definidos para la prueba y se ha obtenido el porcentaje de población que pertenece a cada uno de dichos niveles.

Una característica importante de estos niveles es que son inclusivos, es decir:

- los estudiantes que se encuentran en el nivel básico pueden resolver las preguntas que pertenecen a ese nivel y al nivel previo; y
- los estudiantes que están en el nivel suficiente pueden resolver todas las preguntas de los niveles previo, básico y suficiente.



Se presentan a continuación las características de cada uno de los niveles de desempeño establecidos a partir de la EN 2004.

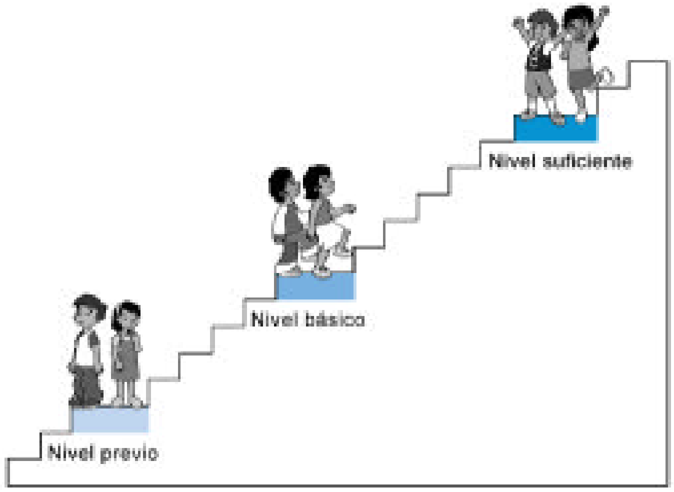
Nivel suficiente: Los estudiantes ubicados en este nivel demuestran el dominio adecuado de las capacidades evaluadas en el grado. No son estudiantes avanzados ni destacados los que predominan en este nivel, sino estudiantes que han alcanzado lo establecido para el grado. Al finalizarlo, todos o la gran mayoría de los estudiantes deberían encontrarse en este nivel.

Nivel básico: Los estudiantes agrupados en este nivel demuestran un dominio incipiente o elemental de las capacidades esperadas en el grado. Esto quiere decir que las han desarrollado solo parcialmente a pesar de estar por terminar el grado.

Nivel previo: Los estudiantes en este nivel demuestran un dominio de las capacidades desarrolladas en grados anteriores. Esto quiere decir que, a pesar de estar por concluir el grado, solo tienen desarrolladas habilidades que ya han trabajado en grados anteriores y no las esperadas para el grado que cursan.

Los estudiantes que no lograron resolver el conjunto de preguntas necesarias para ser considerados en el nivel previo fueron ubicados en un grupo llamado «por debajo del previo», en el que se encuentran los estudiantes que no lograron resolver las preguntas más sencillas (que, generalmente, corresponden a ciclos anteriores).

16. Los niveles de desempeño se establecieron mediante un procedimiento enmarcado en el Método Bookmark. (Véanse: Hambleton 2001 y el documento de la UMC <http://www.minedu.gob.pe/umc/2001/doctec/informe_puntos_corte.pdf>.



Nivel suficiente: Los estudiantes alcanzan el nivel esperado para el grado.

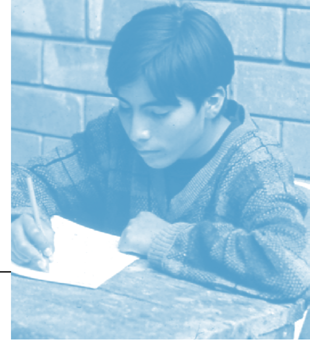
Nivel básico: Los estudiantes muestran un dominio incipiente o un manejo elemental de las capacidades evaluadas en el grado.

Nivel previo: Los estudiantes demuestran un manejo adecuado solo de las capacidades desarrolladas en los grados anteriores.

Se espera que todos o la mayoría de los estudiantes se encuentren en el nivel suficiente.

El gráfico anterior ilustra la idea del aprendizaje como un proceso continuo: el desarrollo de las capacidades de los estudiantes desde el nivel previo (menor habilidad) hasta el nivel suficiente (mayor habilidad) es gradual.

3 Marco de evaluación del área de Matemática



La matemática en la educación básica

La matemática escolar ha tenido diversos enfoques a lo largo de su historia, influenciada sobre todo por el desarrollo de la propia disciplina y por las tendencias de los matemáticos de cada época. Así, partir de la década de 1930, el Grupo Bourbaki[17] emprendió una revisión de los fundamentos de la matemática y trató de reorganizarla y unificarla partiendo de un enfoque estructuralista. Esta revisión, que se tradujo en la publicación, capítulo a capítulo, de *Eléments de Mathématique*, puso en debate la organización del conocimiento matemático que hasta entonces se había aceptado. La influencia del Grupo Bourbaki fue en aumento y se cristalizó en el campo educativo en el movimiento denominado Matemática Moderna. Este movimiento planteaba que la educación matemática debía privilegiar el conocimiento de las estructuras matemáticas. Se creía que, con el conocimiento y el dominio de dichas estructuras, los estudiantes podrían comprender los conceptos, operar mejor y tener una mayor eficacia al momento de resolver problemas.

Este movimiento francés de reforma educativa influyó notablemente en la educación peruana en la década de 1970. El grupo de técnicos del Instituto Nacional de Investigación y Desarrollo de la Educación (INIDE)[18] desarrolló una propuesta curricular basada en este enfoque, elaboró y distribuyó materiales de capacitación inscritos en esta tendencia. Los textos escolares que se publicaron privilegiaban el contenido conceptual, la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y el método axiomático. Estos textos poco tenían que ver con la realidad cotidiana de los estudiantes, pues se centraban en el estudio de hechos, conceptos y estructuras fundamentales de la matemática. Se trataba de desarrollar la abstracción, pero buscando que los estudiantes adaptaran sus estructuras mentales a las de la disciplina.

La Matemática Moderna no tuvo el éxito que esperaban sus propulsores, por lo que se inició un debate respecto de la pertinencia de este enfoque. Finalmente, fue cuestionado y no tardó en desaparecer de la mayoría de los países que lo habían incorporado a sus sistemas educativos.

En nuestro país este enfoque tampoco logró los objetivos que se planteaba, motivo por el cual los programas y currículos regresaron a la división clásica del contenido matemático escolar (aritmética, álgebra, geometría, trigonometría). Y, ante la ausencia de un enfoque pedagógico, la mayoría de profesores optó por trabajar asociando la matemática con la capacidad de calcular. En primaria, lo fundamental era el dominio de los cálculos

---

17. Grupo de influyentes matemáticos franceses que se interesaron por plantear modelos y reformas a la educación matemática de su época. Entre sus integrantes podemos mencionar a Jean Dieudonné, Henri Catan y André Weil.
18. Dependencia del Ministerio de Educación del Perú en esa época.

aritméticos y, en secundaria, el cálculo algebraico, geométrico y trigonométrico. Este regreso a lo básico prevalece hasta hoy en día en la práctica docente, hecho que puede comprobarse por la existencia de estudios que señalan que casi el 85% de los ejercicios resueltos por los estudiantes en sus cuadernos de trabajo y de clase se centran en la aplicación de algoritmos convencionales (Cueto y otros 2003).

Hacia finales de la década de 1980 y durante la década de 1990, el empleo de las calculadoras y las computadoras empieza a difundirse en nuestro país. Los educadores matemáticos vieron, entonces, con preocupación su inclusión en la educación básica y cuestionaron la idea de si lo primordial de una enseñanza matemática es el dominio de los cálculos. La mayoría de matemáticos ya no se dedica al estudio de la ciencia pura y, cada vez con mayor frecuencia, se incorporan matemáticos a los campos financiero, industrial y comercial. Consecuentemente, las carreras de matemática privilegian la matemática aplicada y los artículos especializados versan en su mayoría sobre las aplicaciones de la matemática en situaciones reales.

En este contexto, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de Estados Unidos promovió una discusión entre investigadores del mundo docente y matemático que se tradujo en la publicación del documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), en el cual se proponen cuatro estándares fundamentales de una educación matemática de calidad:

- Resolución de problemas
- Comunicación
- Razonamiento
- Conexiones matemáticas

En este marco de debate mundial, se inició en el Perú la reforma de la Educación Básica. Los programas curriculares de inicial, primaria y secundaria se revisaron y se propusieron nuevos enfoques para la educación. En el caso de la matemática, el Ministerio de Educación adoptó el enfoque centrado en la resolución de problemas, declarando que:

> El proceso de solución de problemas es esencial en el aprendizaje matemático, no como motivación inicial o aplicación final, sino como el medio mismo por el cual se aprende. Es precisamente la capacidad resolutiva que logren los niños y niñas lo que indicará la calidad de la educación matemática que se imparta en nuestro país; por ello constituye el quehacer fundamental en la escuela. (MED 2000a: 59)

La Estructura Curricular Básica de Educación Primaria de Menores se generalizó en el año 1999. En el caso de la educación secundaria, tanto la reforma de Modernización de la Educación Secundaria, iniciada en 1996, como la Nueva Secundaria, iniciada en el año 2001 y generalizada en el 2005, se desarrollaron a la luz del enfoque de resolución de problemas. Así, en el Diseño Curricular Básico de Educación Secundaria (DCB), en el área de Matemática, se afirma que los estudiantes deben aprender a valorar la matemática, a sentirse seguros de su capacidad, a resolver problemas, a comunicarse y a razonar matemáticamente.

El enfoque actual se centra en el desarrollo de las capacidades del individuo que le permitirán resolver problemas, construir razonamientos válidos y comunicar información mediante el uso de conceptos y términos matemáticos. No obstante, estos tres procesos, si bien son los más amplios y complejos de desarrollar, no pueden dejar de lado el uso y aplicación de rutinas y procedimientos matemáticos estandarizados.

En la actualidad, se utilizan los contenidos de carácter matemático cada vez con mayor frecuencia para presentar y analizar información, para tomar decisiones y para solucionar situaciones en la industria y en el comercio. Resulta claro que todo ciudadano de hoy debe poseer un bagaje cultural de conocimientos y procedimientos matemáticos que le permita comprender los procesos de cambio, la dinámica del azar, las situaciones cuantitativas y las representaciones espaciales. Por este motivo, resulta muy importante involucrar en forma progresiva a la población en el conocimiento y dominio de los procesos y de los contenidos matemáticos.

La resolución de problemas, la comunicación matemática y la aplicación de algoritmos, trabajadas en forma sistemática en combinación con los contenidos adecuados aplicados en diversos contextos, serán de gran utilidad para el estudiante al enfrentar los diversos retos que la vida laboral y académica le presentan.

Un buen desempeño matemático contribuye al desarrollo de las sociedades, pues aporta tanto a su avance científico y tecnológico como a su evolución económica y política. Precisamente por ello, los países de mayor desarrollo científico y tecnológico prestan especial atención a la evaluación y perfeccionamiento de esta área. Por otro lado, se puede afirmar que, en el ámbito personal, el aprendizaje de la matemática contribuye con la formación integral del individuo desde diversos aspectos: cognitivo, comunicacional, instrumental y cultural, entre otros.

Por estas razones, la EN 2004 ha propuesto, en el área de Matemática, evaluar el nivel de incorporación de los aprendizajes en el sistema educativo nacional. De esta manera se podrá proveer a los organismos, instituciones e investigadores del sector, a la luz de los resultados y su respectivo análisis, de información útil y oportuna que sirva como insumo para la mejora en la calidad de la educación matemática de los estudiantes peruanos.

Delimitación del campo a evaluar

En la EN 2004 se evalúa la *formación matemática* de los estudiantes, la cual es definida de la siguiente manera:

> La formación matemática es el dominio de **habilidades** y **conocimientos matemáticos** útiles para **desempeñarse con eficacia** ante **situaciones problemáticas** novedosas o rutinarias, cuya solución requiera **la puesta en práctica** de dichas habilidades y conocimientos.

A continuación se precisan algunos términos de esta definición:

...habilidades matemáticas: El término *habilidades* se refiere tanto al conjunto de estrategias de resolución como a los procedimientos operativos comunes que un individuo utiliza deliberadamente, con cierto control y orden lógico, para solucionar problemas.

...conocimientos matemáticos: Las habilidades matemáticas no se pueden desarrollar sin los contenidos conceptuales propios de la disciplina. Estos han sido seleccionados de los diseños curriculares vigentes e incluyen tanto el componente semiótico de la matemática (sintaxis, símbolos, notaciones, etc.), como los elementos constitutivos de la estructura matemática (definiciones, axiomas, lemas y teoremas). Para la presente evaluación, se han considerado tanto los contenidos de mayor aplicabilidad en la vida cotidiana del estudiante, como aquellos que resultan indispensables para lograr conocimientos matemáticos más avanzados.

...desempeñarse con eficacia: La matemática ayuda al individuo a desenvolverse en el mundo actual, a comunicarse en forma eficiente, a elaborar juicios bien fundamentados y a considerar a la matemática como un recurso efectivo para solucionar problemas.

...situaciones problemáticas: Las situaciones problemáticas elegidas para esta evaluación se pueden clasificar en dos grandes categorías: situaciones de contexto realista y situaciones de contexto matemático.

...la puesta en práctica: La matemática debe ser entendida como un método antes que como un conjunto de contenidos. Por esta razón, una educación matemática de calidad debe brindar oportunidades para que los estudiantes:

- desarrollen su capacidad de utilizar las herramientas matemáticas para comunicar de manera óptima cierta información;
- identifiquen aquellas situaciones susceptibles de ser expresadas en lenguaje matemático y las resuelvan haciendo uso de medios matemáticos;
- desarrollen habilidades matemáticas para el dominio de diversos conocimientos matemáticos que les permitan desempeñarse con éxito al resolver situaciones matemáticas, novedosas o habituales o situaciones cotidianas; y
- comprendan y comuniquen información de tipo matemático, establezcan y realicen conexiones entre los conceptos matemáticos y las otras disciplinas.

Dimensiones del modelo de evaluación

El modelo de evaluación del área de Matemática considera tres dimensiones para medir la formación matemática de los estudiantes: capacidades, contenidos y contextos. A continuación se desarrolla cada una de estas dimensiones.

Capacidades

Las capacidades son habilidades matemáticas complejas que el estudiante deberá poner en práctica al enfrentarse a las preguntas de la prueba, que han sido elaboradas tratando de asemejarse a situaciones que se le podrían presentar en su vida cotidiana.

En las pruebas de matemática se han considerado tres capacidades: resolución de problemas, comunicación matemática y aplicación de algoritmos. A continuación se explica cada una de ellas.

Resolución de problemas

Al elegir el plan de llamadas telefónicas más conveniente, al seleccionar la mejor oferta de las tiendas o elegir una ruta rápida y económica para repartir correspondencia, estamos enfrentándonos a problemas que pueden resolverse haciendo uso de procedimientos y contenidos matemáticos.

El desempeño eficaz en matemática está asociado a la capacidad de resolver problemas, pues es por medio de estos que se introducen nuevos conceptos, se aplican los ya aprendidos o se realizan conexiones entre estos para formar redes conceptuales más amplias y afianzar los conocimientos.

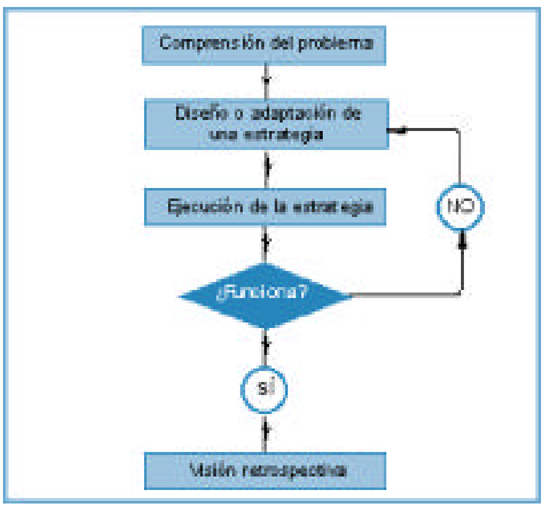
La elaboración de estrategias personales para resolver problemas genera en los estudiantes confianza en sus posibilidades de hacer matemática, estimula su autonomía y creatividad, expresa el grado de comprensión de los conocimientos y facilita mecanismos de transferencia a otras situaciones.

En esta evaluación, se entiende como *problema* a aquella situación que plantea una cuestión de contenido matemático inscrita en la matemática escolar y cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla, quien experimenta un bloqueo. El sujeto deberá buscar, investigar y establecer relaciones para hacer frente a la nueva situación. En la EN 2004, estas situaciones se presentan en forma impresa y están referidas a contextos matemáticos y a contextos propios de la vida real. Para resolverlas, el estudiante deberá leer, comprender e interpretar la situación presentada; diseñar una estrategia novedosa o adaptar una ya conocida para resolverla; llevar a cabo su estrategia, paso a paso; y, finalmente, interpretar sus resultados matemáticos dentro del contexto de la situación presentada.

Las fases o etapas por las que atraviesa un estudiante al enfrentarse a una situación problemática que quiere resolver pueden dividirse en cuatro:

- Fase 1: Comprensión del problema
- Fase 2: Diseño o adaptación de una estrategia
- Fase 3: Ejecución de la estrategia y control
- Fase 4: Visión retrospectiva

Estas cuatro fases del proceso mental y actitudinal que atraviesa un individuo al momento de resolver un problema pueden esquematizarse así:



En la fase de comprensión del problema, el estudiante debe leerlo atentamente; si es posible, debe expresarlo en sus propias palabras, aunque su lenguaje no sea riguroso. Intentará hacerse una imagen mental de la situación, buscando casos particulares o, tal vez, simulando la situación o traduciéndola a un diagrama visual que le ayude a comprender mejor la interrelación entre la información presentada y la solicitada. En este diálogo consigo mismo, el estudiante tratará de identificar la incógnita, los datos, las condiciones y si estas son suficientes, si son necesarias o si son complementarias.

En la fase de diseño o adaptación de una estrategia, el estudiante comienza a explorar la situación. En esta fase resulta útil establecer una lista de estrategias heurísticas. Dependiendo de la estructura del problema, el estudiante podrá elegir la más adecuada entre las aprendidas anteriormente o combinar en forma creativa estrategias para crear una novedosa que le señale un camino plausible hacia la solución del problema. Esta es una de las fases más importantes en el proceso de solución de problemas que depende mucho de la base de conocimientos y de la calidad del pensamiento del estudiante.

Luego de haber decidido el camino que se va a seguir y de comprender qué se pretende lograr, se procede a ejecutar la estrategia de solución. Es en este momento cuando entran a tallar los mecanismos de regulación mental y la habilidad para superar los bloqueos. El estudiante, al ejecutar su plan, puede observar que este no lo conduce a la solución, entonces tendrá que tomar una decisión: seguir por el camino elegido o volver a la fase anterior y elegir una estrategia distinta. Esto último es bastante difícil para aquellos que no tienen experiencia en resolver problemas, pues los mecanismos de control del proceso son muchas veces bloqueados desde la misma escuela. La ocurrencia de este bloqueo se debe a que, usualmente, el docente presenta en la pizarra los problemas ya resueltos y «en limpio» y siempre muestra a los estudiantes la estrategia que llevará a la solución.

Para que el estudiante pueda seguir con el proceso de resolución, la actitud tiene aquí un papel crucial: es importante no abandonar una estrategia antes de revisar sus diversos aspectos y perseverar, pero sin perder de vista que existen otras estrategias que, eventualmente, podrían ser útiles en este momento.

Cuando se ha obtenido una solución (no una respuesta, pues podría haber varias o ninguna), se ingresa a la cuarta fase, en la que se efectúa una reflexión acerca del proceso de solución, se hace una verificación de la solución y se puede modificar el problema o generalizar los resultados. Esta fase hace referencia a procesos metacognitivos. Investigaciones recientes afirman que es posible mejorar las habilidades para resolver problemas si se mejora el aspecto metacognitivo. Por esta razón, la visión retrospectiva es considerada por muchos como la fase más importante en el proceso heurístico.

La EN 2004 pretende evaluar en qué medida el estudiante:

> Resuelve situaciones problemáticas susceptibles de ser abordadas matemáticamente, mediante diversas estrategias heurísticas y algoritmos, convencionales o no, considerando diferentes contextos y niveles de dificultad.

A continuación, se presenta un ejemplo que evalúa la capacidad de resolución de problemas.

El ratón cebra es un ratón africano que mide 21 cm de largo. Pero de este largo, solo los $\frac{4}{7}$ pertenecen a la cola. En cambio, el jerbo es un roedor de Asia Central que tiene un largo de 40 cm. De este largo, $\frac{5}{8}$ **no** pertenecen a la cola. ¿Cuál de los dos tiene la cola más larga y por cuántos centímetros?

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

Comunicación matemática

Observando las noticias en los periódicos o en revistas especializadas, notaremos la inclusión cada vez más frecuente de gráficos lineales, diagramas de barras, tablas y otros esquemas de tipo matemático que permiten observar la información de manera compacta y sintética pero, sobre todo, precisa. Debido al incremento del uso de símbolos y conceptos matemáticos en los procesos de comunicación social, para conseguir en la educación básica un desempeño adecuado en matemática se debe incluir la codificación y decodificación de los estímulos, su interpretación y la capacidad de tomar decisiones fundamentadas en argumentos lógicos.

Para la EN 2004, la comunicación matemática es aquel proceso que faculta al estudiante a interpretar, relacionar, clasificar, representar y recodificar tanto la información que le presenta el medio como la que él necesita producir para responder a distintas situaciones. Estas situaciones pueden tener un contenido matemático explícito (como una situación de compraventa) o implícito (el dato del nombre de una persona no tiene aparentemente contenido matemático; sin embargo, si se tiene un número elevado de nombres de personas, el contenido matemático de estadística será muy importante para poder manejar esta cantidad de datos).

La comunicación es una parte esencial de la educación matemática porque es una forma de compartir información y de aclarar la comprensión, tanto al elaborar una comunicación para expresar las ideas propias como al recibir otras diferentes. Mediante la comunicación, estas ideas se convierten en objetos de reflexión, discusión y corrección. Los procesos de comunicación también ayudan a construir significados, a fijar nuevas nociones, además de hacer públicas las propias.

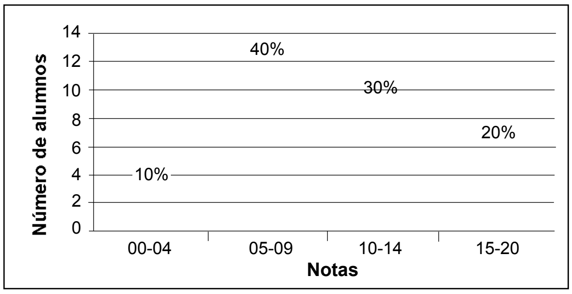
Por ello, la comunicación matemática ayuda al estudiante a aclarar su pensamiento, a desarrollar sus estructuras conceptuales y a construir vínculos entre sus nociones informales e intuitivas en el lenguaje abstracto y simbólico de la matemática.

La EN 2004 pretende evaluar en qué medida el estudiante:

- recibe y comunica información de forma clara y eficiente mediante el uso del lenguaje matemático; y
- argumenta de manera fundamentada, sobre la base de conocimientos matemáticos, las afirmaciones que realiza.

Este es un ejemplo de pregunta que evalúa esta capacidad:

En un examen de matemática las notas obtenidas por 30 estudiantes son muy diversas, por lo que el profesor decidió agruparlas y presentar los resultados a sus alumnos de la siguiente manera:



Explica qué significa el **30%** en el diagrama anterior:

____

____

____

Aplicación de algoritmos

Cuando aprenden las instrucciones para manejar una computadora, siguen las reglas para un determinado juego o los pasos para preparar un postre, los estudiantes están utilizando algoritmos. Los algoritmos son un conjunto de acciones (operaciones y procedimientos), pasos secuenciales previamente establecidos y formas definidas de actuar para llegar a resolver situaciones. Se trata siempre de formas de proceder prefijadas, efectivas y sistemáticas que se orientan al logro de un objetivo específico.

En la vida cotidiana, un estudiante se encuentra con situaciones que pueden ser enfrentadas exitosamente mediante la elaboración o aplicación de algoritmos. Por ejemplo, debe alistarse cada mañana para ir a la escuela, tomar sus alimentos, seleccionar los útiles y materiales correspondientes al horario de clases de ese día, etc. Cada una de estas actividades puede ser realizada mediante una secuencia ordenada de pasos, en la que es muy importante poseer fluidez operacional, es decir, tener y usar métodos eficientes y precisos para efectuar el algoritmo.

En la EN 2004 se ha incluido la aplicación de algoritmos porque constituyen un conjunto de herramientas útiles para solucionar una diversidad de problemas.

Es necesario evaluar en qué medida los estudiantes han aprendido a utilizar y seleccionar determinados algoritmos para poder enfrentarse adecuadamente a los problemas que se les presentan.

Véase, a continuación, un ejemplo de pregunta que evalúa esta capacidad.

Resuelve:

$$0{,}5(x - 5) = -1{,}6 + \frac{x - 3}{3}$$

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

Contenidos

Los contenidos son las unidades de información (definiciones, hechos, nombres, conceptos, etc.) pertenecientes al área curricular. Estos contenidos han sido seleccionados de los DCB vigentes en el momento de la elaboración de la prueba. Dichos contenidos han sido reagrupados en cuatro categorías:[19] número y cantidad, álgebra y funciones, espacio y forma, y estadística y probabilidad. En seguida, se detalla cada una de estas categorías.

Número y cantidad

Este contenido está muy ligado históricamente a la matemática escolar y se refiere a los diferentes conjuntos numéricos en todas sus representaciones (enteros, fracciones, decimales); sus propiedades (por ejemplo, la divisibilidad); las operaciones aritméticas, tanto aisladas como combinadas; las propiedades de dichas operaciones; la proporcionalidad y sus aplicaciones (regla de tres, porcentaje).

19. Esta forma de agrupar los contenidos responde al enfoque fenomenológico de Steen (1998), quien propone agrupar los contenidos a partir de cómo se presentan estos en los problemas de la realidad.

La importancia de este contenido radica en que, en el mundo actual, la presencia de información cuantitativa se ha incrementado en forma considerable, en parte, debido al auge de las computadoras y a la difusión de los métodos cuantitativos para estudiar diversos fenómenos en los distintos campos del conocimiento. Las competencias numéricas requeridas por los futuros ciudadanos no pueden limitarse al aprendizaje de las operaciones básicas y al trabajo con expresiones algebraicas. Por esta razón, es necesario que los ciudadanos posean las habilidades para interpretar los números usados para describir procesos complejos, razonar con conjuntos de variables interrelacionadas, crear e interpretar de manera crítica fenómenos cuando no existe un modelo preestablecido, etc.

Los estudiantes deben comprender las propiedades fundamentales de los sistemas numéricos y la vinculación entre estos sistemas matemáticos y las situaciones de la vida real en que están incluidos. Deben también describir e interpretar estructuras cuantitativas mediante representaciones verbales, simbólicas y gráficas. Asimismo, deben ser capaces de efectuar cálculos, tanto exactos como aproximados, en los que intervienen ideas aritméticas por medio de diversos métodos (mental, lápiz y papel, calculadora, computadora) y de aplicar sus destrezas en el manejo de los números para resolver problemas.

En la EN 2004, se evaluaron contenidos relacionados con los diversos conjuntos numéricos ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$), las operaciones básicas, sus propiedades y algoritmos; las razones, proporciones y porcentajes; los patrones numéricos, las relaciones entre los números, sus diversas formas de representación, equivalencia y tamaño relativo; y las magnitudes y sus unidades.

Álgebra y funciones

El álgebra puede ser definida como el arte de descubrir las leyes o patrones que rigen la relación entre diversas variables, independientemente de los valores involucrados. El álgebra es el lenguaje con el que se comunica la mayor parte de la matemática. Permite transformar expresiones matemáticas complejas en otras equivalentes y más sencillas. Es una herramienta poderosa pues permite generalizar situaciones diversas mediante la simbolización. Ofrece, también, un medio para trabajar con conceptos en un nivel abstracto, lo que facilita su comprensión y sus relaciones; además, posibilita la interiorización de estos al ser un medio adecuado para representarlos.

La noción de función constituye una idea unificadora de gran importancia en la matemática. Las funciones son correspondencias especiales entre los elementos de dos conjuntos. Esta noción es importante porque constituye la representación matemática de muchas situaciones de entrada–salida que se encuentran en el mundo real. En ocasiones, las personas hacen uso de las funciones aun cuando no son conscientes de ello. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver diversas situaciones de la vida diaria como problemas de finanzas, economía, estadística, ingeniería, medicina, química y física, astronomía o geología y, en general, cualquier situación en la que haya necesidad de relacionar variables.

En este núcleo han sido considerados los siguientes contenidos para la evaluación: representación algebraica o generalizada de cantidades, relaciones dinámicas entre los valores de dos o más magnitudes, y variaciones. Este núcleo conceptual incluye la notación algebraica, las ecuaciones e inecuaciones, las funciones, sus propiedades y sus distintas representaciones y la iniciación a la geometría analítica.

Espacio y forma

El manejo del espacio y de la forma provee a las personas de herramientas tanto para realizar, representar y estructurar sus actividades y movimientos, como para organizar su pensamiento y su razonamiento. El logro de esta estructuración será posible si el sujeto es capaz de comprender las propiedades, posiciones, representaciones y transformaciones de los objetos y las relaciones entre ellos, lo cual implica comprender las relaciones entre formas y representaciones visuales.

Actualmente, cualquier persona se enfrentará, en algún momento, con situaciones relacionadas con el espacio y con la forma; por ejemplo, la representación de objetos tridimensionales en dibujos bidimensionales (dibujos, planos, etc.) o el diseño de formas de representación de información (diagramas, secuencias, etc.).

Se puede apreciar la aplicación de estas nociones en actividades tan cotidianas como la elección de una ruta adecuada para ir de un lugar a otro, la estimación de la capacidad de un recipiente para contener líquidos, el cálculo de la extensión de tela o papel para cubrir un objeto, la elección de la pieza que falta en un rompecabezas, etc. Además, la aplicación de las nociones de espacio y forma es imprescindible en muchas de las actividades de los estudiantes como la lectura y elaboración de mapas, el dibujo a escala, el diseño gráfico, etc.

En la EN 2004 se consideraron los aspectos espaciales de los sólidos y de las figuras (objetos geométricos); sus elementos, relaciones y propiedades; la representación e interpretación de objetos tridimensionales en el plano; los patrones geométricos como modelos de objetos y fenómenos; el manejo del vocabulario básico estandarizado; la comparación de figuras geométricas; el cálculo de medidas tales como área, volumen y perímetro; y las razones trigonométricas.

Estadística y probabilidad

La estadística permite organizar, representar y realizar el análisis e interpretación de datos para elaborar conclusiones y tomar decisiones sobre una base científica. También posibilita la predicción de los comportamientos de determinados fenómenos.

En una sociedad como la actual, en la que la información está en constante aumento, la estadística se convierte en una herramienta muy útil para recolectar, describir y organizar dicha información. Así, son numerosas las aplicaciones de métodos estadísticos en las diferentes áreas de la actividad humana. Por ejemplo, las gráficas y cuadros estadísticos son usados frecuentemente en las actividades comerciales; y los métodos de muestreo son empleados por investigadores de mercado al hacer encuestas sobre las preferencias del consumidor frente a diversos productos. También se aplican métodos estadísticos en el control de calidad, al elaborar censos y cuadros de distribución de la población por edades, tasas de natalidad, de mortalidad, etc.

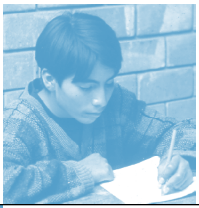
Resulta imposible pronosticar el futuro con absoluta certeza; sin embargo, la necesidad de entender la incertidumbre llevó a la creación de la teoría de la probabilidad. En muchos casos, se puede tener algún conocimiento sobre los posibles resultados de una decisión. Si se organiza esta información y se analiza sistemáticamente, se podrán reconocer las suposiciones, comunicar los razonamientos y tomar una decisión más acertada de lo que se lograría recurriendo a un método que no fuese científico.

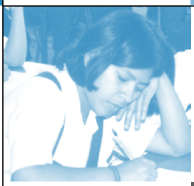
En la EN 2004 este núcleo se evaluó mediante preguntas referidas a la recolección, organización, presentación y análisis de datos. La probabilidad fue objeto de evaluación solo en quinto grado de secundaría mediante preguntas acerca de la probabilidad de ocurrencia de eventos y del espacio muestral.

Contextos de aplicación

Un aspecto importante de la formación matemática es el desarrollo en el estudiante de las capacidades que le permitan usar y hacer matemática en gran variedad de situaciones. La EN 2004 ha considerado dos tipos de contexto: el intramatemático y el extramatemático. El primero trata de las tareas del universo matemático, utiliza sus propios símbolos y presenta objetos matemáticos sin referirlos o inscribirlos en el mundo real. El segundo ubica los objetos matemáticos en relación con los objetos de la vida del individuo. Los contextos extramatemáticos pueden clasificarse de acuerdo con el nivel de uso o de familiaridad que tengan para el individuo.

Independientemente de su distancia de las situaciones propias de la vida cotidiana de los estudiantes, las preguntas de la EN 2004 buscan evaluarlos en contextos auténticos, pues, si la educación matemática debe preparar a los estudiantes para que sean ciudadanos activos e informados, los estudiantes deberán responder adecuadamente en contextos reales tales como los que se presentan en las noticias, en las situaciones de compraventa o en los presupuestos para realizar un trabajo, etc. Esto no excluye, sin embargo, contextos ficticios o artificiales basados en representaciones estilizadas de problemas, tales como, por ejemplo, situaciones para hallar las edades de personas sobre la base de un acertijo.





PARTE II

TERCER GRADO DE SECUNDARIA

1 Importancia y alcances de la evaluación

Para la EN 2004, cuarta evaluación nacional realizada por la UMC, se consideró necesario recoger información sobre el rendimiento estudiantil al término de los ciclos que no habían sido evaluados anteriormente. Así, para el nivel primario se incluyó la evaluación de segundo grado de primaria. Análogamente, para el nivel secundario se incluyó el término del ciclo I que, en el momento de diseñar la evaluación (año 2003), estaba fijado en tercer grado de secundaria.[20]

La importancia de evaluar el rendimiento estudiantil en un grado intermedio del nivel secundario como tercero se justifica por la necesidad de contar con información sobre el desarrollo de las capacidades de los estudiantes en este grado, que está caracterizado por decisivos cambios en el desarrollo cognitivo. Es en esta edad (14 años aproximadamente) que, según Jean Piaget, los estudiantes se encuentran en el nivel de las operaciones formales, lo que los capacita para comprender generalizaciones e hipótesis, trabajar con lo posible (y no solo con lo que se da en la realidad) y les permite estructurar su pensamiento de manera lógica y ordenada.

El estudiante, al contar con un mayor desarrollo de sus capacidades intelectuales, podrá ser capaz de enfrentarse a nuevas nociones, métodos y situaciones problemáticas. Sin embargo, estos potenciales intelectuales deben ser estimulados por el medio mediante una variedad y diversidad de experiencias. Por eso, es importante evaluar a los estudiantes en este grado para conocer hasta qué punto el sistema educativo está aprovechando ese nuevo potencial para aprender que poseen.

En el área de Matemática en particular, los estudiantes de tercero de secundaria comienzan a trabajar, de una manera más profunda, ciertos núcleos de contenidos tales como el álgebra, la geometría y la estadística, ya que, por la evolución intelectual ya mencionada, se encuentran preparados para comprender las nociones pertenecientes a estos contenidos, que se caracterizan por ser más complejas y abstractas.

Es importante destacar que no se evalúa el rendimiento de los estudiantes solamente en las capacidades y contenidos *de* tercer grado de secundaria, sino que, de una manera inclusiva, se evalúa su rendimiento *hasta* tercero de secundaria. Esto quiere decir que se incorporan en la evaluación capacidades y contenidos no solo de tercer grado sino también de los grados anteriores. De esta manera, es posible recoger información sobre los diferentes niveles de desarrollo de las capacidades matemáticas de los estudiantes de este grado.

Por otro lado, deben precisarse los alcances de esta evaluación. Al tratarse de una evaluación de sistema realizada mediante una prueba escrita estandarizada, no es posible

20. En el actual Plan de Estudios de la Educación Básica Regular, tercero de secundaria es el primer grado del ciclo VII.

incorporar todas las capacidades sino solo las que pueden ser evaluadas mediante una prueba de papel y lápiz. Además, se debe señalar que, en el momento de elaborar los instrumentos, se encontraban vigentes dos DCB (diferentes del actual), por lo que se tuvo que seleccionar los contenidos y capacidades comunes a ambos diseños, los que fueron validados por las instancias normativas del MED.

Capacidades curriculares evaluadas en la EN 2004
en tercer grado de secundaria

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	• Resuelve situaciones problemáticas referidas a operaciones aritméticas en el conjunto de los números reales. • Resuelve situaciones problemáticas susceptibles de ser abordadas mediante ecuaciones, inecuaciones y funciones elementales. • Resuelve situaciones problemáticas referidas a figuras y cuerpos geométricos. • Resuelve situaciones problemáticas referidas a diagramas estadísticos, frecuencias y medidas de tendencia central.
COMUNICACIÓN MATEMÁTICA	• Identifica y representa subconjuntos de números y las relaciones entre estos. • Representa situaciones problemáticas mediante el lenguaje algebraico. • Identifica y grafica funciones básicas y sus elementos. • Reconoce, clasifica y grafica figuras y cuerpos geométricos. • Clasifica, representa y grafica información estadística.
APLICACIÓN DE ALGORITMOS	• Calcula operaciones combinadas con números reales. • Calcula el conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones en R. • Calcula los valores en una función. • Calcula el área y el perímetro de figuras geométricas elementales.

Es importante señalar que todo lo que se reporta en este informe acerca de resultados y dificultades de los estudiantes corresponde únicamente a los aspectos evaluados y no pretende ir más allá de lo considerado en esta evaluación.

2 ¿Qué pueden hacer los estudiantes en cada nivel de desempeño?

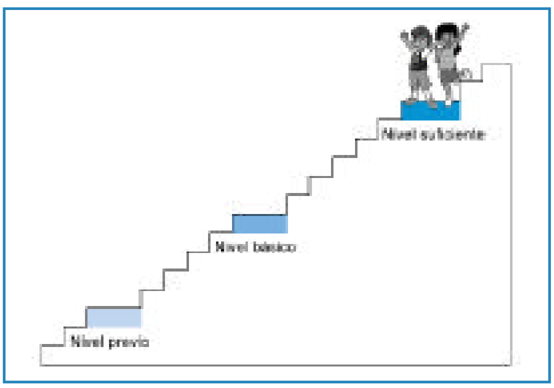
En este capítulo se describen los niveles de desempeño correspondientes a tercer grado de secundaria para el área de Matemática y las tareas que pueden realizar los estudiantes que se encuentran en cada nivel. Además, se incluyen algunas preguntas ilustrativas de cada nivel. Luego de cada una, se comentan algunas características destacadas de la pregunta (qué evalúa, qué pueden hacer los estudiantes para resolverla).

Se presenta también una ficha técnica en la cual se indica la capacidad y el contenido matemático que evalúa la pregunta, el contexto en el que se sitúa, el formato (opción múltiple, respuesta corta o respuesta extensa), el nivel de desempeño y su dificultad Rasch.[21]

2.1. Lo que hacen los estudiantes que alcanzaron el nivel suficiente

NIVEL SUFICIENTE

Que un estudiante se ubique en este nivel significa que ha desarrollado adecuadamente las capacidades correspondientes al grado evaluado.



Los estudiantes ubicados en este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias y no rutinarias que demandan elaborar una secuencia de hasta tres operaciones aritméticas o utilizar la proporcionalidad directa con números racionales en su representación decimal.

Estos estudiantes manejan adecuadamente las operaciones combinadas con números enteros respetando el orden jerárquico de dichas operaciones y se están iniciando en la comprensión de los números racionales.

Asimismo, calculan el valor de la incógnita en ecuaciones e inecuaciones de primer grado de hasta tres pasos, con un nivel de signos de agrupación, definidas en el conjunto de los números racionales en su representación decimal. Calculan el conjunto solución de

21. Es el puntaje que determina la ubicación de cada pregunta en la escala de dificultad. En la medida en que este puntaje aumenta, la dificultad de la pregunta aumenta también.

sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas definidos en el conjunto de los números enteros, cuando son presentados de manera ordenada. Sin embargo, solo resuelven situaciones problemáticas que demandan plantear una ecuación elemental de primer grado en los enteros.

Se han iniciado en el desarrollo de la noción de función como una regla o una fórmula, lo cual les permite calcular valores puntuales de las imágenes de funciones polinómicas de primer y segundo grados, e identificar la expresión analítica que corresponde a un gráfico dado.

También, resuelven situaciones problemáticas sencillas que demandan calcular el área del rectángulo y la noción de proporcionalidad geométrica. Elaboran diagramas de barras y resuelven situaciones problemáticas que requieren interpretar y deducir información presentada mediante tablas y diagramas estadísticos.

Tareas que realiza el estudiante en el nivel suficiente

- Resuelve situaciones problemáticas que demandan realizar operaciones aritméticas con números enteros y racionales en su forma decimal.
- Resuelve situaciones problemáticas que demandan calcular porcentajes con números naturales.
- Resuelve situaciones problemáticas que demandan aplicar el razonamiento regresivo usando operaciones aritméticas.
- Resuelve situaciones problemáticas susceptibles de ser abordadas mediante una ecuación de primer grado con números enteros o racionales en su forma decimal, sin signos de agrupación.
- Resuelve situaciones problemáticas que demandan aplicar una inecuación de primer grado con números enteros y sin signos de agrupación.
- Resuelve situaciones problemáticas que demandan calcular el área del rectángulo, utilizar la noción de suma de los lados o encontrar el máximo número de rectángulos contenidos en una figura compuesta por varios rectángulos.
- Resuelve situaciones problemáticas que demandan interpretar diagramas estadísticos, elaborar diagramas de barras, utilizar las nociones de frecuencia absoluta, frecuencia relativa porcentual o media aritmética.
- Recodifica números racionales usuales de su expresión fraccionaria a la decimal.
- Interpreta inecuaciones de primer grado sin signos de agrupación con números enteros y calcula su conjunto solución.
- Interpreta funciones afines, encuentra el valor de la imagen, la pertenencia o no pertenencia a la función de puntos dados y la expresión analítica que corresponde a un gráfico.
- Identifica e interpreta la relación entre los lados y entre las diagonales en un rectángulo y un rombo presentados gráficamente.
- Interpreta las nociones de área, de triángulo rectángulo y de diagonales de un cuadrilátero.
- Calcula el resultado de operaciones combinadas con signos de agrupación en el conjunto de los números enteros.

- Calcula el resultado de ecuaciones de primer grado, con un nivel de signos de agrupación, en los números racionales presentados en su forma decimal.
- Calcula la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas presentado de forma ordenada y definido en el conjunto de los números enteros.
- Calcula el perímetro de un rectángulo.
- Calcula el valor de la imagen en valores enteros para funciones de primer y segundo grados.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden ser resueltas por los estudiantes que se ubican en el nivel suficiente.

M3S01

Suficiente

Algunos de los puntos de la función lineal "*f*" están en la siguiente tabla:

x	1	2	3	4
***f*(x)**	2	4	6	8

A partir de la tabla, la regla de correspondencia de "***f***", puede expresarse como:

a) $f(x) = x + 1$

✓**b)** $f(x) = 2x$

c) $f(x) = 3x - 1$

d) $f(x) = \frac{x}{2}$

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Álgebra y funciones

Contexto: Intramatemático

Formato: Opción múltiple

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 517

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad para resolver situaciones problemáticas referidas a funciones en un contexto intramatemático cuando la información se presenta mediante tablas y se demanda expresarla de manera analítica.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante deberá leer la tabla e interpretar la relación que existe entre las dos filas con las cantidades mostradas y cómo van variando en cada caso, para luego representar simbólicamente dicha relación e identificar cuál de las alternativas corresponde a la variación encontrada.

M3S02

Suficiente

Arturo quiere comprar una colección de revistas de música (cada revista tiene el mismo precio). Si decide comprar doce revistas con el dinero que tiene, le faltarían S/. 6 pero si compra ocho revistas, entonces le sobran S/. 6.

La siguiente ecuación representa la situación propuesta:

$$12x - 6 = 8x + 6$$

En la ecuación anterior, la incógnita "**x**" representa:

a) El costo total de las revistas que compró.

b) La cantidad de dinero que tiene Arturo.

c) La cantidad de revistas que compró.

✓**d)** El costo de cada revista.

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Álgebra y funciones*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *522*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para interpretar situaciones problemáticas presentadas en lenguaje natural y en lenguaje algebraico. En particular, evalúa la interpretación de una ecuación lineal con una incógnita que representa una situación problemática.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

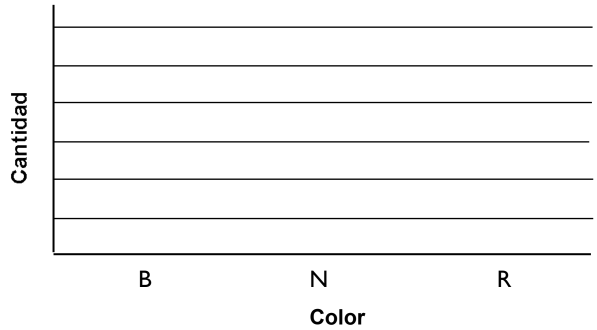
La resolución de esta pregunta demanda del estudiante, en primer lugar, la comprensión de la situación, lo que implica tanto comprender la parte presentada mediante lenguaje natural como la presentada mediante lenguaje algebraico. En seguida, deberá establecer las relaciones que existen entre ambas partes, para, finalmente, identificar cuál de las alternativas representa lo pedido.

Debe resaltarse que el estudiante debe ser capaz de interpretar el significado de la letra «x» en la ecuación y no solo identificar qué parte del texto equivale a la incógnita.

M3S03

Suficiente

En la casa de Pablo crían gallinas blancas (B), negras (N) y rojas (R). Pablo hace el diagrama que se muestra abajo, para representar la cantidad de gallinas de cada color.



A partir del diagrama, responde:

Si hay 15 gallinas blancas, ¿cuántas **no** son blancas?

a) 7

b) menos de 15

✓**c)** 21

d) 30

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *558*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad para resolver situaciones problemáticas referidas a la interpretación de diagramas de barras en las que se debe utilizar la noción de proporcionalidad. El conjunto numérico involucrado es el de los números naturales hasta las decenas. El entorno de la pregunta es comunitario, es decir, relativo a actividades propias de la comunidad, tales como el comercio, la crianza de animales, etc.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe interpretar la situación presentada, es decir, integrar la información mostrada por medio del texto y la del diagrama. Por ejemplo, en el texto se enuncian letras que representan a cada uno de los colores mediante su inicial. Esto servirá para asignarle un nombre a cada una de las barras del diagrama. En seguida, a partir de la comprensión de la relación entre las condiciones y datos presentados, el estudiante deberá formular una estrategia de resolución. Esta estrategia le deberá permitir hallar la escala con la que se ha elaborado el gráfico y, luego, calcular el número de gallinas pedido. Por ejemplo, una estrategia sencilla consiste en identificar que las 15 gallinas blancas que se dan como dato son representadas en el diagrama por una barra que tiene cinco unidades gráficas de longitud. Esta relación, permite calcular que cada unidad gráfica equivale a tres gallinas. Entonces, se puede hallar, por conteo o mediante una estrategias de proporcionalidad (regla de tres, una proporción etc.), el número total de gallinas de los otros colores que hay (21). Finalmente, se deberá seleccionar la respuesta que corresponde a lo pedido en la pregunta.

M3S04

Suficiente

En una huerta se llenan cajas con la misma cantidad de manzanas. De un grupo de 5 cajas se quitan, en total, 132 manzanas que se habían malogrado. Con las manzanas que quedan se llenan 3 cajas y sobran 12 manzanas. ¿Cuántas manzanas van en cada caja?

✓**a)** 72

b) 26

c) 120

d) 60

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Álgebra y funciones*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *597*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para enfrentar situaciones problemáticas que pueden ser resueltas utilizando una ecuación lineal con una incógnita. El conjunto numérico involucrado es el de los números naturales y el entorno en el que se presenta está relacionado con una actividad propia de la comunidad, como el comercio.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver adecuadamente la pregunta, el estudiante debe interpretar el texto para que, a partir de la comprensión de la relación entre las condiciones y datos presentados, formule y elija una estrategia, que podría ser aritmética o algebraica.[22]

Si opta por una estrategia aritmética, el estudiante deberá comprender las relaciones entre los datos para establecer, por ejemplo, que las 132 manzanas malogradas equivalen a 12 menos que dos cajas completas (pues se logran llenar tres cajas con las buenas y quedan 12 manzanas más), por lo que (132 + 12 = 144) serían dos cajas. Y, como todas las

5 cajas completas

Caja de manzanas
Caja de manzanas
Caja de manzanas
Caja de manzanas
Caja de manzanas

132 manzanas malogradas (dos primeras cajas)

3 cajas y 12 más manzanas buenas (tres últimas cajas)

22. En tercer grado de secundaria es esperable que un estudiante pueda utilizar las ecuaciones como una herramienta para la resolución de problemas.

cajas tienen el mismo número de manzanas, cada caja deberá tener (144 ÷ 2 = 72) manzanas.

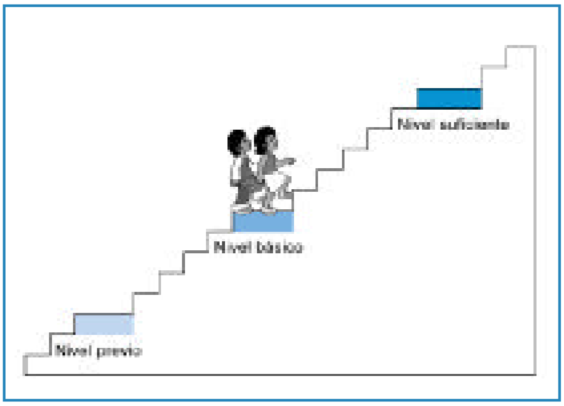
Si el estudiante opta por una estrategia algebraica, requerirá establecer una relación de equivalencia entre las manzanas. Para ello tiene dos invariantes que lo podrán ayudar: el número total de manzanas y el número de manzanas en cada caja. La primera invariante por deducir es un poco más difícil de identificar; la otra, aparece en la pregunta, por lo que es más evidente. Siguiendo esta estrategia, el estudiante podría razonar así: la primera invariante, es decir, el total de manzanas (cinco cajas), es igual al número de las manzanas malogradas (132 manzanas) más el número de manzanas que quedan (las buenas), que asciende a tres cajas y doce manzanas más. Para representar algebraicamente esta relación, se puede tomar como incógnita otra invariante, que es la que se está pidiendo (el número de manzanas que caben en una caja = x). Se obtendrá, entonces, una ecuación tal como la siguiente: $5x = 132 + 3x + 12$, que representa la situación planteada. En seguida, el estudiante debe resolver dicha ecuación, que es sencilla, pues no tiene denominadores ni signos de agrupación, presenta solo cuatro términos y está definida en el conjunto de los números naturales. Finalmente, deberá interpretar la respuesta obtenida.

2.2. Lo que hacen los estudiantes que no alcanzaron el nivel suficiente

A continuación, se presenta la descripción de las habilidades de los estudiantes que no alcanzaron el nivel suficiente, aquellos que se ubican en el nivel básico y en el nivel previo.

NIVEL BÁSICO

Que un estudiante se encuentre en el nivel básico significa que demuestra un desarrollo incipiente o inicial de las capacidades propias del grado.



Los estudiantes que se encuentran en este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias que demandan reproducir una secuencia de hasta tres operaciones aritméticas básicas con números naturales o con decimales positivos que tienen el mismo número de cifras decimales. Evidencian un adecuado manejo de los números naturales y empiezan a consolidar su comprensión de los números enteros. Calculan el valor de la incógnita de ecuaciones de primer grado de menos de cinco términos, sin signos de agrupación, que demandan dos o tres pasos y están definidas en el conjunto de los números enteros. Interpretan las variables como una incógnita, es decir, como «la letra» que representa una cantidad desconocida que se debe hallar, lo cual no les permite aún manejar la noción de función.

Además, los estudiantes ubicados en este nivel resuelven situaciones problemáticas sencillas que demandan la descomposición o integración visual de figuras geométricas simples. Grafican figuras geométricas elementales a partir de características y propiedades dadas. Emplean la simbología geométrica elemental. Interpretan diagramas de barras y cuadros de frecuencia de doble entrada. Resuelven situaciones problemáticas elementales que demandan identificar la frecuencia acumulada de un conjunto de datos.

TAREAS QUE REALIZA EL ESTUDIANTE EN EL NIVEL BÁSICO

- Resuelve situaciones problemáticas de enunciado verbal que pueden ser enfrentadas mediante una secuencia de operaciones aritméticas, con números naturales o con decimales hasta las centésimas (que involucran dinero: soles y céntimos), sin signos de agrupación.
- Resuelve situaciones problemáticas que pueden ser abordadas mediante una ecuación de primer grado con números naturales, sin signos de agrupación.
- Resuelve situaciones problemáticas de enunciado verbal que demandan identificar el número de segmentos o partes de figuras contenidas en una figura compuesta.
- Resuelve situaciones problemáticas que demandan calcular la frecuencia acumulada de un conjunto de datos estadísticos.

- Interpreta los términos de una ecuación de primer grado en el conjunto de los números enteros, sin signos de agrupación.
- Grafica un rectángulo a partir de su descripción verbal usando la simbología geométrica.
- Identifica y compara las características de los lados y ángulos de cuadriláteros con apoyo gráfico.
- Interpreta diagramas de barras y tablas de frecuencias presentados en situaciones problemáticas.
- Recodifica a su forma simbólica un número natural de tres cifras presentado según sus unidades, decenas y centenas usando el lenguaje verbal.
- Calcula el resultado de ecuaciones de primer grado, sin signos de agrupación, de dos o tres pasos (transponer, reducir y despejar), definidas en el conjunto de los números enteros.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden resolver los estudiantes ubicados en el nivel básico.

M3S05

Básico

Una familia gasta S/. 400 en el pago del alquiler de su vivienda, y el doble de ello en otros gastos fijos. Si el ingreso familiar es de S/. 1 500, ¿cuánto dinero le queda?

a) S/. 1 100

✓**b)** S/. 300

c) S/. 700

d) S/. 1 200

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *495*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad para resolver situaciones problemáticas relacionadas con el contenido de número y cantidad. Específicamente, se evalúa la incorporación de las operaciones aritméticas básicas como herramienta para la resolución de problemas rutinarios en situaciones cercanas al estudiante.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

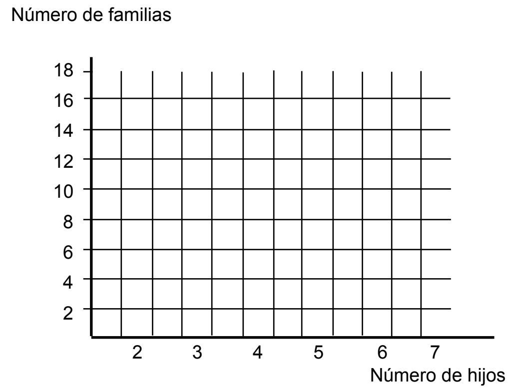
El estudiante debe comprender la situación propuesta e identificar las condiciones y los datos presentados. El segundo dato debe ser deducido (y calculado) a partir del primero, para luego establecer una secuencia de dos operaciones aritméticas más. Por ejemplo, se suman los gastos para luego restarlos del ingreso familiar, o se resta cada uno de los gastos del total del ingreso familiar.

Como es evidente, la dificultad de esta situación problemática no está centrada en la complejidad del cálculo, pues la situación presenta números naturales hasta el orden de los millares y es suficiente el manejo de las operaciones de adición y sustracción. Además, el contexto es bastante cercano al estudiante (gastos, ingresos, dinero) y se trata de una situación problemática rutinaria, pues el estudiante solo tiene que seleccionar las operaciones aritméticas adecuadas para duplicar, juntar o disminuir (es decir, se trata de transformaciones bastante usuales).

M3S06

Básico

Se realizó una encuesta en el colegio para conocer el número de hijos que tiene cada una de las familias. Los resultados se muestran en el siguiente diagrama de barras:



En el gráfico, la cuarta columna (de izquierda a derecha) expresa que:

a) cinco familias tienen doce hijos, cada una.

✓**b)** doce familias tienen cinco hijos, cada una.

c) en cuarto lugar se encuentran 5 familias.

d) entre las doce familias hay 5 niños, en total.

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *500*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad de comunicación matemática en relación con el contenido de estadística y probabilidad. En particular, se evalúa la interpretación de diagramas de barras simples en un contexto escolar.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe interpretar el texto y el diagrama de barras que contiene la información de manera gráfica para, en primer lugar, comprender la situación e identificar lo que se le está pidiendo. Es necesario señalar que, a diferencia de las situaciones presentadas solo mediante un texto (en las que los datos numéricos aparecen, por lo general, separados y en número cercano a lo necesario y suficiente), en esta situación hay mucha información accesoria (que no es la requerida para responder la pregunta). Además, el estudiante debe diferenciar lo que se le pide, pues «la cuarta columna» no se refiere al «4» en el eje horizontal.

Una vez identificada la barra, el estudiante deberá discriminar qué representa esta y cuál es la frecuencia que muestra para, finalmente, identificar la alternativa que corresponde a la interpretación adecuada.

M3S07

Básico

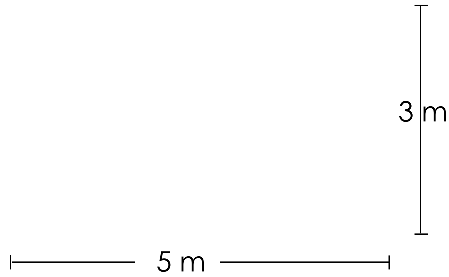
Halla el área de la siguiente figura:

a) 2 m^2

b) 8 m^2

c) 15 m^2

d) 16 m^2



FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*

Contenido: *Espacio y forma*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *507*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación de algoritmos referidos al espacio y forma, en particular, los relacionados con el cálculo del área de una figura básica como el rectángulo. El contexto es intramatemático, es decir, la situación se presenta dentro del «mundo de la matemática».

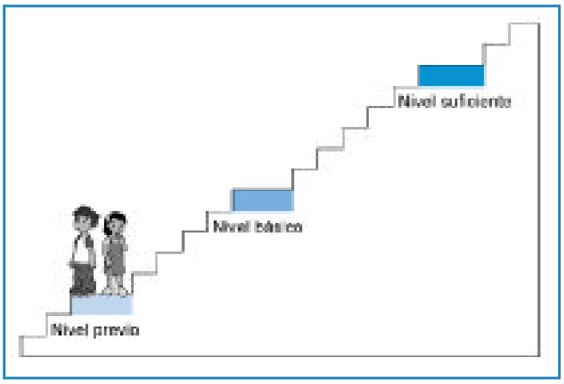
¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe identificar la figura como un rectángulo; en seguida, debe relacionarla con la noción que maneja de «área» y evocar o deducir su fórmula correspondiente; luego, debe identificar los datos necesarios del gráfico; y, finalmente, operar.

Esta es una pregunta conceptualmente poco compleja porque su contenido es general y bastante conocido, porque el conjunto numérico de los datos es de ámbito reducido y porque involucra solo una operación: la multiplicación. Además, se presentan solo los datos necesarios y suficientes, es decir, el estudiante no tiene que discriminar los datos que va a utilizar, siempre y cuando tenga claro lo que se le está pidiendo. Sin embargo, se pueden presentar complicaciones para quienes no manejan adecuadamente la noción de área, pues en los distractores se colocan como posibles respuestas el perímetro, el semiperímetro y el resultado de la sustracción de los datos.

Nivel previo

Que un estudiante se ubique en este nivel significa que demuestra solamente un desarrollo de capacidades que son propias de grados anteriores.



Los estudiantes pertenecientes a este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias que demandan reproducir algoritmos que consisten en una operación aritmética en el conjunto de los números naturales. Asimismo, se están iniciando en la comprensión de los números enteros, pues los representan gráficamente y calculan con ellos operaciones aritméticas básicas y operaciones combinadas que no demandan el reconocimiento de la jerarquía de las operaciones. Recodifican situaciones presentadas en lenguaje verbal utilizando una ecuación de primer grado en los casos más elementales (cuando el enunciado permite ir escribiendo la ecuación mediante la «traducción palabra por palabra», según se va leyendo). Identifican las figuras geométricas básicas y sus elementos a partir de su representación gráfica. Interpretan solo los diagramas de barras más elementales y comparan frecuencias absolutas.

Tareas que realiza el estudiante en el nivel previo

- Resuelve situaciones problemáticas de enunciado verbal que demandan aplicar una operación aritmética con números naturales.
- Resuelve situaciones problemáticas de enunciado verbal que demandan calcular la media aritmética de un conjunto de números naturales.
- Representa gráficamente números enteros en la recta numérica.
- Recodifica situaciones problemáticas de enunciado verbal usando una ecuación de primer grado, sin signos de agrupación, en el conjunto de los números enteros.
- Identifica la forma del rectángulo en las partes de una figura compuesta.
- Interpreta el valor de la longitud de las barras de un diagrama de barras.
- Identifica la frecuencia absoluta de un conjunto de datos sin agrupar presentados mediante lenguaje verbal.
- Calcula el resultado de operaciones aritméticas simples y combinadas, compuestas hasta por dos operaciones con números naturales, hasta la decena de millar.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden resolver los estudiantes del nivel previo.

M3S08

Previo

Resuelve:

$$410 \times 35 - 4350 =$$

a) –1 070

b) 1 070

c) 4 795

✓d) 10 000

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Opción múltiple

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 356

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación de algoritmos referidos al contenido de número y cantidad. Específicamente, evalúa el dominio del cálculo de operaciones combinadas con números naturales, presentadas de manera simbólica en un contexto intramatemático.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe operar, utilizando un algoritmo escrito (que es lo más habitual) o uno de cálculo mental. Es importante destacar que la pregunta está definida en el conjunto de los números naturales y su ámbito numérico es pequeño (alcanza hasta la decena de millar), por lo que la dificultad no está centrada en lo extenso o complejo de los cálculos numéricos sino en el dominio del algoritmo. Cabe señalar que, en esta pregunta, el orden de resolución de izquierda a derecha coincide con la jerarquía de la operación, por lo que la tarea es más sencilla, pues no es necesario dominar la jerarquía de las operaciones. Si se analizan estas, se encuentra que la multiplicación podría presentar alguna complejidad (410 x 35 = 14 350), pero la sustracción que continúa (14 350 – 4 350) se puede realizar por simple inspección, si el estudiante maneja el valor posicional de los números naturales.

Una manera de resolver esta pregunta es mediante la aplicación de propiedades para evitar cálculos complejos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 410 \times 35 - 4\,350 &= \\ 41 \times 350 - 4\,000 - 350 &= \\ 41 \times 350 - 350 - 4\,000 &= \\ 40 \times 350 - 4\,000 &= \\ 4(10 \times 350 - 1\,000) &= \\ 4(3\,500 - 1\,000) &= \\ 4(2\,500) &= \\ 10\,000 & \end{aligned}$$

M3S09

Previo

En un colegio se han organizado para pintar las carpetas. Si ya han pintado 48 carpetas y en total hay 146, ¿cuántas carpetas les falta pintar?

a) 194

b) 108

c) 102

✓**d)** 98

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múliple*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *410*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad para resolver situaciones problemáticas relacionadas con el contenido de número y cantidad. En particular, evalúa el dominio del estudiante para utilizar operaciones aritméticas elementales en el conjunto de los números naturales.

Como se puede apreciar, esta pregunta es muy elemental por el contenido matemático necesario para resolverla, por lo habitual de la tarea (se trata de un problema rutinario) y por el restringido ámbito numérico involucrado (números naturales hasta las centenas).

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante requiere comprender la situación propuesta y seleccionar una estrategia adecuada para resolverla. Esta puede ser una operación aritmética, como por ejemplo una sustracción. En este caso, se trataría de una sustracción de un número de tres cifras menos uno de dos cifras y en la que se requiere «prestar». Finalmente, el estudiante debe seleccionar la diferencia encontrada como respuesta correcta.

M3S10

Previo

La siguiente ecuación representa la relación que hay entre el número de estudiantes hombres y el número de estudiantes mujeres en un salón de tercero de secundaria:

$$\underbrace{0{,}5x}_{\text{Número de estudiantes hombres}} + \underbrace{x}_{\text{Número de estudiantes mujeres}} = 45$$

En dicha ecuación, ¿qué representa el número 45?

a) La diferencia entre el número de estudiantes mujeres y el número de estudiantes hombres.

✓ **b)** El número total de estudiantes del salón de tercero de secundaria.

c) La mitad de estudiantes hombres que de estudiantes mujeres.

d) El doble de estudiantes hombres que de estudiantes mujeres.

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Álgebra y funciones

Contexto: Extramatemático

Formato: Opción múltiple

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 451

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la comunicación matemática en relación con el lenguaje algebraico. En particular, se evalúa la interpretación de una ecuación lineal que representa una situación problemática propuesta.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe interpretar la situación y la ecuación propuestas, es decir, debe otorgarles significado a las expresiones matemáticas que forman la ecuación para que estas adquieran sentido en relación con la situación planteada. Deberá interpretar que la reunión del número de estudiantes hombres y el número de estudiantes mujeres (es decir, todo el primer miembro de la ecuación) equivale a 45 y que este número representa el número total de estudiantes del salón mencionado. Finalmente, deberá interpretar las alternativas para encontrar la que representa lo hallado.

Resumen de los niveles de desempeño en tercer grado de secundaria

NIVEL SUFICIENTE

Los estudiantes ubicados en este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias y no rutinarias que demandan elaborar una secuencia de hasta tres operaciones aritméticas o utilizar la proporcionalidad directa con números racionales en su representación decimal.

Estos estudiantes manejan adecuadamente las operaciones combinadas con números enteros respetando el orden jerárquico de dichas operaciones y se están iniciando en la comprensión de los números racionales.

Asimismo, calculan el valor de la incógnita en ecuaciones e inecuaciones de primer grado de hasta tres pasos, con un nivel de signos de agrupación, definidas en el conjunto de los números racionales en su representación decimal. Calculan el conjunto solución de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas definidos en el conjunto de los números enteros, cuando son presentados de manera ordenada. Sin embargo, solo resuelven situaciones problemáticas que demandan plantear una ecuación elemental de primer grado en los enteros.

Se han iniciado en el desarrollo de la noción de función como una regla o una fórmula, lo cual les permite calcular valores puntuales de las imágenes de funciones polinómicas de primer y segundo grados, e identificar la expresión analítica que corresponde a un gráfico dado.

También, resuelven situaciones problemáticas sencillas que demandan calcular el área del rectángulo y la noción de proporcionalidad geométrica. Elaboran diagramas de barras y resuelven situaciones problemáticas que requieren interpretar y deducir información presentada mediante tablas y diagramas estadísticos.

NIVEL BÁSICO

Los estudiantes que se encuentran en este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias que demandan reproducir una secuencia de hasta tres operaciones aritméticas básicas con números naturales o con decimales positivos que tienen el mismo número de cifras decimales. Evidencian un adecuado manejo de los números naturales y empiezan a consolidar su comprensión de los números enteros. Calculan el valor de la incógnita de ecuaciones de primer grado de menos de cinco términos, sin signos de agrupación, que demandan dos o tres pasos y están definidas en el conjunto de los números enteros. Interpretan las variables como una incógnita, es decir, como «la letra» que representa una cantidad desconocida que se debe hallar, lo cual no les permite aún manejar la noción de función.

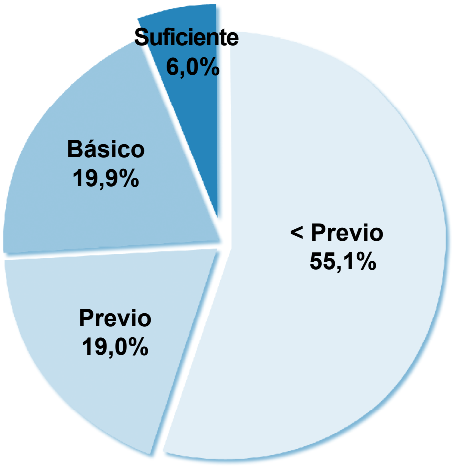
Además, los estudiantes ubicados en este nivel resuelven situaciones problemáticas sencillas que demandan la descomposición o integración visual de figuras geométricas simples. Grafican figuras geométricas elementales a partir de características y propiedades dadas. Emplean la simbología geométrica elemental. Interpretan diagramas de barras y cuadros de frecuencia de doble entrada. Resuelven situaciones problemáticas elementales que demandan identificar la frecuencia acumulada de un conjunto de datos.

NIVEL PREVIO

Los estudiantes pertenecientes a este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias que demandan reproducir algoritmos que consisten en una operación aritmética en el conjunto de los números naturales. Asimismo, se están iniciando en la comprensión de los números enteros, pues los representan gráficamente y calculan con ellos operaciones aritméticas básicas y operaciones combinadas que no demandan el reconocimiento de la jerarquía de las operaciones. Recodifican situaciones presentadas en lenguaje verbal utilizando una ecuación de primer grado en los casos más elementales (cuando el enunciado permite ir escribiendo la ecuación mediante la «traducción palabra por palabra», según se va leyendo). Identifican las figuras geométricas básicas y sus elementos a partir de su representación gráfica. Interpretan solo los diagramas de barras más elementales y comparan frecuencias absolutas.

3 Resultados según niveles de desempeño

En el siguiente gráfico se presentan los resultados obtenidos a nivel nacional en la prueba de Matemática de tercer grado de secundaria.



Solo el 6% de los estudiantes de tercer grado de secundaria se ubica en el nivel suficiente, lo que significa que únicamente esta población demuestra un manejo suficiente y necesario de las capacidades evaluadas, considerando lo propuesto por el diseño curricular. No se trata de estudiantes con un nivel avanzado sino de estudiantes con un desempeño adecuado para el grado.

> El nivel suficiente es aquel que se espera que los estudiantes alcancen al terminar el grado. Un 94% de los estudiantes de la población nacional de tercer grado de secundaria **no** alcanza este nivel.

El que la gran mayoría de estudiantes de tercero de secundaria no pueda alcanzar el nivel suficiente significa que tendrán serias dificultades para emplear la matemática como herramienta eficiente y significativa en el proceso de ampliar sus conocimientos y desarrollar sus capacidades en esta y en otras áreas.

Asimismo, el 19,9% de los estudiantes de tercero de secundaria se ubica en el nivel básico. Estos estudiantes presentan un manejo incipiente y elemental de las capacidades correspondientes a tercero de secundaria en el área de Matemática, es decir, el conjunto de habilidades y de dominios conceptuales que han desarrollado e incorporado está aún en proceso de logro.

El 19,0% de los estudiantes de tercero de secundaria se ubica en el nivel previo. Estos estudiantes evidencian tener un dominio de las habilidades que ya deberían haber desarrollado en grados anteriores. Es decir, este grupo de estudiantes, que está terminando el tercer grado de secundaria, solo ha logrado desarrollar habilidades e incorporar nociones matemáticas que son consideradas requisitos para iniciar este grado.

Finalmente, el 55,1% de los estudiantes de tercero de secundaria se encuentra por debajo del nivel previo. Estos estudiantes no evidencian siquiera haber desarrollado las habilidades e incorporado las nociones y contenidos necesarios propios de grados anteriores.

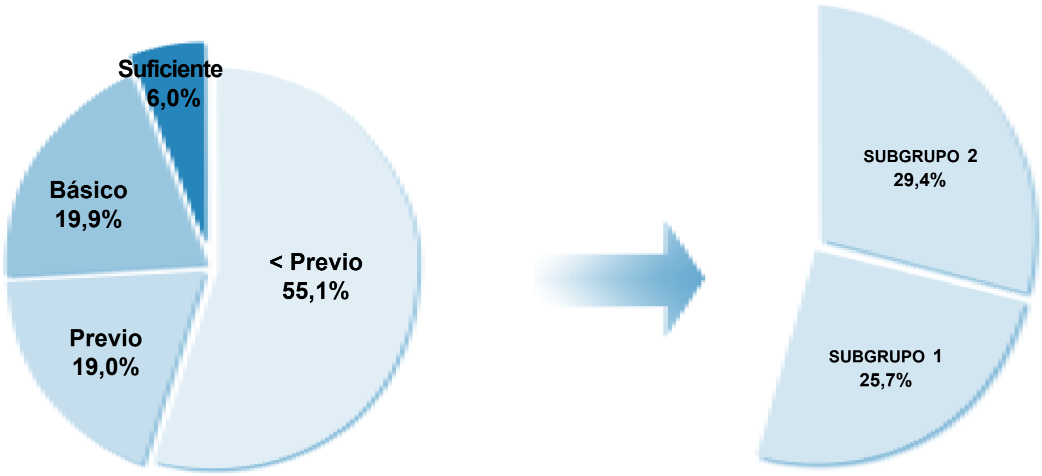
Si la población nacional de tercero de secundaria fuera una clase de treinta estudiantes, esta sería su distribución aproximada:

- Dos estudiantes estarían en el nivel suficiente: tendrían un manejo aceptable de los desempeños evaluados en el grado.
- Seis estudiantes estarían en el nivel básico: presentarían un desarrollo incipiente y elemental de las capacidades consideradas.
- Seis estudiantes estarían en el nivel previo: demostrarían solo la habilidad correspondiente a grados anteriores.
- Diecisiete estudiantes no realizarían ni siquiera todas las tareas requeridas para pertenecer al nivel previo.

Lo que hacen los estudiantes que se encuentran debajo del nivel previo

Los estudiantes que se ubican por debajo del nivel previo no forman propiamente un nivel con características homogéneas. Sin embargo, fue necesario definir este grupo debido a que se ha encontrado gran cantidad de estudiantes que no llegaban a resolver todas las preguntas exigidas para estar en el nivel previo.

Como puede apreciarse en el gráfico siguiente, el grupo de los estudiantes que no llega a alcanzar ni siquiera el nivel previo (55,1% de la población nacional en tercero de secundaria) ha sido dividido en dos subgrupos, de acuerdo con las tareas que logra realizar.



Por debajo del previo	55,1%	Subgrupo 1	25,7%
		Subgrupo 2	29,4%

A continuación, se describen las características generales de cada uno de estos dos subgrupos ubicados por debajo del nivel previo.

Subgrupo 1

Está formado por 25,7% de los estudiantes de tercer grado. Estos estudiantes realizan adecuadamente algunas tareas tales como resolver situaciones problemáticas de enunciado verbal que pueden tipificarse como rutinarias y para cuya solución se requiere únicamente del empleo de una de las cuatro operaciones aritméticas elementales con números naturales. También calculan el resultado de operaciones combinadas, integradas por hasta un máximo de tres operaciones aritméticas elementales con números naturales. Identifican las figuras geométricas básicas y sus elementos a partir de su representación gráfica. Interpretan solo la frecuencia absoluta en los diagramas de barras más elementales.

Subgrupo 2

Está formado por 29,4% de los estudiantes de tercer grado. Este es el subgrupo con más bajo rendimiento. Los estudiantes que lo integran solo son capaces de resolver algunas tareas aisladas, como operaciones aritméticas elementales. Dentro de este subgrupo encontramos un 2,2% de la población de estudiantes que no demuestra la habilidad necesaria para enfrentarse con éxito a ninguna de las preguntas de la prueba.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que resuelven los estudiantes que se ubican por debajo del nivel previo.

M3S11

Juan compra 48 lapiceros. Cada lapicero cuesta 2 soles. ¿Cuántos soles paga en total?

a) 46

b) 50

c) 86

✓**d)** 96

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Dificultad Rasch: *354*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas rutinarios cuyo contenido está relacionado con las operaciones aritméticas elementales en situaciones cotidianas como la escolar, en el conjunto de los números naturales.

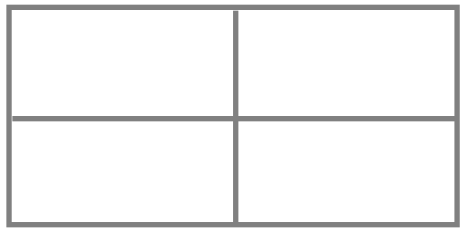
Como se puede observar, esta pregunta es muy elemental por el contenido matemático necesario para resolverla, por lo habitual de la tarea y por el restringido ámbito numérico involucrado.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante requiere comprender la situación propuesta, seleccionar una operación aritmética adecuada para resolverla y efectuarla. La operación es la multiplicación de un número natural de dos cifras por otro de una; en este caso, solo hay que calcular el doble, por lo que se puede hacer mentalmente, aunque, si se utiliza el algoritmo escrito, hay que «llevar» de las unidades a las decenas. Finalmente, el estudiante debe seleccionar el producto encontrado como respuesta correcta.

M3S12

El siguiente gráfico representa una ventana:



Cada una de las partes de la ventana tiene forma de:

a) romboide
b) cuadrado
c) rectángulo
d) cubo

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Espacio y forma*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Dificultad Rasch: *378*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la comunicación matemática sobre el contenido de espacio y forma. En particular, evalúa la habilidad del estudiante para identificar figuras geométricas elementales en figuras compuestas.

Como se puede apreciar, esta pregunta es muy elemental tanto por el contenido matemático necesario para responderla, como por las habilidades que debe poner en juego el estudiante. Además, la figura está formada por una composición simple de figuras elementales, por lo que su identificación es sencilla.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante requiere comprender la situación propuesta e identificar la forma de cada una de las partes de la figura presentada. Finalmente, deberá relacionar la figura identificada con la imagen conceptual que posee de los rectángulos y seleccionar la respuesta correcta.

4 Análisis de las preguntas de la prueba y de respuestas de los estudiantes

En esta sección se presentan algunas de las preguntas que integraron la prueba de tercer grado de secundaria. Estas preguntas se dan a conocer para su uso por parte de personas interesadas en el tema.

Todas estas preguntas han sido diseñadas de acuerdo con las definiciones formuladas en el marco de trabajo de la EN 2004[23] y miden la formación matemática de los estudiantes. Cada una de ellas evalúa una capacidad, un contenido y un contexto específico que son señalados en una ficha técnica. Además, en esta ficha se indica el formato de presentación de la pregunta y su dificultad Rasch. Las preguntas se encuentran ordenadas de acuerdo con su dificultad, desde la más fácil a la más difícil. Asimismo, se describen los procedimientos matemáticos, estrategias y conceptos que los estudiantes pueden utilizar para responder con éxito las preguntas propuestas y se presentan los criterios empleados para la calificación de cada pregunta.

En algunos casos, especialmente en las preguntas que requieren de una respuesta extensa, se han reproducido algunas de las respuestas de los estudiantes. Estas preguntas, en particular, son fuente de mucha información, pues al registrar su procedimiento el estudiante permite conocer sus estrategias, sus patrones de pensamiento y el grado de estructuración del conocimiento matemático que posee para aplicarlo a situaciones diversas. Por esta razón, al momento de codificar las respuestas se han considerado códigos específicos que permiten clasificarlas de acuerdo con las diversas aproximaciones a la respuesta correcta y con los posibles patrones de error, que muestran el tipo de razonamiento y el sistema de creencias que utilizan los estudiantes al momento de contestar determinadas preguntas matemáticas.

Luego de cada una de ellas se hace un breve comentario con el fin de ilustrar, mediante casos específicos, algunos de los patrones y esquemas de pensamiento de los estudiantes. Además, se proporciona el porcentaje estimado de la población nacional que está en la capacidad de responder con éxito cada pregunta.[24]

Cada pregunta tiene un código que permite ubicarla en la escala de dificultad presentada en la página 109.

23. *Marco de trabajo de las pruebas de rendimiento.* En <http://www.minedu.gob.pe/umc/2004/marctrab/MarcTranPruebEN2004.pdf.pp 71-121>.

24. Este indicador señala que ese porcentaje de estudiantes de tercer grado tiene un 62% de probabilidad de responder correctamente la pregunta.

M3S013

Previo

Rosa es una alumna de secundaria que obtiene las notas de 12; 12; 15 y 17 en sus prácticas calificadas. ¿Cuál será su promedio en dichas prácticas?

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Estadística y probabilidad

Contexto: Extramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Previo

Dificultad Rasch: 421

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante de resolver problemas sobre estadística y probabilidad. En particular, evalúa la resolución de un problema rutinario que demanda la aplicación de un procedimiento bastante elemental, como lo es la media aritmética simple. El conjunto numérico que se requiere para solucionarlo es el de los números naturales y su contexto es extramatemático: el problema se sitúa en un entorno que resulta cercano para el estudiante, tal como el salón de clases.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

La resolución de esta pregunta demanda la aplicación de un algoritmo asociado con el contenido de estadística y probabilidad[25] cuyo procedimiento es netamente aritmético y demanda aplicar solamente dos operaciones elementales. Se trata de un procedimiento rutinario, pues los estudiantes lo utilizan habitualmente para estimar sus calificaciones.

25. El promedio (media aritmética simple) es una noción asociada con el contenido de estadística y probabilidad, y es una de las medidas de tendencia central que permite tener información sobre la magnitud de un conjunto de datos.

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe interpretar el enunciado, relacionarlo con el procedimiento que se acaba de mencionar, identificar los datos necesarios (las notas y su número) y aplicar el procedimiento. Finalmente, debe otorgarle el sentido al resultado obtenido en el contexto de la situación propuesta (hallar lo que se está pidiendo). En esta última fase intervienen —y son muy importantes— dos mecanismos: el de control y el de estimación. Estos son necesarios para que el estudiante pueda conseguir completar la tarea.

La dificultad de la pregunta está centrada en la adecuada interpretación y selección del procedimiento, pues el cálculo aritmético está restringido a números naturales pequeños y las operaciones implicadas son solo la adición y la división. Este cálculo no debería significar mayor dificultad para un estudiante de tercero de secundaria.

Generalmente, en este nivel de desempeño (previo), los estudiantes logran resolver situaciones problemáticas que demandan aplicar solo una operación aritmética. Sin embargo, en este caso se trata de un algoritmo que contiene dos operaciones aritméticas. Este hecho podría ser explicado —al menos en parte— debido a lo rutinario y significativo de la tarea, pues, como ya se señaló, se trata de una actividad que realizan los estudiantes a menudo y que tiene mucho sentido para ellos. Esto pone en evidencia que los procedimientos aprendidos de manera significativa permiten al estudiante realizar tareas que, si estuvieran descontextualizadas, presentarían mayores dificultades.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Las respuestas de los estudiantes fueron consideradas adecuadas cuando evidenciaban un manejo de contenidos y habilidades que les permitiera plantear y llevar a cabo la estrategia para resolver la tarea y llegar a la respuesta final: «14». Aquellas respuestas en las que el estudiante escribía directamente el resultado sin mostrar procedimiento alguno también fueron consideradas correctas.

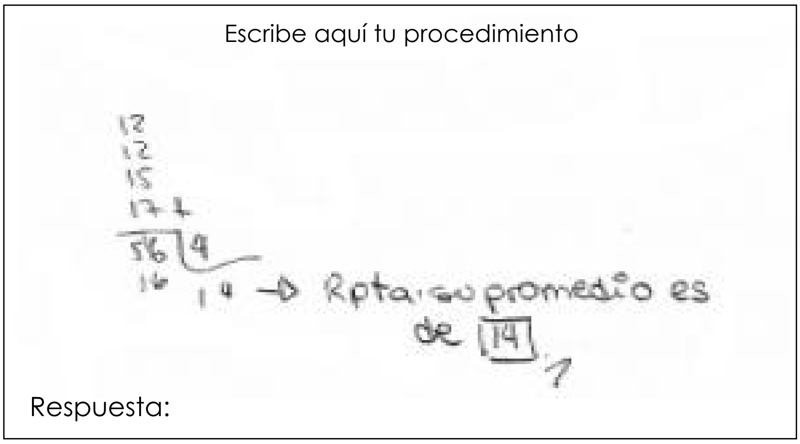
Fueron consideradas incorrectas las respuestas en las que los estudiantes planteaban una estrategia adecuada (que conduciría a la respuesta), pero incurrían en errores operativos al aplicar el procedimiento de cálculo. También se consideraron en este grupo las respuestas en las que el estudiante solo planteó la estrategia adecuadamente, pero dejó trunca la parte operativa, es decir, no la desarrolló o no la desarrolló completamente. Asimismo, aquellas respuestas en las que los estudiantes evidenciaban no haber comprendido la situación o no manejar la noción de promedio, y también aquellos casos en los que escribían directamente una respuesta diferente a «14».

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunas respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

✓ Respuestas correctas

Respuesta A

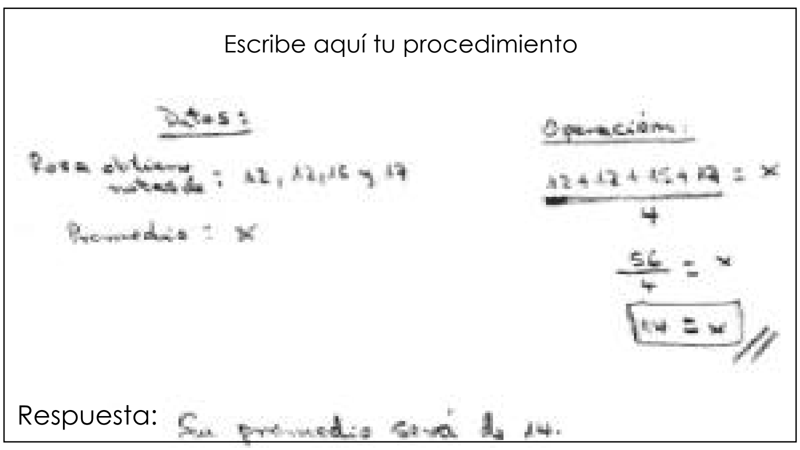

Escribe aquí tu procedimiento

12
12
15
17+
56 | 4
16   14 → Rpta: su promedio es de $\boxed{14}$

Respuesta:

Los estudiantes que respondieron adecuadamente a la pregunta lo hicieron en su mayoría mostrando su procedimiento. La forma más frecuente de presentar la respuesta fue emplear un procedimiento de tipo aritmético, registrando solo algunos de los cálculos que les fueron necesarios, como lo muestra la respuesta A. En ella, el estudiante suma los datos, luego efectúa la división y escribe su respuesta final.

Respuesta B


Escribe aquí tu procedimiento

Datos:

Para obtener notas de: 12, 12, 15 y 17

Promedio: x

Operación:

$\frac{12+12+15+17}{4} = x$

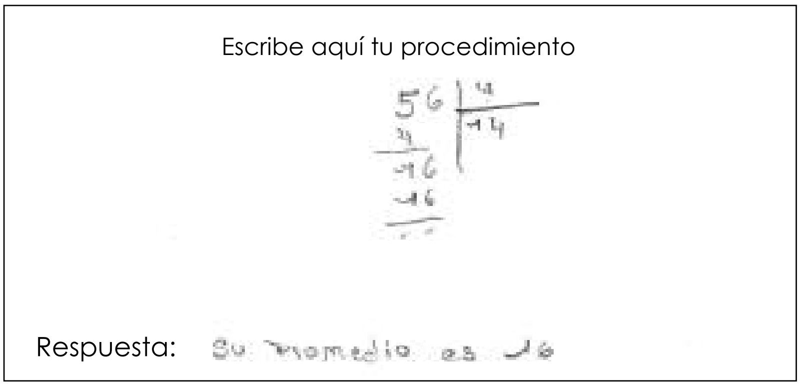
$\frac{56}{4} = x$

$\boxed{14 = x}$

Respuesta: Su promedio será de 14.

En el caso de la respuesta B, el estudiante opta por una estrategia en la que utiliza la definición de promedio (la suma de los datos entre el número total de datos) y emplea una letra para nominar la incógnita.

Respuesta C


Escribe aquí tu procedimiento

56 | 4
4 | 14
16
16

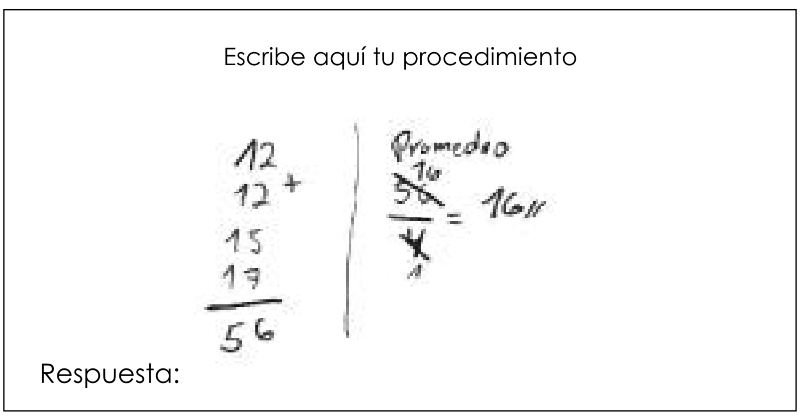
Respuesta: Su promedio es 16

La respuesta C muestra un ejemplo de cómo se codificaron las respuestas de los estudiantes. En este caso, el estudiante realiza el siguiente proceso: escribe directamente la suma de los datos, la divide entre el número de datos (cuatro notas) y calcula adecuadamente el cociente; sin embargo, se equivoca al transcribir el resultado hallado: al parecer, copia el número escrito más abajo en la división. El criterio para considerar correcta la respuesta es que el estudiante evidencia manejar la noción y el procedimiento del promedio, ya que el error ha sido de transcripción (no tiene sentido el colocar como respuesta el último sustraendo necesario para hacer la sustracción en la división). Este ejemplo sirve para mostrar que se codificó en función de la habilidad exhibida por el estudiante y no en función de conductas observadas.

X Respuestas incorrectas

A continuación, se presentan dos ejemplos en los que se evidencia que el estudiante maneja la noción de promedio y conoce el algoritmo, pero no es capaz de aplicarlo adecuadamente.

Respuesta D


Escribe aquí tu procedimiento

12 +
12
15
17
56

Promedio
56/4 = 16

Respuesta:

En la respuesta D se observa que el estudiante identifica los datos adecuadamente, que conoce el procedimiento para calcular la media aritmética, sin embargo, no es capaz de aplicarlo en forma correcta pues incurre en un error en el momento de dividir. Como se observa, calcula erróneamente que la cuarta de 56 es 16.

Respuesta E

Escribe aquí tu procedimiento

12
12
15
17
66 | 4

66 | 4
26   16.5
20

Respuesta: Su promedio sera de 16,5 ó 17

En la respuesta E, se observa que el estudiante también identifica bien los datos y conoce el procedimiento para calcular la media aritmética, pero que no es capaz de aplicarlo en forma adecuada. En este caso, el estudiante comete un error en el momento de sumar los datos, pues, al hacerlo, encuentra que la suma es 66 y no 56. En consecuencia, «arrastrando» el error, calcula la división, cuyo cociente es el promedio pedido.

Cabe señalar que, en esta respuesta, el estudiante redondea por exceso adecuadamente el promedio que ha hallado, tal como se acostumbra a hacerlo con las notas de las calificaciones escolares. Este último ejemplo permite reforzar la afirmación de lo habitual y significativo de la tarea planteada en esta pregunta, pues en ningún momento se pide al estudiante que se aproxime por exceso, sin embargo, lo hace.

[Se estima que un 79% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M3S14

Resuelve:

$$3x + 9 = 57$$

a) 6

✓ **b)** 16

c) 22

d) 45

Básico

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Álgebra y funciones

Contexto: Intramatemático

Formato: Opción múltiple

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 488

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para aplicar algoritmos con el contenido de álgebra y funciones. Está referida al cálculo de la raíz de una ecuación lineal elemental que solo presenta tres términos, no contiene signos de agrupación y se resuelve dentro del conjunto de los números enteros, en un ámbito numérico reducido (hasta las decenas).

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante requiere, en primer lugar, interpretar adecuadamente la situación propuesta. Esto lo llevará a identificar la tarea con una ecuación lineal que debe resolver. A partir de este punto, hay varios caminos que puede seguir el estudiante. Una posibilidad es que aplique un algoritmo elemental convencional que contempla tres pasos en su forma más sencilla: transposición, reducción de términos semejantes y despeje (o alguna de sus variantes, por escrito o mentalmente). Otra posibilidad es que el estudiante intente resolver la ecuación por ensayo–error, para lo cual deberá estimar valores y verificarlos evaluando en la igualdad. Incluso, podría «cazar respuestas» probando directamente los valores de las alternativas. En todos los casos, los cálculos se realizan con números de un ámbito reducido y dentro del conjunto de los números enteros, lo cual reduce toda complicación operativa.

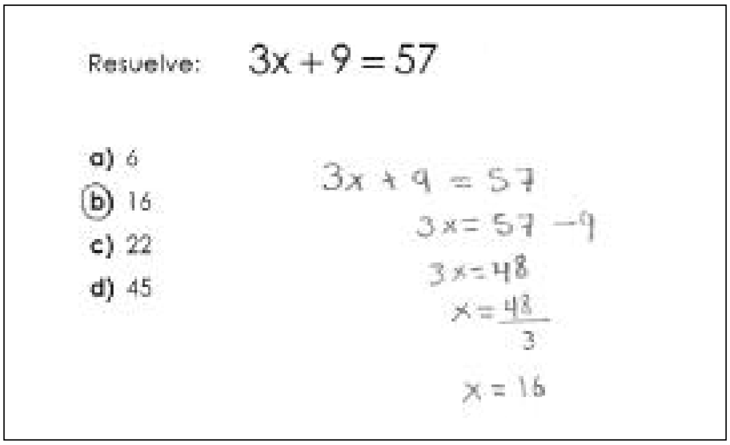
Aunque en las preguntas de opción múltiple no se puede tener la certeza de lo que llevó a los estudiantes que no resolvieron adecuadamente la pregunta a elegir algún distractor, se pueden elaborar hipótesis al respecto. En la siguiente sección se presenta una explicación de las posibles causas por las que los estudiantes eligieron alguna de las alternativas incorrectas.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunos ejemplos de respuestas de los estudiantes.

✓ Respuestas correctas

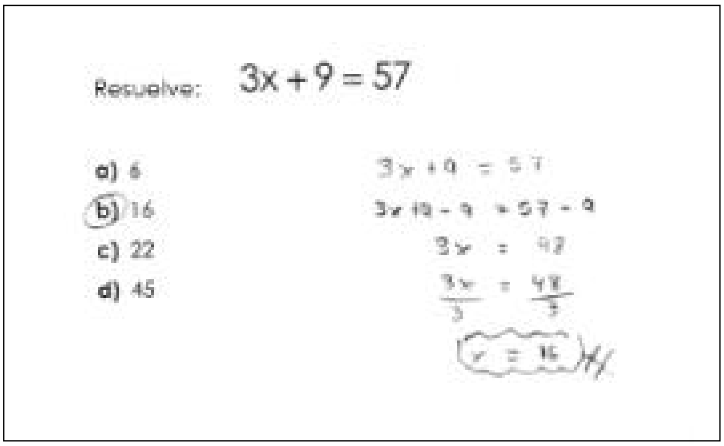
Respuesta A



En la respuesta A se puede observar que el estudiante efectúa adecuadamente el algoritmo estándar para resolver ecuaciones lineales, mediante la aplicación de reglas prácticas y escribiendo todos los pasos necesarios. Finalmente, el estudiante señala su respuesta, la cual, como se indicó, es la correcta.

Respuesta B

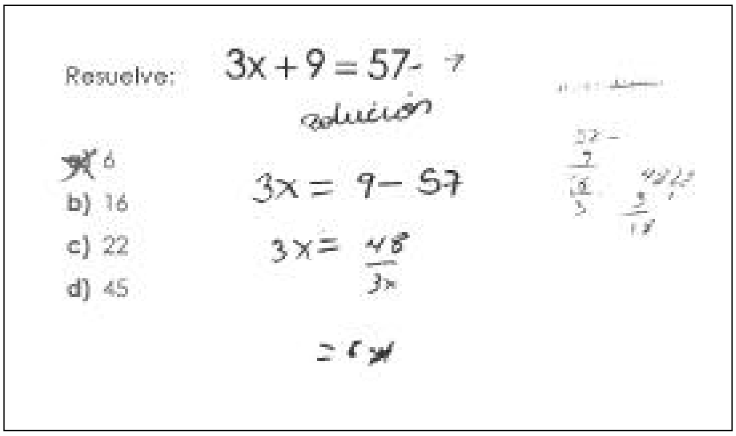
En este caso, se puede identificar que el estudiante aplica los principios de equivalencia; así, se observa que cancela el «9» utilizando su inverso aditivo (–9). En seguida, hace lo mismo con el coeficiente «3» de la incógnita utilizando su inverso multiplicativo (÷ 3) y llega a la respuesta correcta.



Sin embargo, ninguno de los dos procedimientos presentados en los ejemplos anteriores puede asegurar por sí mismo que el estudiante haya desarrollado las nociones algebraicas fundamentales. En ambos casos, se podría tratar de la aplicación mecánica de la técnica operativa (receta enseñada) o del proceder reflexivo, producto de la comprensión de la situación y de cada transformación realizada.

Respuestas incorrectas

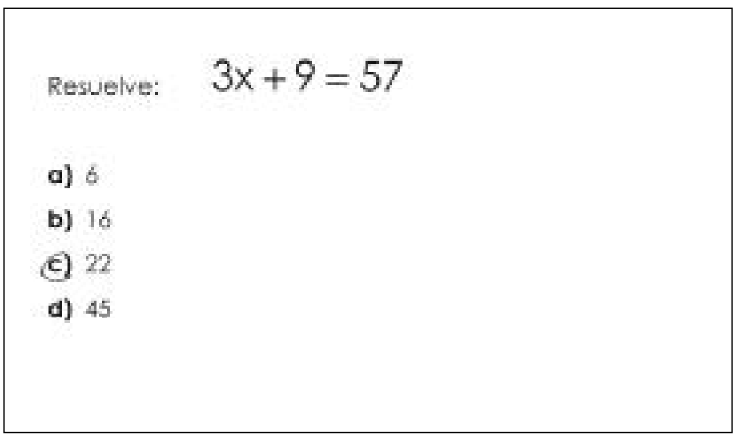
Respuesta C



Este ejemplo muestra la manera de resolver de un estudiante que evidencia tener «algunas ideas» sobre el procedimiento para resolver una ecuación, pero que no lo ha logrado comprender del todo.

De manera general, se puede observar que la solución presentada en la respuesta C contiene operaciones «en borrador» (la franja vertical de la derecha) y un procedimiento «en limpio» (debajo de la palabra «solución»), ambas diferenciadas por el tamaño y nitidez de los números escritos. Todo lo mostrado en la solución «en limpio» evidencia la falta de comprensión del estudiante del proceso para calcular la solución de una ecuación, pues presenta una sucesión de pasos que, si bien parecen seguir la secuencia del procedimiento estándar, presentan muchos errores operativos y de lógica. Además, este proceder evidencia que el nivel de manejo operativo del estudiante es muy deficiente, respecto de lo esperado en tercero de secundaria.

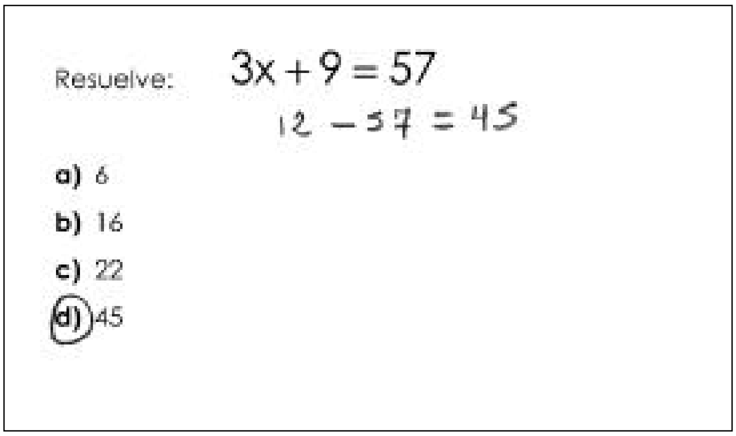
Respuesta D



En este ejemplo se observa que el estudiante solo marca la respuesta sin detallar ningún procedimiento.

El distractor «c) 22» se introdujo en la pregunta para recoger información sobre errores de procedimiento. En este caso, el estudiante realiza la transposición, pero incurre en un error al escribir el signo del término transpuesto o al reducir términos semejantes, pues suma 57 y 9, con lo que obtiene 66 como resultado parcial. Finalmente, el estudiante despeja la incógnita efectuando la división 66 ÷ 3 y así llega, finalmente, a «22».

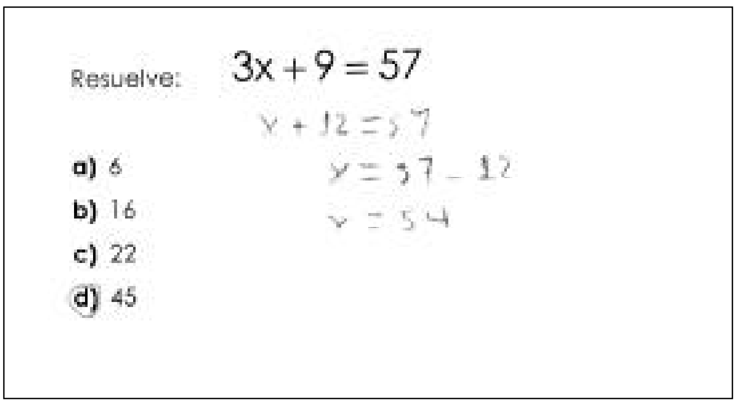
Respuesta E



Esta respuesta presenta el procedimiento de un estudiante que solo identifica números y no llega a identificar una incógnita algebraica. Así, resuelve la pregunta como si se tratara de una ecuación aritmética del tipo: $3 + \square + 9 = 57$.

Como se puede observar, la simbolización que utiliza el estudiante en la respuesta E es muy rudimentaria. En primer lugar, interpreta el signo igual como el lugar para escribir la respuesta y no como el conector entre dos expresiones equivalentes. Esta interpretación es típica del punto de vista de un estudiante que tiene solo los referentes aritméticos. En segundo lugar, la representación del valor que pretende encontrar es inadecuada porque, según su procedimiento, debería llegar a un número negativo ($12 - 57 = -45$); sin embargo, al parecer el estudiante no maneja la noción de números negativos.

Respuesta F



Esta respuesta muestra el procedimiento de un estudiante que, si bien tiene alguna idea acerca de la existencia de la incógnita algebraica y de la secuencia de pasos a realizar, no discrimina adecuadamente cuáles son términos semejantes (o la diferencia entre término independiente y coeficiente del término lineal). Además, presenta dificultades para operar con números enteros, pues llega a otra respuesta. Sin embargo, marca, al parecer, la más similar al número que halló.

Se estima que un 39% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M3S15

Básico

José quiere armar un cubo usando cuadrados de cartón del mismo tamaño.

¿Cuál es el mínimo número de cuadrados que necesitará?

✓ **a)** 6

b) 4

c) 1

d) 8

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Opción múltiple

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 512

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas sobre el contenido de espacio y forma. Particularmente, se evalúa lo relacionado con la imagen conceptual de sólidos geométricos elementales en un contexto extramatemático.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta se requiere que el estudiante interprete en forma adecuada lo que la situación le demanda. En seguida, deberá elegir una estrategia para resolver esta situación, para ello existen numerosas posibilidades, dependiendo del nivel de imagen conceptual que el estudiante posea del cubo. Así, una estrategia es simplemente evocar el dato. Otra sería evocar mentalmente la imagen del sólido geométrico y acceder al dato pedido mediante algún tipo de cálculo. Otra estrategia posible sería que el estudiante represente gráficamente el cubo utilizando un dibujo y, por algún procedimiento de cálculo, determine lo que se le pide.

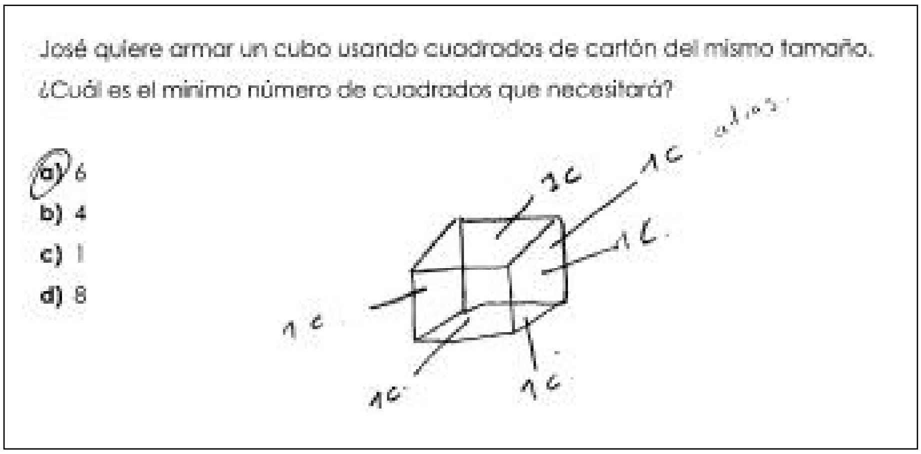
Ninguna de las estrategias es más adecuada que otra, pues cada una responde al grado de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes y al manejo de los contenidos de la geometría que posean. Por eso, las distintas estrategias empleadas nos pueden dar información sobre el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico que tienen los estudiantes.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunas respuestas correctas y algunas incorrectas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

✓ Respuestas correctas

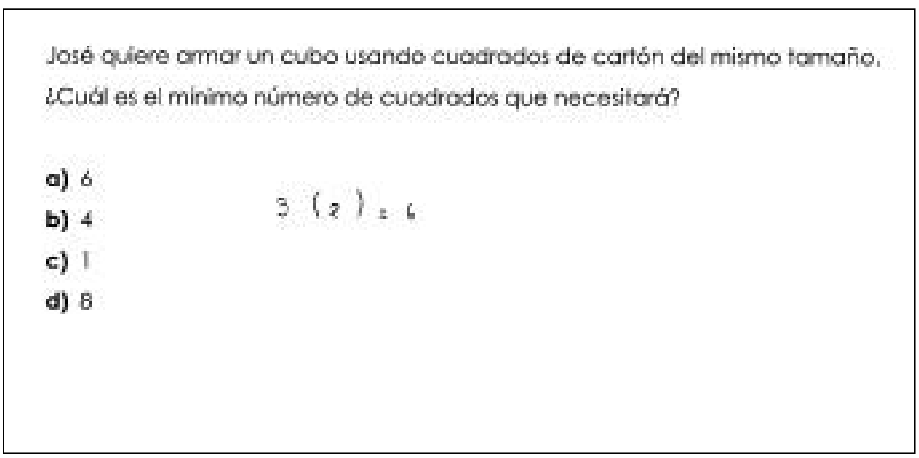
Respuesta A


José quiere armar un cubo usando cuadrados de cartón del mismo tamaño.
¿Cuál es el mínimo número de cuadrados que necesitará?

a) 6
b) 4
c) 1
d) 8

Observe la estrategia utilizada por el estudiante en la respuesta A: representa el cubo y, luego, realiza un conteo de los cuadrados empleados. Se puede confirmar que el estudiante posee la imagen conceptual adecuada del cubo y de la función que cumple cada cuadrado para poder «armarlo». También se puede observar que el estudiante es capaz de representar mediante un dibujo de dos dimensiones un objeto de tres dimensiones; en general, mantiene la proporcionalidad y el paralelismo al graficar.

Respuesta B


José quiere armar un cubo usando cuadrados de cartón del mismo tamaño.
¿Cuál es el mínimo número de cuadrados que necesitará?

a) 6
b) 4
c) 1
d) 8

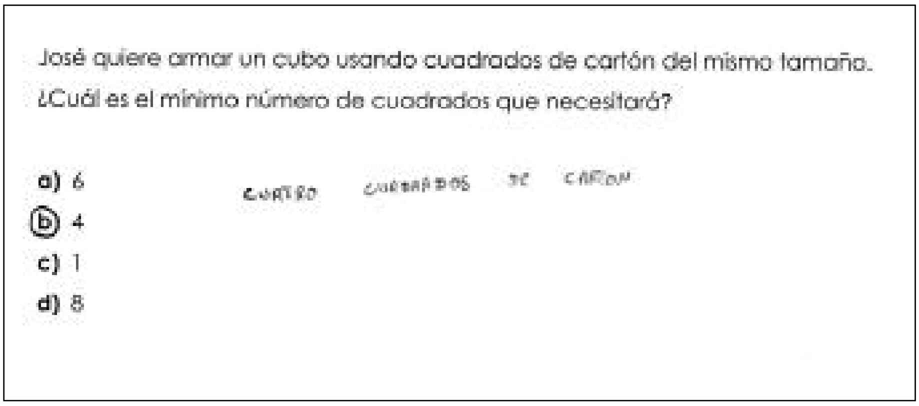
3 (2) = 6

En esta respuesta se puede observar que el estudiante ha optado por una estrategia que no incluye la representación gráfica; sin embargo, ha registrado el procedimiento para calcular el número de cuadrados utilizado y ha hallado adecuadamente lo pedido.

Cabe precisar que, en el proceso de codificación, las respuestas se recogieron priorizando las habilidades evidenciadas por los estudiantes por sobre su destreza para responder según un formato específico. Aquí, en el ejemplo, el estudiante no marca la alternativa, pero deja clara la idea de que su respuesta es «6», por lo que esa es la respuesta que se considera. Este hecho responde al enfoque de evaluar capacidades que evidencian el grado de incorporación de los aprendizajes para responder a problemas dentro o fuera de la escuela y no al «entrenamiento particular» para rendir pruebas.

X Respuestas incorrectas

Respuesta C

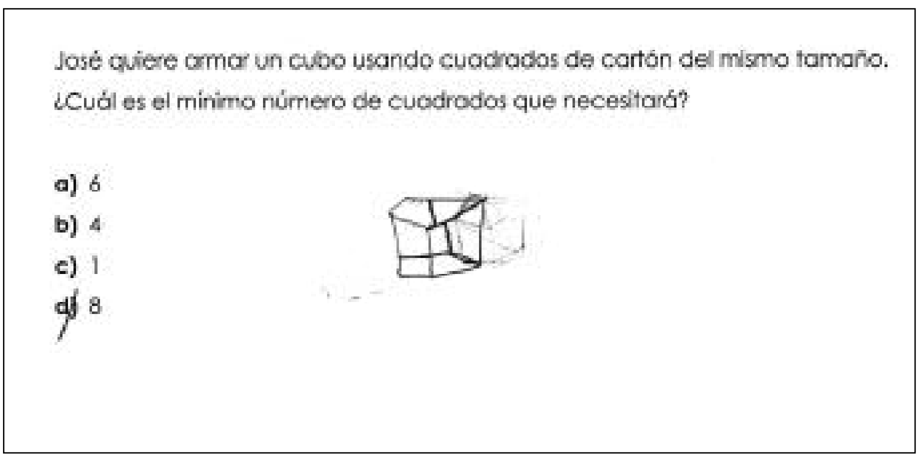

José quiere armar un cubo usando cuadrados de cartón del mismo tamaño.
¿Cuál es el mínimo número de cuadrados que necesitará?

a) 6
b) 4
c) 1
d) 8

CUATRO CUADRADOS DE CARTON

En la respuesta C, se puede observar que el estudiante no ha realizado una estrategia gráfica; tal vez ha optado por imaginarse el cubo o ha evocado equivocadamente el dato. Lo que sí se evidencia es que la respuesta no es producto de un error al «marcar» la alternativa, pues la ha colocado por escrito.

Respuesta D


José quiere armar un cubo usando cuadrados de cartón del mismo tamaño.
¿Cuál es el mínimo número de cuadrados que necesitará?

a) 6
b) 4
c) 1
d) 8

En este último caso, se presenta la respuesta de un estudiante que ha optado por la estrategia de representar gráficamente el cubo y, luego, calcular el número de cuadrados. Sin embargo, incurre en un error al realizar este cálculo.

Al observar los trazos borrados, podemos deducir que el estudiante ha llegado a dibujar el cubo solo después de algunos intentos y aun así no ha logrado plasmar ni la proporcionalidad ni el paralelismo de sus caras. Este hecho evidencia un menor desarrollo de su pensamiento geométrico en lo referido a la representación gráfica, lo que apoya la hipótesis de que cometió un error al tratar de identificar los cuadrados para contarlos.

[Se estima que un 27% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M3S16

Suficiente

Calcula:

$$45 - 10 \div 2 \times 4 - 12 \div 4 + 63 \div 9 - 7 \times 1$$

✓ **a)** 22

b) 67

c) 40,75

d) 8

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *529*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para aplicar algoritmos sobre el contenido de número y cantidad. En particular, se recoge información sobre la capacidad de los estudiantes para aplicar procedimientos y calcular operaciones aritméticas combinadas que no presentan signos de agrupación, con números enteros en un ámbito numérico restringido.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

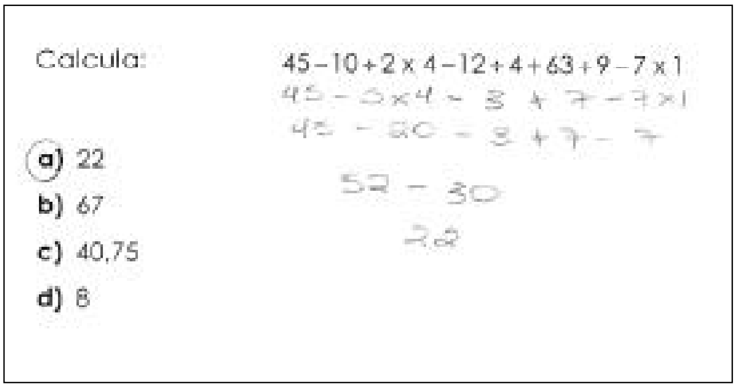
El estudiante debe, en primer lugar, identificar que se trata de una operación combinada con números enteros. En seguida, debe identificar por dónde empezar, siguiendo la jerarquía de las operaciones, y calcular en función de ello. Es decir, primero debe calcular el resultado de las operaciones de multiplicación y división. Luego, y siempre siguiendo la jerarquía establecida, debe calcular las operaciones de adición y sustracción, tomando en cuenta los signos positivos y negativos de los números para llegar al resultado final. Entre los diversos procedimientos de cálculo pueden existir algunas variantes, pero, como es evidente, todas deben llegar al mismo resultado.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunas respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

✓ Respuesta correcta

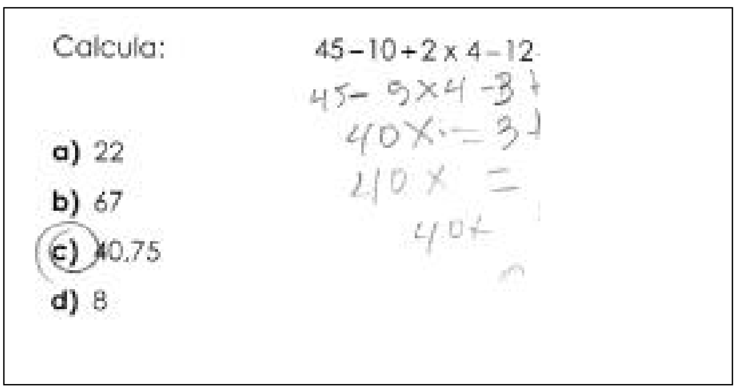
Respuesta A



En este ejemplo se puede observar un procedimiento bastante ordenado en el que el estudiante aplica adecuadamente la jerarquía de las operaciones y calcula sin dificultad el resultado pedido. Puede notarse que el estudiante calcula en dos pasos todos los productos y cocientes parciales, para luego aplicar la propiedad asociativa: suma por separado todos los números positivos por un lado, y los números negativos por otro para, finalmente, calcular la diferencia y llegar a la respuesta.

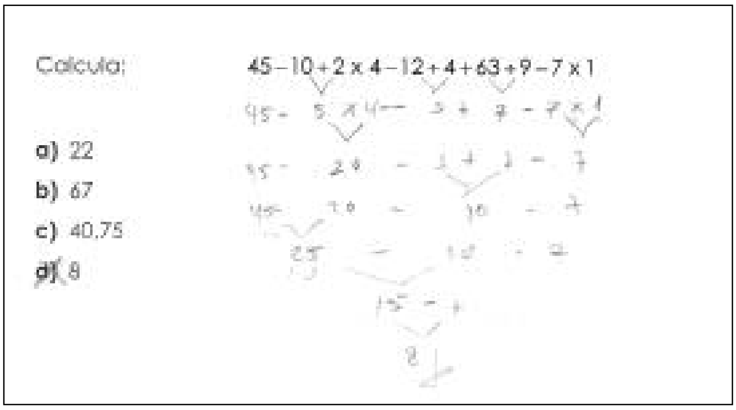
X Respuestas incorrectas

Respuesta B



En la respuesta B, se evidencia la confusión del estudiante, que no interpreta que se trata de una operación combinada con números enteros, sino que considera que se trata de operaciones algebraicas. El estudiante toma los signos de la multiplicación («x») por una incógnita «x». En seguida, hace aparecer un signo «=» y convierte la expresión en una ecuación lineal. Luego, trata de resolverla reduciendo, erradamente, algunos términos que considera semejantes para, finalmente, tratar de despejar la «incógnita». Sin embargo, deja sin concluir las operaciones y asocia la respuesta con el «coeficiente» del término que obtiene.

Respuesta C



En este caso, se puede observar la respuesta de un estudiante que maneja adecuadamente la jerarquía de las operaciones aritméticas, pero que tiene problemas para operar con los signos negativos, es decir, para la adición y sustracción de números enteros, por lo que se equivoca y llega a uno de los distractores como respuesta.

> Se estima que un 20% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M3S17

Suficiente

Un mago "milagroso" duplica el dinero, con la condición de que por cada "milagro" que realice, se le entregue 40 nuevos soles. Si una persona después de pagar un "milagro" tiene 100 nuevos soles, ¿cuánto dinero tenía inicialmente?

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *598*

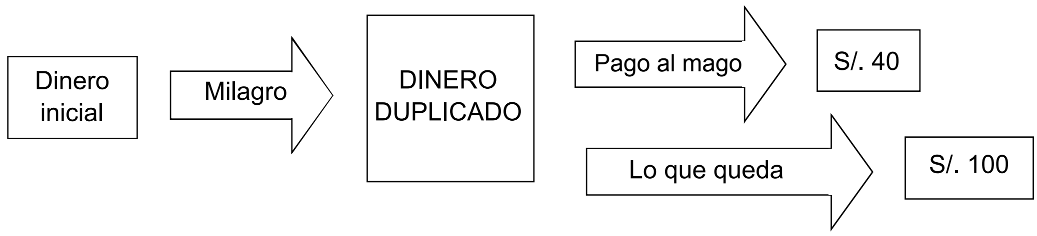
¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas sobre el contenido de número y cantidad. En particular, se evalúa la resolución de problemas novedosos (o no rutinarios) que demandan al estudiante la búsqueda de estrategias de resolución. Se puede destacar dos estrategias de resolución más usuales: la elaboración de una secuencia de operaciones aritméticas y el planteamiento de una ecuación lineal. El conjunto numérico que se requiere para solucionar la pregunta es el de los números naturales hasta las centenas.

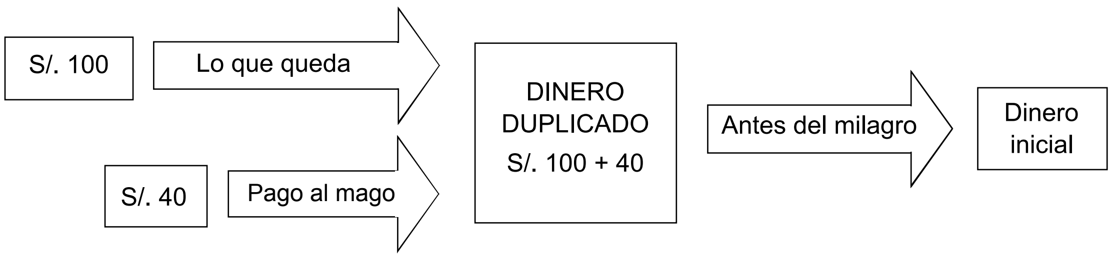
La dificultad de esta pregunta se centra en la elaboración de una estrategia para solucionar el problema, pues el ámbito numérico es bastante reducido y elemental para un estudiante de tercero de secundaria, por lo que la parte operativa no debe resultarle difícil. La pregunta se enmarca en un entorno fantástico, es decir, no ocurre en la realidad pero es interesante matemáticamente para proponer situaciones problemáticas.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante, en primer lugar, debe interpretar la situación que se le está proponiendo. El siguiente esquema ilustra la situación presentada en la pregunta:

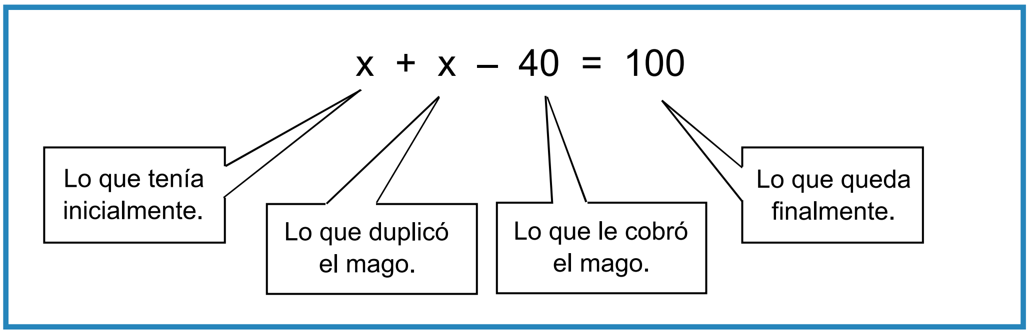


En seguida, el estudiante debe elegir una estrategia de resolución que podría ser, por ejemplo, una secuencia de operaciones aritméticas, o plantear una ecuación lineal. Si eligiera una estrategia aritmética, podría utilizar, por ejemplo, el razonamiento regresivo, el ensayo – error, etc. Un estudiante que ha elegido la primera estrategia mencionada podría proceder de la siguiente manera:



Al final la persona tenía S/. 100. Entonces, antes de pagar el «milagro» tenía S/. 140 (pues el «milagro» costaba S/. 40). Y antes de que le realizaran el «milagro» (que consistía en duplicarle el dinero) tenía S/. 70.

Si el estudiante elige una estrategia algebraica, debe empezar por identificar las invariantes de la situación, es decir, las cantidades que no van a cambiar. La invariante que se presenta es la cantidad inicial de dinero (que es lo que se está pidiendo averiguar). Esta cantidad inicial puede ser elegida como la incógnita (el dinero que tenía la persona inicialmente = x). En seguida, debe encontrar y representar una relación entre los datos, por ejemplo, el hecho de que el dinero inicial, luego de todas las transformaciones planteadas, debe ser igual al dinero que queda, como se muestra a continuación:



Así, lo que tenía inicialmente, más lo que le duplicó el mago, menos lo que le cobró, es igual al dinero que tenía la persona al final (S/. 100).

Es necesario resaltar que, para cualquier camino que haya elegido el estudiante, la complejidad de la tarea no está centrada en la parte operativa. La dificultad está en lo poco habitual que puede ser enfrentar una tarea para la cual no se tiene una estrategia establecida para aplicar; en este caso se debe elaborar una estrategia de solución que, como ya se mencionó, podría ser aritmética, algebraica, gráfica o una combinación de estas.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como respuestas correctas aquellas en las que el estudiante respondió adecuadamente a la situación problemática propuesta, ya fuera mostrando una estrategia aritmética (razonamiento regresivo, ensayo – error, valor numérico, etc.), una estrategia o un procedimiento algebraico (una ecuación, un sistema de ecuaciones, etc.), una combinación de estas o, incluso, sin mostrar un procedimiento.

Se consideraron también correctas las respuestas en las que el estudiante escribió un procedimiento completo que conduciría a la respuesta, pero que contenía errores operativos (que no fuesen de definición de las operaciones), así como también planteamientos adecuados pero truncos al momento de ser operados (planteamientos completos que no eran totalmente operados).

Se consideraron respuestas incorrectas aquellas en las que el estudiante interpretó parcialmente los datos y condiciones. Por ejemplo:

a) Si realizó una adición de los datos numéricos del problema.

b) Si planteó una ecuación inadecuada ($x = 100 + 40$; $2x = 100$).

c) Si dividió ($100 \div 2$).

d) Si transcribió algunos datos sin relacionarlos o escribió directamente una respuesta incorrecta sin mostrar su procedimiento.

e) Si aplicó una estrategia que consideró todos los datos y condiciones pero en una secuencia inadecuada ($100 \div 2 \rightarrow 50 + 40$; o $2(x – 40) = 100$).

f) Si escribió otras respuestas que no correspondían a ninguna de las categorías anteriores, mostrando o no su procedimiento.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunas respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

✓ Respuestas correctas

Respuesta A

Escribe aquí tu procedimiento

$2x = 100 + 40$

$2x = 140$

$x = 70$

Respuesta: Inicialmente tenía S/.70

El estudiante de la respuesta A emplea una estrategia algebraica. Se puede apreciar que, en este caso, el estudiante establece la incógnita como el dinero que inicialmente tenía la persona (sin explicitarlo por escrito) y la representa con la letra «x». En seguida, establece la relación de la siguiente forma: iguala el dinero duplicado por el mago (2x) con el dinero que le quedó a la persona al final más lo que le pagó al mago (100 + 40). A continuación, opera adecuadamente la resolución de la ecuación. Finalmente, escribe su respuesta otorgándole el sentido adecuado y acompañándola de las unidades correspondientes.

Respuesta B

Escribe aquí tu procedimiento

Persona 70

duplica 140

Pago al mago 40

esto que quedo 100

Respuesta: tenia 70 soles

El estudiante de la respuesta B solo registra por escrito la comprobación de su respuesta final. Aparentemente, emplea una estrategia aritmética de ensayo – error o de razonamiento regresivo para llegar a la respuesta pedida.

X Respuesta incorrecta

Respuesta C

Escribe aquí tu procedimiento

S/. 100 +
S/. 40
S/. 140

Respuesta: Tenió inicialmente S/. 140 nuevos soles.

El estudiante de la respuesta C solo ha logrado interpretar parte de las condiciones propuestas en la situación. En este caso, se observa que, aparentemente, ha realizado un razonamiento regresivo solo de la última parte de la situación: al dinero final le «regresa» el pago que le hizo al mago. Sin embargo, no continúa con el proceso, porque aparentemente interpreta que esa es la respuesta, pues la escribe contextualizándola y añadiéndole la unidad monetaria.

Otra interpretación que se le podría dar al procedimiento mostrado en la respuesta C es que el estudiante no comprende el enunciado y solo suma los datos numéricos que aparecen en la pregunta.

Se estima que un 6% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M3S18

Suficiente

Las tres secciones de tercero de secundaria de un colegio tienen respectivamente 24, 40 y 32 estudiantes. Los delegados de las secciones consiguen la autorización para organizar un campeonato deportivo durante dos días, pero con las siguientes condiciones:

— Todos los estudiantes deben participar.
— Ninguno de los estudiantes debe pertenecer a más de un equipo.
— Todos los integrantes de cada equipo deben ser de la misma sección.
— Todos los equipos deben tener el mismo número de integrantes.

¿Cuál es el máximo número de integrantes de cada equipo, si se debe cumplir con las cuatro condiciones?

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Extramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Suficiente [25]

Dificultad Rasch: 662

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad del estudiante para resolver problemas sobre el contenido de número y cantidad. En particular, evalúa el manejo de las nociones y propiedades del conjunto de los números naturales. Es un problema no rutinario pues ha sido planteado de una manera poco habitual, aunque la situación se desarrolla en un entorno bastante conocido para el estudiante, como es la escuela.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante, en primer lugar, debe comprender la situación —y, en particular, las cinco[26] condiciones planteadas en el enunciado para formar los equipos— para integrar dichas condiciones y asociarlas con alguna noción matemática que pueda aportar a la solución del problema.[27] Por ejemplo, una estrategia de solución podría ser el identificar que la noción matemática pedida coincide con la de máximo común divisor del número de estudiantes de cada salón. Luego, el estudiante debe emplear dicha noción o algún procedimiento conocido por él para calcularlo y, finalmente, otorgarle sentido a la respuesta.

---

25. Responder correctamente a esta pregunta no fue requisito para ubicarse en este nivel. Solo algunos de los estudiantes del nivel suficiente pudieron enfrentarse con éxito a esta pregunta.

26. Son cinco condiciones, pues se trata de las cuatro explicitadas en los respectivos guiones más la condición, que figura en la pregunta al final del problema, de ser el máximo número de integrantes.

27. El estudiante también podría ir probando valores que fueran cumpliendo consecutivamente las condiciones pedidas, utilizando la estrategia heurística del ensayo – error, hasta encontrar el número que cumpla con las condiciones, sin necesidad de conocer explícitamente que se trata del máximo común divisor.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron correctas aquellas respuestas en las que el estudiante:

a) Aplicó la noción de máximo común divisor y presentó la respuesta con o sin unidad.

b) Llegó a la respuesta utilizando el ensayo – error u otro tipo de procedimiento desarrollado de manera consistente.

c) Escribió directamente la respuesta final con o sin unidad.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunas respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

✓ Respuesta correcta

Respuesta A

Escribe aquí tu procedimiento

$$\begin{array}{r|l} 24 - 40 - 32 & 2 \\ 12 - 20 - 16 & 2 \\ 6 - 10 - 8 & 2 \\ 3 - 5 - 4 & \end{array} \quad \text{MCD} = 8$$

Respuesta: El maximo numero de integrantes es 8.

Esta pregunta resulta muy compleja para casi la totalidad de los estudiantes. En la respuesta A, el estudiante identifica la situación con la noción de máximo común divisor (MCD) y aplica un algoritmo para calcularlo y encontrar la respuesta pedida.

X Respuestas incorrectas

Un muy reducido número de estudiantes logró responder adecuadamente a esta situación problemática, sin embargo, la gran mayoría de estudiantes a los que se les propuso esta pregunta intentó resolverla, aunque infructuosamente.

Respuesta B

Escribe aquí tu procedimiento

24 | 4
24   6
--

40 | 4
40   10
--

32 | 4
32   8
--

* En el 1er caso en cada equipo debe haber 6 alumnos.
* En el 2da caso en cada equipo debe haber 10 alumnos.
* En el 3er caso en cada equipo debe haber 8 alumnos.

Respuesta:

En la respuesta B, el estudiante interpreta que lo solicitado es un divisor común para los tres salones, por lo que halla equipos de diferente número de integrantes para cada uno de estos.

Respuesta C

Escribe aquí tu procedimiento

2 equipos de 12 jugadores

24 | 12
--   2

40 | 12
3   3

3 equipos de 12 jugadores sobrando 3

32 | 12
-    3

3 equipos faltando 3 jugadores

24 + 40 + 32
64 + 32
96 | 3
06   32
(0)

Respuesta: Se forman 8 equipos de 12 integrantes

En la respuesta C, el estudiante interpreta que debe formar equipos de igual número de integrantes en los tres salones, pero no ha considerado el hecho de que no deben quedar alumnos sin equipo. Por esa razón, halla cuántos equipos de 12 podrían formarse en cada salón y señala a los que sobran (aunque en el último caso señala los que «faltan»). Sin embargo, a continuación suma el número de integrantes de cada sección y lo divide entre tres, aunque no toma en cuenta este hecho y da como resultado el número total de equipos que halló al principio (aunque con error).

Respuesta D

Escribe aquí tu procedimiento

$$\begin{array}{r} 24 \\ +40 \\ +32 \\ \hline 96 \end{array} \qquad 96 : 3 = 32$$

Respuesta: El máximo número de integrantes de cada equipo es 32 si se debe cumplir los 4 condiciones.

Esta respuesta evidencia que el estudiante ha tenido serios problemas para interpretar la situación, pues lo que muestra tiene muy poca relación con lo que se le pide.

El estudiante interpreta que se debía calcular la media aritmética del número total de estudiantes, la calcula aplicando adecuadamente este procedimiento y contextualiza su respuesta.

Respuesta E

Escribe aquí tu procedimiento

$40 + 37 = 40 + x$

$77 = 40$

$x = \frac{77}{40}$

Respuesta: $x = \frac{77}{410}$

La respuesta E muestra que el estudiante, con serios problemas para comprender la situación, trata de aplicar una ecuación lineal como estrategia de solución. Para ello, toma los datos numéricos del enunciado y los relaciona mediante signos de adición, planteando una relación de equivalencia inexistente. Además, la respuesta que halla no la interpreta en el contexto de la situación (¿qué significan equipos de $\frac{72}{40}$ integrantes?).

Se estima que un 2% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

5 Principales dificultades en el desempeño en matemática

Probables causas y sugerencias pedagógicas

En este capítulo se presenta una descripción de las dificultades encontradas en los estudiantes de tercero de secundaria al resolver las preguntas de la prueba de Matemática. Estas dificultades se evidencian en el desarrollo de las nociones y en su puesta en práctica al resolver situaciones problemáticas de contenido matemático. Además, se señalan algunas de las posibles causas de estas dificultades y se ofrecen algunas sugerencias didácticas para mejorar el desempeño matemático de los estudiantes del grado.

La descripción de las dificultades está organizada en núcleos de interés para la práctica docente.

5.1. Pensamiento numérico y proporcional

Se espera que los estudiantes de tercero de secundaria puedan utilizar las nociones relacionadas con los conjuntos numéricos y el razonamiento proporcional como una herramienta funcional que les ayude a enfrentarse exitosamente a situaciones intra y extraescolares. Sin embargo, se ha identificado que los estudiantes presentan serias limitaciones en el manejo de los diferentes conjuntos numéricos (N, Z, Q y R), es decir, muestran dificultades para la comprensión del concepto de número, sus representaciones y propiedades, y al efectuar operaciones con números. Esto puede ser observado al enfrentar a los estudiantes con situaciones problemáticas rutinarias y no rutinarias que demandan elaborar una secuencia de operaciones aritméticas o utilizar la proporcionalidad directa y sus aplicaciones.

Sin embargo, no se trata solamente de la falta de transferencia de aprendizajes a otras situaciones más realistas, y por lo mismo más complejas, como aquellas a las que los estudiantes deberán enfrentarse tanto dentro como fuera de la escuela. Los resultados de las pruebas nos muestran que los estudiantes incluso presentan limitaciones al enfrentarse a tareas mucho más sencillas que ya deberían poder resolver desde grados anteriores y para las cuales han sido explícitamente instruidos:

- No comprenden el significado de los números enteros, la relación de orden y su representación en la recta numérica. Tampoco comprenden el significado de los números racionales y sus representaciones (fraccionaria y decimal).
- No son capaces de calcular operaciones aritméticas combinadas con números naturales, enteros y racionales, sin signos de agrupación o con ellos.[28]

28. Se ha detectado que los estudiantes operan indistintamente de izquierda a derecha, o en cualquier otro orden, es decir, no manejan el orden jerárquico de las operaciones.

- No resuelven situaciones problemáticas rutinarias de enunciado verbal, tales como las que aparecen en los libros de texto de grados precedentes, que solo demandan aplicar una secuencia de operaciones aritméticas elementales.

A continuación se presentan algunas de las causas posibles de las dificultades mencionadas:

- La falta de sentido o de significatividad para los estudiantes de las actividades realizadas en el aula: Esta explica el «olvido» o la aplicación inadecuada de procedimientos de rutina que han mostrado los estudiantes en la prueba.
- La baja demanda cognitiva de las actividades que les son propuestas a los estudiantes en el desarrollo de este eje: Esto quiere decir que son expuestos a actividades tales como el memorizar, repetir (oralmente o por escrito), aprender procedimientos sin conexiones, resolver «problemas tipo» a partir del ejemplo desarrollado por el profesor, etc. Estas prácticas no aportan al desarrollo de capacidades complejas que posibilitan al estudiante realizar conexiones entre distintos conceptos para transferirlos a otras situaciones y, en otras palabras, para poder incorporar los aprendizajes como herramientas útiles y funcionales en diversas situaciones.
- La compartimentalización del conocimiento: Al estudiante se le muestra la matemática como si se tratase de un conjunto de contenidos sin relación entre sí. Por ejemplo, en cada clase se le presenta una noción matemática, «sus ejercicios» y «sus problemas correspondientes». No existe una integración de los contenidos ni de las capacidades, ni un trabajo inclusivo que demande al estudiante utilizar los aprendizajes previos y redefinirlos en función de las nuevas situaciones. El aprendizaje de la matemática queda reducido a la memorización de definiciones y de procedimientos ad hoc, como una gran lista de recetas particulares que se deben utilizar, cada una, en una situación específica.

A continuación, se presentan algunas sugerencias que pueden servir al docente para reflexionar sobre su práctica y para buscar mejores estrategias para generar aprendizajes en este eje.

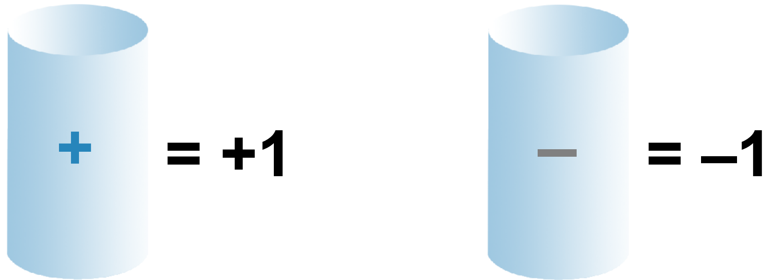
Números enteros

En lo referido a los números enteros, se sugiere iniciar el trabajo con los estudiantes utilizando en clase modelos concretos que los representen, tales como los de neutralización y desplazamiento.

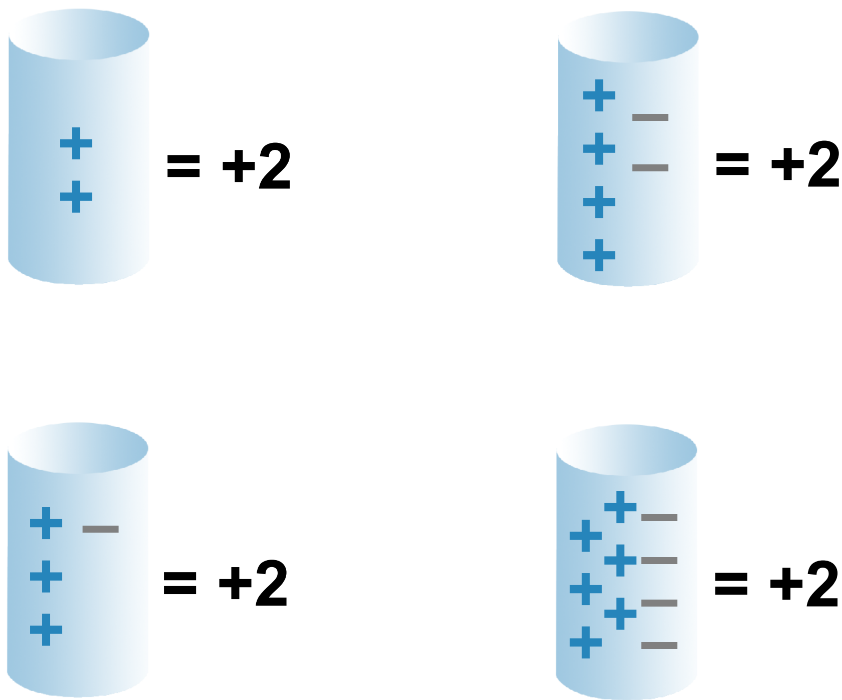
a) *Modelos de neutralización*

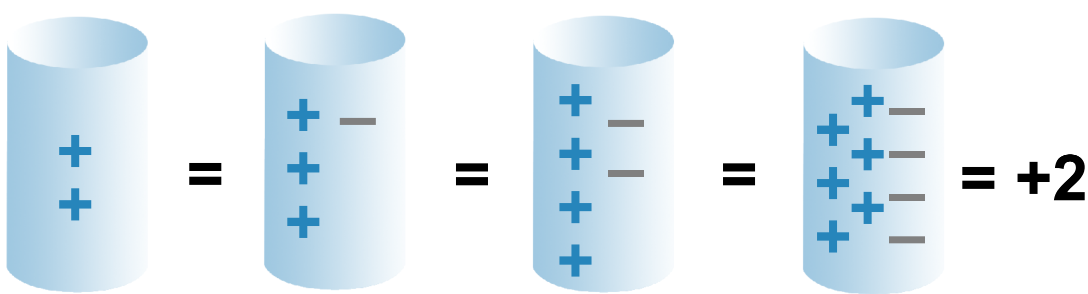
Son aquellos que ilustran la relación entre los números positivos y negativos. A continuación se presentan dos modelos de neutralización.

Modelo de las cargas eléctricas: Ilustra esta relación como si se tratara de un proceso de cargas eléctricas, de una manera visual y concreta. Cada signo positivo (+) representa «+1» y cada signo negativo (–) representa «–1». Obsérvese el gráfico:

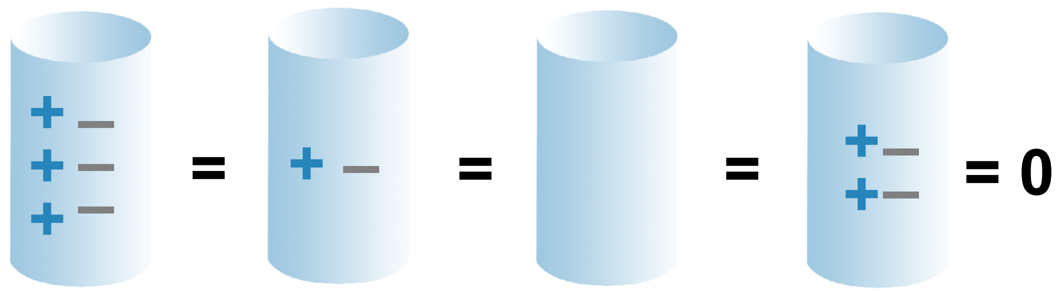


Por ejemplo, el número dos puede ser representado de distintas maneras que son equivalentes:

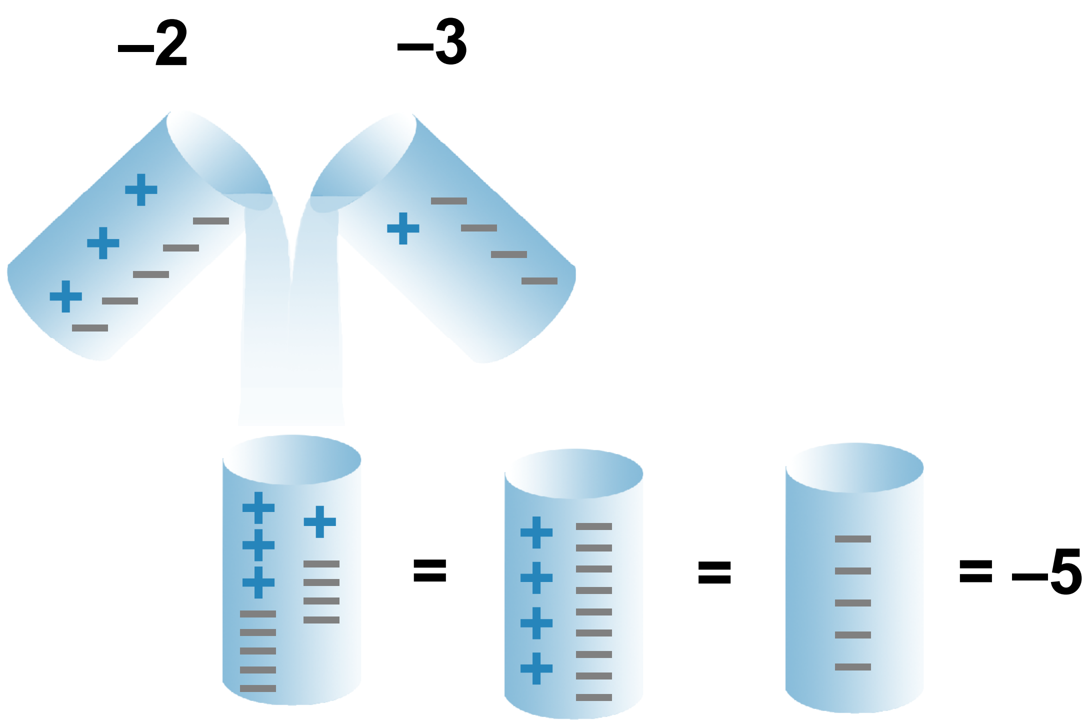




Para representar el cero, se pueden utilizar representaciones equivalentes como en el ejemplo anterior:



Además, se pueden realizar operaciones, por ejemplo, la adición, reuniendo en un solo envase los valores de las cargas. Obsérvese:



$$-2 + (-3) = -5$$

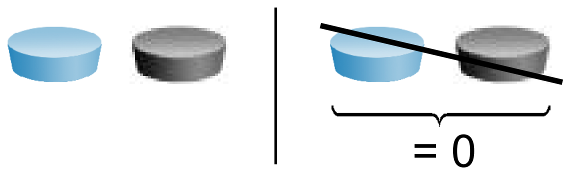
Modelo de fichas de colores: Se pueden utilizar, por ejemplo, fichas grises para los negativos y azules para los positivos y se pueden ilustrar las propiedades de los números enteros tales como el elemento neutro, el inverso (opuesto aditivo), la adición y sustracción de enteros, en general, las operaciones y propiedades.

Veamos, mediante ejemplos, cómo se representan los números en este modelo:

1 ficha azul = +1 =    1 ficha gris = –1 = 

Cuando se tienen fichas azules y grises, cada una de las azules puede ser cancelada (neutralizada) por una de las grises. Veamos:

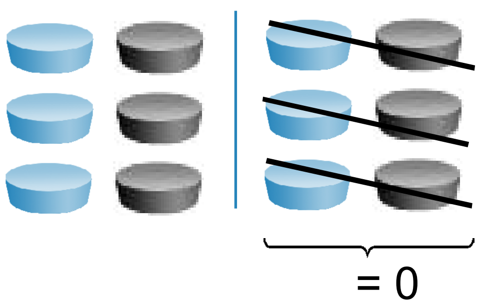
1 + (–1) =



1 + (–1) = 0

En seguida, se presentan otros ejemplos:

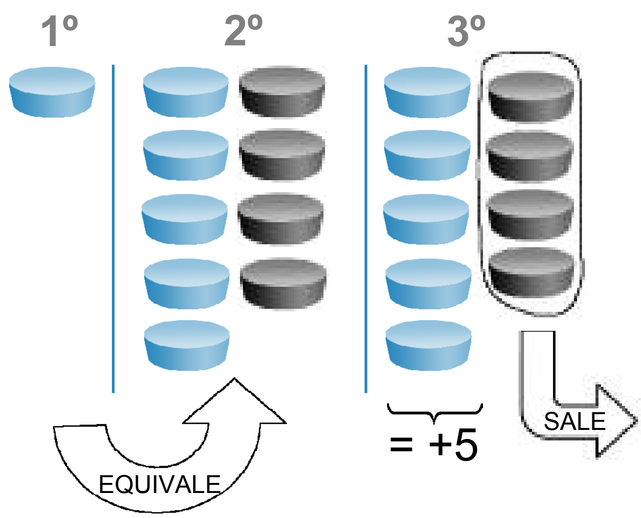
3 + (–3) = «juntar 3 fichas azules con 3 fichas grises»



Por lo tanto:

3 + (–3) = 0

1 – (–4) = «separar 4 fichas grises si tengo 1 azul»

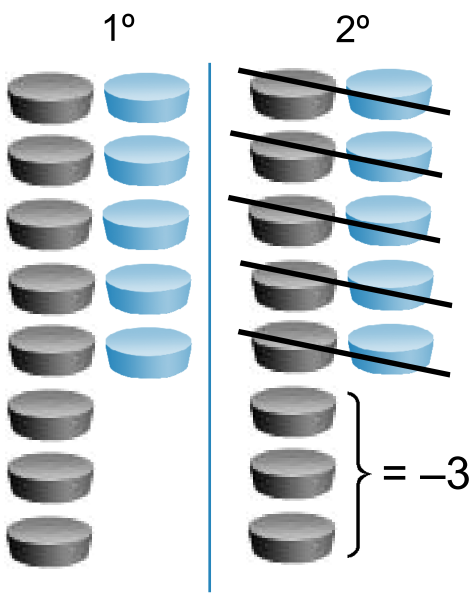


Así se concluye que:

1 – (–4) = +5

Veamos otro ejemplo de adición:

–8 + 5 = «juntar 8 fichas grises con 5 fichas azules»



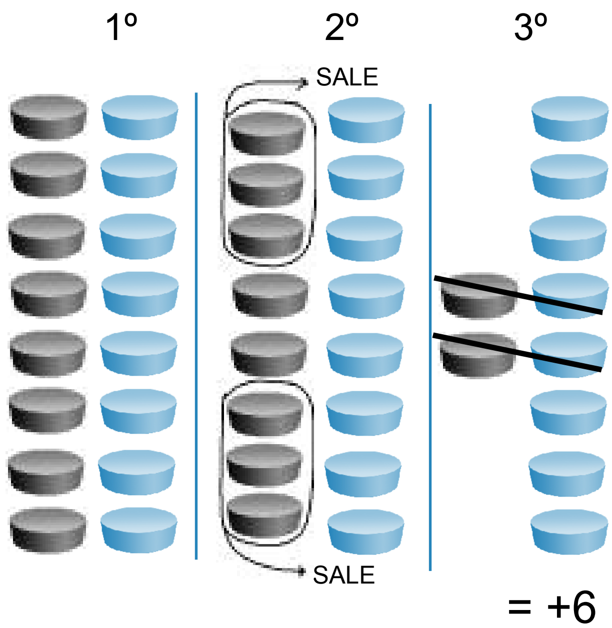
En conclusión:

–8 + 5 = –3

Veamos un ejemplo de multiplicación:

(–2).(–3) = «quitar dos veces 3 fichas grises»

Para esto, partimos de cero y tenemos que agregar parejas de fichas azules y grises, de manera que podamos retirar las fichas indicadas.



En conclusión:

(–2).(–3) = +6

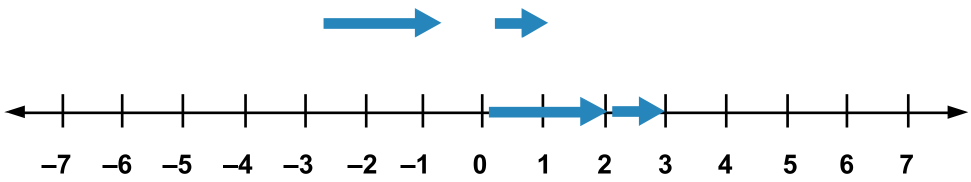
b) *Modelos de desplazamiento*

Son aquellos que, como su nombre lo indica, representan los valores de las cantidades utilizando algún tipo de movimiento proporcional a dichos valores, por ejemplo, la recta numérica para representar a los números enteros. A partir de las investigaciones realizadas por diversos autores, se propone usar vectores unidireccionales en vez de puntos estáticos. En otras palabras, se debe utilizar cada número entero como un desplazamiento en cada uno de los dos sentidos que tiene la recta numérica, según el número sea positivo o negativo (como si fuera un vector o una flecha de tamaño proporcional a su valor absoluto o módulo). En la recta numérica, se usa el sentido positivo como desplazamiento hacia la derecha y el sentido negativo hacia la izquierda.

Este modelo también es útil para ilustrar las propiedades de los números enteros y sus operaciones. El signo de la adición se utiliza para agrupar (juntar) desplazamientos. El signo de la sustracción, para cambiar el sentido de un desplazamiento.

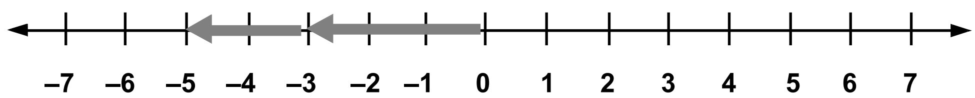
A continuación, se presentan algunos ejemplos:

$$+2 \;+\; (+1) \;=$$

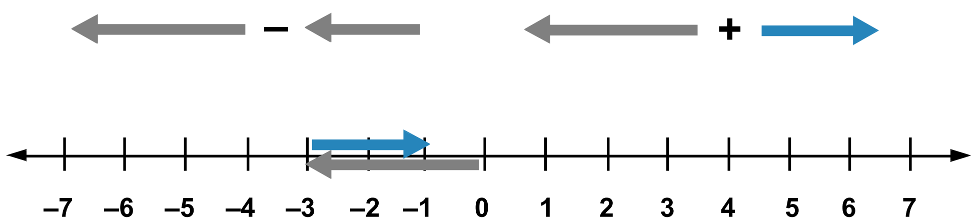


$$+2 \;+\; (+1) = +3$$

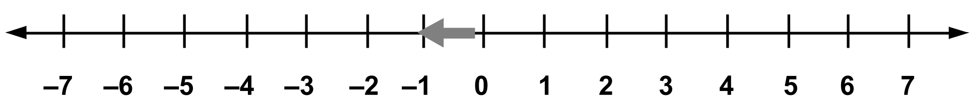
$$-3 \;+\; (-2) = -5$$



$$-3 \;-\; (-2) \;= \qquad\qquad -3 \;+\; 2 =$$



Simplificando (o, si se quiere, expresando solo el desplazamiento resultante):

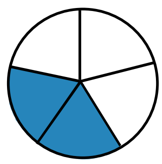


$$-3 \;-\; (-2) = -1$$

Este trabajo con los números enteros debe ser alternado con la modelación de situaciones concretas (temperaturas sobre y bajo cero, pérdidas–ganancias, cargas eléctricas, personas que entran o salen de un recinto, subir o bajar escalones, variación del nivel de agua en un depósito, etc.), poniendo énfasis en el significado de los números y las relaciones de orden, para llegar paulatinamente a una formalización de la simbología.

NÚMEROS RACIONALES

Respecto del conjunto de los números racionales, se debe trabajar, en primer lugar, con los racionales positivos, reforzando la equivalencia de las distintas representaciones: como fracción, como número decimal, como gráfico, o como porcentaje.

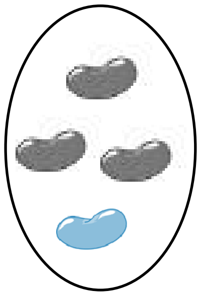
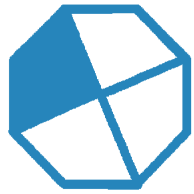
Fracción	Decimal	Porcentaje	Gráfico
$\frac{1}{2}$			
		12,5%	
			
	0,25		

Se debe hacer hincapié, mediante situaciones problemáticas, en las propiedades de orden y densidad de los racionales; también, en las relaciones de equivalencia. Para lograrlo, se deben emplear situaciones intra y extramatemáticas.

La representación de fracción debe ser interpretada por los estudiantes en sus diversos significados:

- como fracción en sí (como parte de una unidad, como parte de un conjunto de datos discretos),
- como cociente entre dos números (como una división indicada),
- como razón ($\frac{3}{4}$ = tres de cada cuatro), y
- como operador ($5 \times \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$).

El uso de materiales concretos (manipulables) y de las representaciones gráficas debe ser intensivo y variado para asegurar la comprensión significativa de la noción y no caer en el mero entrenamiento para responder estímulos estándar.

DE MANERA VERBAL		FRACCIÓN COMO PARTE DE UN CONJUNTO		FRACCIÓN COMO PARTE DE LA UNIDAD
Uno de cada cuatro	equivale		equivale	

OPERACIONES ARITMÉTICAS

Las operaciones aritméticas no deben ser trabajadas de manera aislada y descontextualizada. Una aliada importante, que contribuirá a ir trabajando otros contenidos, será la aritmética relacional, la cual busca desarrollar en los estudiantes estructuras de pensamiento que les permitan construir diferentes estrategias para abordar una tarea específica. Estas estructuras les permiten a los estudiantes realizar transferencias y generalizaciones de lo aprendido, por ejemplo, al resolver cuadrados mágicos, al continuar sucesiones numéricas y al modelar fenómenos mediante estas últimas.

$$\mathbf{1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; \ldots}$$

$$\mathbf{1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 8 ; 32 ; \ldots}$$

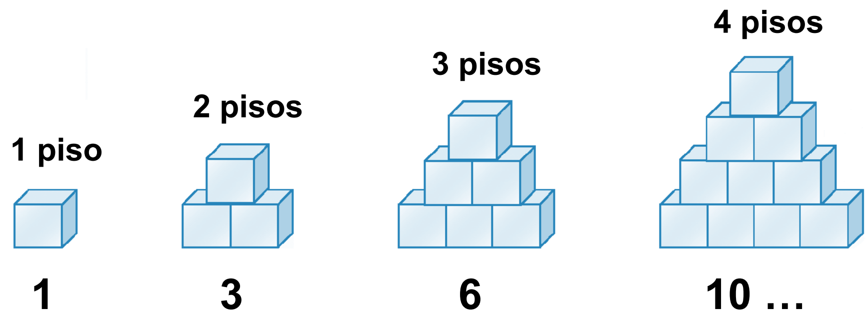
$$\mathbf{-15 ; -9 ; -3 ; \ldots}$$

$$\mathbf{\frac{1}{2} ; \frac{3}{4} ; \frac{5}{4} ; 2 ; 3 ; \frac{17}{4} ; \ldots}$$

$$\mathbf{0 ; 0{,}3 ; 0{,}6 ; 0{,}9 ; \ldots}$$

Sin embargo, como apoyo en el aula, no debe dejarse de trabajar situaciones concretas y significativas para los estudiantes, para que puedan identificar los efectos de las transformaciones —que vienen a ser las operaciones aritméticas que realizan— en la situación planteada. Como ya se mencionó, para que el estudiante pueda aplicar y desarrollar sus mecanismos de control al operar, la situación problemática propuesta debe ser significativa.

En la situación presentada a continuación, se brinda al estudiante la posibilidad de utilizar material concreto para representar la situación y tener un apoyo para modelarla.



- ¿Cuántos cubitos serán necesarios para hacer una torre de 5 pisos? ¿de 8 pisos? ¿de 10 pisos? ¿de 20?
- ¿Cuántos pisos como máximo tendrá la torre que puedo formar con 150 cubitos?

Además, este tipo de actividades es mucho más motivadora para los estudiantes que las operaciones aisladas, pues puede ser trabajada con ellos como un reto, como una investigación, ya sea de manera individual o grupal.

Razonamiento proporcional

Respecto del razonamiento proporcional, se sugiere el ya mencionado trabajo con sucesiones, el mismo cálculo relacional y la idea de funciones que modelen situaciones concretas que muestran tanto la proporcionalidad directa como la inversa u otro tipo de relaciones. Estas situaciones, presentadas como ejemplos y contraejemplos, contribuirán a que los estudiantes construyan, paulatinamente, nociones cada vez más robustas de dichos tipos de proporcionalidad.

Lucho va a viajar de Lima a Ica en su camioneta. Como es la primera vez que conduce en carretera, averigua la distancia y el tiempo que le tomará, aproximadamente, dicho viaje. Le han comentado que si va a 100 km/h llegará en tres horas, pero su camioneta puede ir solo a 60 km/h. Completa los datos que faltan en la tabla y averigua cuánto tiempo le tomará a Lucho el viaje.

Velocidad (km/h)	Tiempo (horas)
100	3
	3,5
	4
	4,5
	5

5.2. Pensamiento algebraico

Respecto de este punto, se ha identificado que los estudiantes presentan dificultades para utilizar el álgebra de manera que les permita resolver situaciones problemáticas susceptibles de ser abordadas, por ejemplo, planteando ecuaciones lineales. Esta limitación también tiene su origen en la falta de manejo por parte de los estudiantes de las nociones y principios fundamentales, tales como los diferentes significados de la noción de incógnita, la interpretación del lenguaje algebraico y la recodificación del lenguaje natural al algebraico y viceversa.

Los estudiantes presentan dificultades para comprender la noción de función en su acepción más elemental, es decir:

- para comprender la idea de cambio o variación asociada a dos o más magnitudes,
- para interpretar el significado de dicho cambio,
- para calcular valores puntuales de las funciones en diversas situaciones, y
- para representarlas de manera gráfica, simbólica o mediante tablas.

Las limitaciones identificadas en este eje se hacen más evidentes al comprobar que los estudiantes presentan serias deficiencias para realizar adecuadamente tareas tan elementales como la aplicación de algoritmos algebraicos —como el cálculo del conjunto solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales—, el cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas, la evaluación de funciones en valores puntuales, etc.

Asimismo, se ha identificado que los estudiantes tienen dificultades al enfrentarse a situaciones problemáticas rutinarias presentadas mediante un texto y que son susceptibles de ser abordadas empleando ecuaciones lineales o sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas, tales como las que se presentan en los libros de texto del grado que están cursando o de grados previos del nivel secundario.

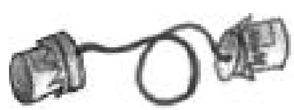
Debe señalarse que estas dificultades se presentan en el álgebra, que es el tópico supuestamente más trabajado en el grado. Esto parece confirmar que no se está realizando una labor enfocada en convertir al álgebra en una herramienta de representación y modelación para el análisis de situaciones y para la solución de situaciones problemáticas. Los resultados obtenidos nos permiten deducir que el álgebra sigue siendo trabajada en la escuela secundaria como un conjunto de conocimientos y procedimientos de cálculo que se deben adquirir porque son importantes en sí mismos. Esta sería una de las causas principales de la gran cantidad de errores, confusiones y «olvidos» en los que incurren los estudiantes al enfrentarse a las tareas referidas a este eje.

La importancia del álgebra como herramienta matemática está centrada en la facilidad que provee a quien la maneja para realizar representaciones, transformaciones y simplificaciones independientemente del valor particular que toman las expresiones con las que se trabaja. Por ello, es de medular importancia para la modelación de fenómenos y la resolución de problemas. Además, la representación y transformación de expresiones cada vez más generales y abstractas aporta al desarrollo de las capacidades matemáticas más complejas. Sin embargo, este desarrollo solo será posible en la medida en que lo representado «signifique algo» para quien utiliza el álgebra, pues, en caso contrario, solo se tratará de un ejercicio de memorización de procedimientos tediosos que no van a poder ser transferidos a otras situaciones.

El trabajo del álgebra, desde el punto de vista que se propone, consiste principalmente en desarrollar en los estudiantes las capacidades de representar y generalizar a partir de la significación que tiene para ellos este lenguaje. Cobra por ello gran importancia en este eje el manejo de nociones básicas como incógnita o variable, y función. Consecuentemente, debe darse menor importancia al manejo de los procedimientos y los cálculos operativos.

Como sugerencia, se propone que el trabajo en álgebra se inicie con la aritmética generalizada, que les permitirá a los estudiantes ir desarrollando las capacidades y nociones básicas a partir de situaciones que presentan casos concretos, cercanos a su experiencia, verificables, e incluso experimentables. La aritmética generalizada permitirá identificar y subsanar en los estudiantes carencias en las nociones que son necesarias para comprender el álgebra, pues presenta situaciones problemáticas —en contextos que pueden ser geométricos o aritméticos— para que a partir de ellas el estudiante pueda descubrir regularidades, patrones de variación y la necesidad de la representación de dicha variación.

Jimena y sus amigos quieren establecer un sistema de comunicación entre ellos mediante pitas, latas y papel de seda. ¿Cuántas pitas serán necesarias si son…



- 3 personas las que quieren comunicarse?
- 6 personas las que quieren comunicarse?
- 8 personas las que quieren comunicarse?
- «x» personas las que quieren comunicarse?

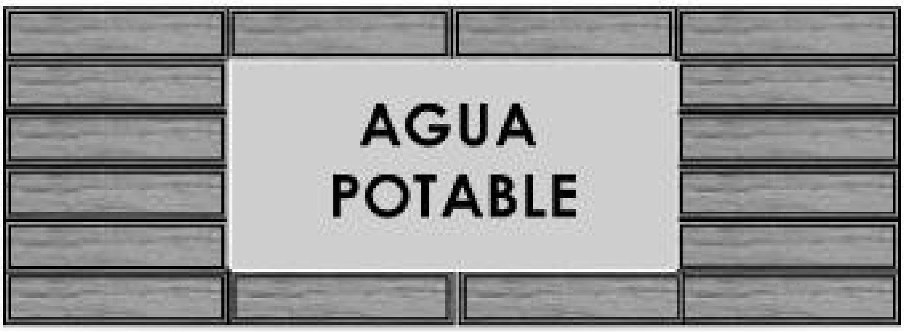
La noción de incógnita / variable tiene varios significados de diferente grado de generalidad. Es por ello que el estudiante no podrá manejar dicha noción en un solo paso, en una sola clase, en un solo grado; hay que ir trabajando esta noción paulatinamente para que los estudiantes sean capaces de manejarla en sus distintos significados: como fórmula, como ecuación, como identidad, como la representación de una propiedad y como la ecuación que representa a una función.[29]

Con referencia a los contenidos del álgebra, estos deberían reordenarse de manera que se inicie el trabajo algebraico a partir de la representación de situaciones. Es decir, se debe iniciar el trabajo didáctico representando situaciones concretas, utilizando expresiones algebraicas y ecuaciones lineales. Paulatinamente, se debe introducir la representación más formal, es decir, se debe representar expresiones verbales (proposiciones) sin utilizar la «traducción» término a término. El trabajo se debe enfocar en la «puesta en

29. Para profundizar en este punto, léase la parte correspondiente a este eje en el capítulo 5 de la Parte III de este informe (véase página 186).

práctica» del álgebra, en la búsqueda del significado y en la comprensión, y no en el aprendizaje de rutinas preestablecidas, de «trucos», de convenciones, de «cortes de camino» realizados por otros, que no generan aprendizajes complejos, ni útiles. El proceso de algoritmización —es decir, el establecimiento de un conjunto definido de pasos a seguir para lograr un objetivo definido— debe ser producto del trabajo del estudiante mismo y no de la memorización de un conjunto de recetas dadas por el docente.

Para hacer una reparación en las cañerías de su casa, Miguel tuvo que retirar varias piezas de parquet del piso y colocar una tapa de metal, tal como se presenta a continuación.



Tomando en cuenta que cada pieza de parquet tiene una longitud de 32 cm:

- ¿cuál es el largo de la tapa?
- ¿cuál es el ancho? ¿cómo lo podríamos representar?
- ¿cuál será la longitud de todo el contorno de la tapa? (perímetro)
- ¿cuál será el área de la tapa?

En resumen, se propone una revisión del orden en que tradicionalmente se presentan los primeros contenidos del álgebra, pues muchas veces se desarrollan de manera mecánica y operativa, fuera del contexto de situaciones significativas. Se sugiere, por ello, que estos contenidos sean trabajados, desde el inicio, mediante situaciones problemáticas que demanden representar, modelar y resolver, y no como la aplicación de procedimientos desconectados. Asimismo, es conveniente utilizar materiales concretos y no centrar el aprendizaje en el trabajo operativo.

5.3. Pensamiento geométrico

Los estudiantes de tercero de secundaria presentan dificultades para resolver situaciones problemáticas rutinarias que demandan aplicar directamente un algoritmo o noción geométrica básica (como área o perímetro de figuras elementales), identificar partes en figuras compuestas y aplicar la noción de proporcionalidad geométrica.

Esto evidencia que los estudiantes aún perciben las figuras geométricas a partir de su apariencia como un todo. En otras palabras, solo son capaces de apreciar de manera global las características visibles de las figuras y los objetos geométricos. Se ha detectado que los estudiantes tienen dificultades incluso para identificar las figuras geométricas básicas y sus elementos a partir de sus gráficos. Asimismo, presentan limitaciones para identificar o graficar figuras geométricas elementales a partir de sus características y propiedades configurativas. Por otro lado, no pueden aplicar adecuadamente los algoritmos elementales para el cálculo del área y del perímetro de las figuras básicas, y presentan dificultades al manejar la simbología elemental para identificar o describir figuras geométricas.

Los bajos resultados obtenidos por los estudiantes en las preguntas referidas a este eje nos llevan a buscar las causas que puedan explicar esta situación. Así, una de las posibles causas es la didáctica empleada para trabajar la geometría. Al parecer, no se está apuntando al desarrollo de las capacidades de los estudiantes, sino a la transmisión de información, como nombres de figuras u objetos y enunciados verbales que definen propiedades cuyo significado no es comprendido. Este trabajo es infructuoso porque no permite que los estudiantes relacionen progresivamente la imagen conceptual de cada uno de los conceptos geométricos. Se puede afirmar que, en su mayoría, dichos conceptos se encuentran en un nivel inicial de conceptualización de objetos geométricos, también llamado nivel de visualización o reconocimiento, por lo que los estudiantes no son aún capaces de identificar las partes constitutivas y los atributos de los objetos geométricos. Esto limita la posibilidad de clasificar los objetos y la capacidad para comprender, identificar o establecer propiedades.

Se ha observado que los docentes desarrollan en menor tiempo y con menor profundidad las capacidades referidas a geometría.[30] Si consideramos que las experiencias de aprendizaje no se circunscriben únicamente al último grado que se está cursando, sino que son la acumulación integradora de las experiencias a lo largo de toda la escolaridad, el que no se trabaje la geometría con el tiempo y la profundidad requeridas desde los grados anteriores puede ser una de las causas que influye negativamente en el aprendizaje de los estudiantes en este eje. Además, este bajo rendimiento se ve agravado si la meta del trabajo en aula está centrada en la mera asociación de formas y sus nombres, o en la memorización de propiedades o fórmulas, y no en el desarrollo del pensamiento geométrico; es decir, la matemática se sigue abordando con un enfoque prescriptivo o de recetas, y no se busca que los estudiantes construyan sus nociones geométricas fundamentales.

La didáctica para el desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes es muy compleja: no solo la práctica docente en aula lo confirma, sino que muchos de los estudios efectuados al respecto coinciden en señalar la necesidad de trabajar con los estudiantes las nociones geométricas de una manera y en una secuencia particulares. Por

30. Esto puede ser observado en las respuestas de los docentes de los estudiantes evaluados en sexto grado de primaria y quinto grado de secundaria al cuestionario *Oportunidades de aprendizaje* (ODA).

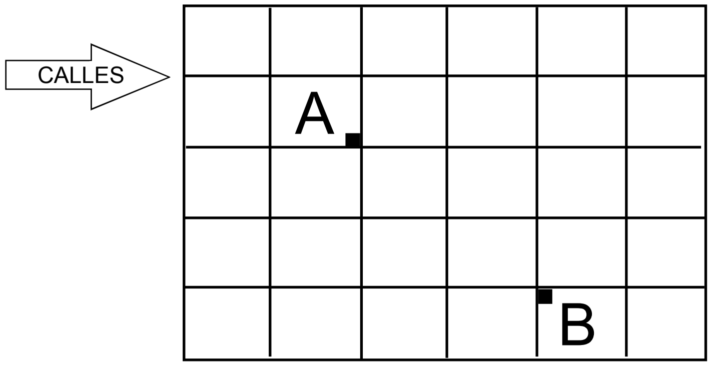
esto, en la búsqueda de alternativas que nos ayuden a revertir las limitaciones identificadas en los estudiantes, se proponen las siguientes sugerencias para organizar las sesiones de aprendizaje. Sin embargo, se debe tener primero claridad sobre cuál es la meta o a dónde apunta la educación matemática en este eje y qué caminos se puede seguir.

Es importante tener en cuenta, en primer lugar, que la base del conocimiento geométrico se encuentra en los conceptos relacionados con los objetos geométricos y en sus relaciones. En otras palabras, se puede decir que el desarrollo de las nociones geométricas en los estudiantes constituye la clave para que estos puedan aprender y dominar la geometría, y no el acopio de terminología, nombres y enunciados de propiedades o la ejercitación automatizadora. Para poder desarrollar estas nociones, se deben respetar los diferentes niveles de desarrollo del pensamiento geométrico de los estudiantes que, en líneas generales, van de lo global a lo analítico y de lo concreto a lo abstracto.

Una primera sugerencia para el trabajo de este eje es dejar de «algebraizar» la geometría, dejar de lado el énfasis en los cálculos operativos y en los resultados meramente numéricos centrados en la medición. En contraposición, hay que redireccionarla a su cauce original, e incidir más en el desarrollo de las nociones geométricas y en el establecimiento de las relaciones entre estas; en la visualización de elementos, propiedades, simetrías, etc.; en la representación gráfica de situaciones y figuras, para atender a sus propiedades más observables; en el trabajo con lápiz, escuadras y compás; en la justificación lógica de afirmaciones, que no tienen que pasar directamente al nivel de demostraciones formales, pues se debe respetar el nivel de evolución del pensamiento de los estudiantes según su edad.

A continuación se muestra una situación que busca hacer reflexionar al estudiante respecto de una noción fundamental de la geometría: la distancia.

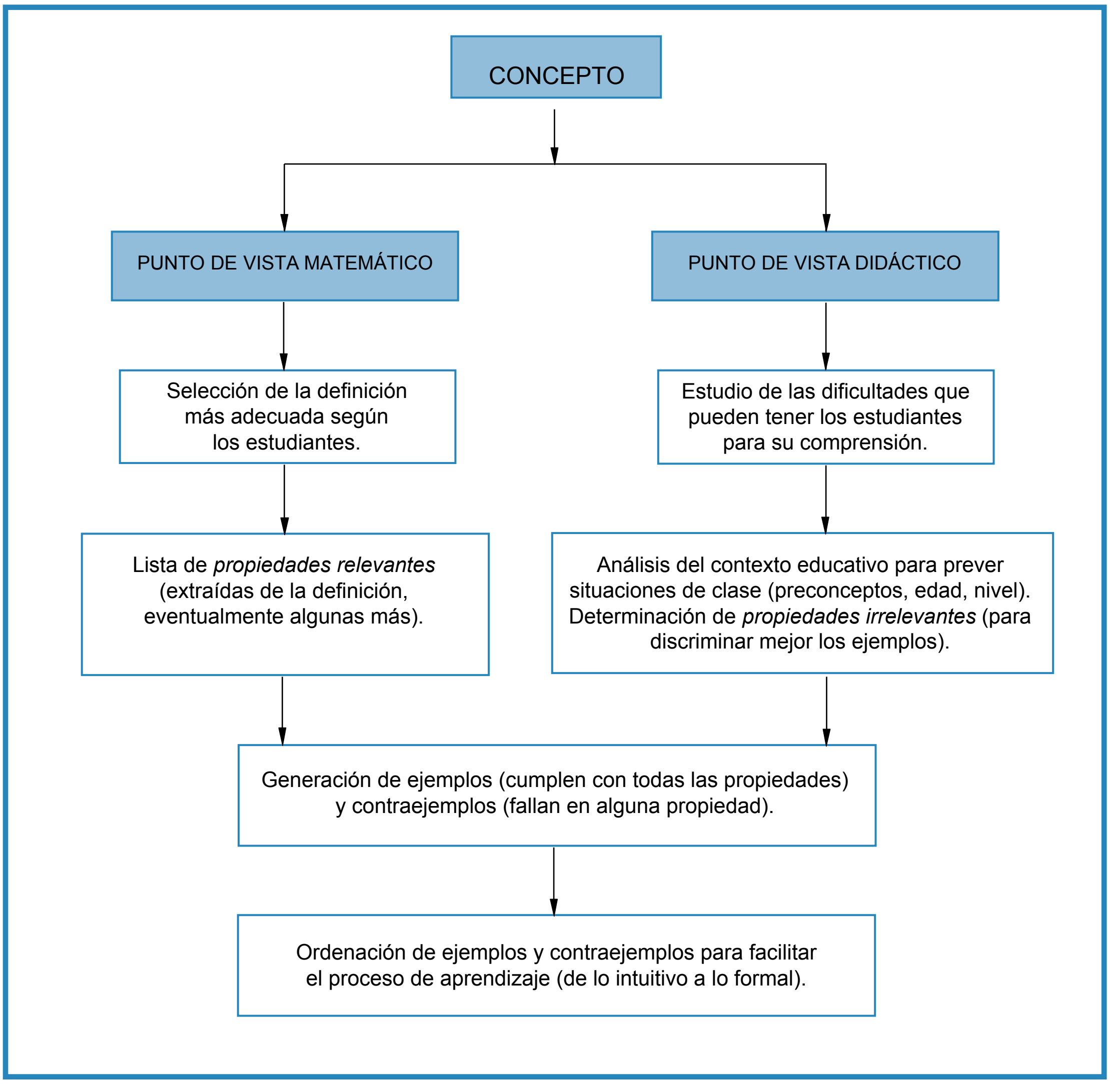
El barrio de San Andrés es como un tablero de ajedrez, las calles son rectas y las cuadras son de la misma longitud. Marco vive en la esquina marcada con el punto «A» y su amigo Lucho vive en la esquina marcada con el punto «B». Tal como se muestra en el siguiente plano:



1. ¿Cuál podría ser la ruta para que Marco vaya a la casa de Lucho de la manera más corta (yendo por las calles)?
2. ¿Cuál será la longitud del camino más corto entre ambas casas (yendo por las calles)?
3. ¿Cuántos caminos cortos (de la menor longitud posible) existen para ir de «A» a «B»?

Asimismo, para trabajar la geometría en el aula, se deben utilizar situaciones problemáticas significativas y, siempre que sea posible, emplear apoyos tales como materiales concretos y gráficos, pues el desarrollo de las nociones geométricas de los estudiantes —que, como ya se señaló, debe ser el eje de este trabajo— se va logrando a partir de las experiencias que estos tienen. Estas experiencias deben estar orientadas a tratar de elaborar modelos, objetos o figuras de la situación problemática; a graficar o representar; a experimentar las propiedades en la búsqueda de ejemplos y contraejemplos para comprobar conjeturas; a organizar y clasificar los resultados para elaborar conclusiones; y a fundamentar o justificar (verbalmente o por escrito) el proceso que se debe seguir y los resultados obtenidos. Todo esto irá ayudando a los estudiantes a construir nociones geométricas cada vez más precisas y profundas.

Se presenta, a continuación, un diagrama que puede ayudar al docente a elaborar actividades que estén dirigidas a la construcción de las nociones geométricas. En este diagrama se puede ver la importancia de analizar cada uno de los conceptos matemáticos, desde los ojos de la didáctica y de la matemática misma, para seleccionar adecuadamente los ejemplos y contraejemplos más apropiados para que los estudiantes construyan y precisen sus nociones geométricas.



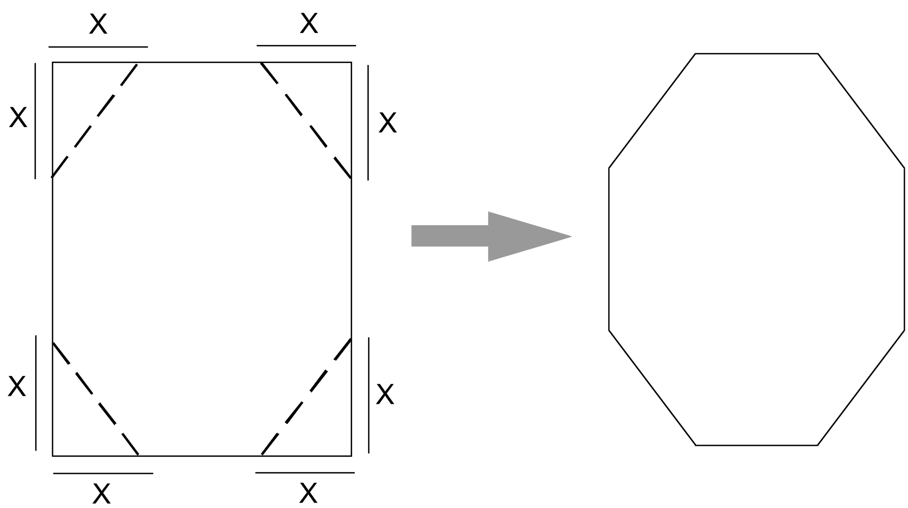
Fuente: Samper de Caicedo y otros 2002.

Por otro lado, cabe señalar que la enseñanza de la geometría demanda una dedicación de tiempo especial durante el desarrollo del año escolar. Esto debe impulsar a integrar los contenidos con el fin de trabajar la geometría con mayor presencia en las clases, estableciendo siempre las conexiones matemáticas que permitan enfrentar a los estudiantes a situaciones más complejas y ricas. Es decir, se debe utilizar situaciones que permitan relacionar la geometría con otros aspectos de la matemática, tales como el número, el cambio y el pensamiento variacional, situaciones que integran la geometría, la aritmética, el álgebra y la estadística. Por ejemplo, en la visualización geométrica de los productos notables, se puede trabajar la suma o diferencia del binomio al cuadrado y al cubo, el producto de una suma por su diferencia, etc. Además, es importante recordar que estos contenidos se hacen más accesibles a los estudiantes si se trabajan en el contexto de situaciones problemáticas concretas y particulares, y no simplemente como una aplicación particular de la demostración general.

La medida es una noción esencial en este eje y también se puede trabajar integrando los contenidos. Así, se pueden presentar situaciones que demanden comparar el perímetro, el área y el volumen de las figuras y sólidos geométricos. Este trabajo deberá hacerse mediante situaciones cercanas a los estudiantes y en las que se podrá profundizar en dichas nociones mientras se trabajan otros temas, como la representación algebraica de cantidades, la modelación mediante funciones, el cálculo de valores puntuales de funciones, el llenado de cuadros de doble entrada, la búsqueda —mediante tabulación— de máximos y mínimos de las funciones modeladas, etc.

Con esta hoja rectangular de 20 cm de largo y 10 cm de ancho, se quiere formar la figura mostrada recortando triángulos iguales en cada esquina.

- ¿Cuál será el área de la figura?
- ¿Qué valores puede tomar «x»?
- ¿Qué ocurre con el área de la figura conforme el valor de «x» aumenta?
- ¿Qué nombres podría recibir la figura, según los distintos valores de «x»?
- ¿Cuál es el área mínima de la figura? ¿Y la máxima?
- ¿Cuándo se dan estas áreas?
- ¿Cuál será el perímetro de la figura?
- ¿En algún momento la figura podría tener todos sus lados de la misma longitud?
- ¿En algún momento la figura podría tener seis de sus lados de la misma longitud?



La integración de contenidos debería emplearse no solo en lo referido a geometría, sino en todos los contenidos matemáticos y en todos los grados. Esto evitará dejar de lado algunos aspectos del currículo de matemática que no se trabajan debido a las limitaciones que siempre impone el tiempo a la práctica en el aula.

5.4. Gestión de la información

Se ha identificado que los estudiantes presentan dificultades para resolver situaciones problemáticas sencillas que demandan interpretar, deducir y calcular información presentada mediante tablas y diagramas estadísticos elementales. Tales dificultades nos muestran que los estudiantes no pueden utilizar efectivamente la estadística para enfrentar adecuadamente situaciones que se les presentan dentro o fuera de la escuela; es decir, este aspecto curricular no ha logrado ser incorporado como una herramienta funcional.

Los estudiantes presentan limitaciones para realizar tareas tan elementales como interpretar o elaborar diagramas de barras y cuadros de doble entrada. Las posibles causas de estas limitaciones son varias; a continuación, se precisan las principales.

Al parecer, en lo que se refiere a este eje, el trabajo en clase también se centra en la transmisión de información y en el aprendizaje de procedimientos y no en el desarrollo de capacidades. Es decir, se pone énfasis en el aprendizaje de algoritmos, como el cálculo de la media aritmética, más que en el desarrollo de las nociones estadísticas y su significado. Esto último potenciaría la transferencia de lo aprendido. Además, la presentación de los nuevos conceptos estadísticos suele ser abstracta y formal, y está desconectada de la experiencia y cotidianeidad de los estudiantes, lo que limita la significatividad de los aprendizajes, aporta al rápido olvido de lo supuestamente aprendido y disminuye la motivación, tan ligada al aprendizaje en este eje.

Debe señalarse que hay nociones matemáticas elementales que son prerrequisito para el adecuado trabajo de la gestión de la información. Una de estas nociones es el número racional, que el estudiante debe manejar en sus diferentes formas de representación: expresado como fracción, decimal o porcentaje. También es necesario haber incorporado las nociones básicas del pensamiento proporcional. Sin las nociones de número racional y el pensamiento proporcional no es posible interpretar plenamente, por ejemplo, cuadros de doble entrada, diagramas, escalas y medidas de tendencia central, ya sea gráfica o numéricamente.

Como sugerencia general para el trabajo de la gestión de datos, se propone utilizar información cercana a los intereses y necesidades de los estudiantes y, de preferencia, recogida por ellos mismos. El grupo de estudiantes del salón de clase debería ser la primera fuente de información estadística para recoger, analizar y representar. Por ejemplo, se puede investigar sobre variables cuantitativas y cualitativas usuales, como edad, peso, talla, número de hermanos, talla de zapatos, distrito de residencia, medio de transporte habitual para asistir a la escuela, etc. Se puede realizar encuestas de opinión sobre preferencias personales, tales como el tipo de música o grupo musical favorito, refrescos preferidos, deporte o equipo de fútbol, alimentos preferidos, programas de televisión o juegos favoritos, etc. Además, es posible trabajar contenidos bastante más interesantes tanto para el docente —como insumo para su labor formativa con sus estudiantes— como para los estudiantes, tales como las opiniones o actitudes frente a temas problemáticos que muchos de ellos empiezan a enfrentar a esta edad. Se sugieren algunos temas, que deben ser seleccionados de preferencia en coordinación con el equipo de docentes de la IE: la presión de grupo, la discriminación, el cigarro, el alcohol, la sexualidad, la amistad, relaciones con los padres o hermanos, cursos más fáciles o difíciles, el futuro, vocaciones profesionales, distribución del tiempo, entre otros.

A continuación, se muestra un ejemplo:

La televisión y el tiempo de los escolares

Variable a investigar

Tipo de variable

Pregunta

Población objetivo

Características de la población

Instrumento

Forma de aplicación

Análisis de los resultados

Presentación de los resultados

Conclusiones

Sugerencias

Grado: .... Sección:............................

Sexo: mujer.................. varón ....

Cuántas horas al día ves televisión de lunes a viernes aproximadamente: Horas: .... Min.: ....

Enumera tus cinco programas favoritos:

Nombre	Canal

¡Muchas gracias!

A partir de un esquema de trabajo proporcionado por el docente, los estudiantes pueden desarrollar una pequeña investigación, que incluya la elaboración del instrumento (que aparece arriba) para recoger la información del tema que eligieron.

El trabajo deberá iniciarse por el desarrollo de las principales nociones estadísticas, pues algunas investigaciones han confirmado que aprender procedimientos algorítmicos antes de comprender las nociones no solo no aporta a dicha compresión, sino que puede llegar a bloquearla. Este hecho se evidencia cuando los estudiantes son «capaces» de resolver los problemas típicos aplicando los procedimientos, pero no pueden justificar las razones o el significado de lo realizado y, menos aún, resolver problemas no rutinarios.

Se presenta, a continuación, una situación problemática para trabajar el significado de las medidas centrales, por encima de la mera ejercitación de los algoritmos para obtenerlas.

En una tienda trabajan cuatro vendedores y el gerente. Los sueldos de los cinco son: S/. 500, S/. 500, S/. 500, S/. 500 y S/. 4 000, respectivamente.

Haz un diagrama de barras para ilustrar los sueldos. ¿Qué notas?

Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de los sueldos. ¿Qué notas?

¿Cuál o cuáles de las tres medidas halladas refleja mejor los sueldos de la tienda? ¿Por qué?

¿Crees que se debería utilizar otra manera de expresar esta situación? ¿Qué se debería indicar?

Esta situación pretende introducir la necesidad de la existencia de las medidas de dispersión para expresar la distancia entre los datos, de manera que complementen la información que brindan las medidas de tendencia central.

Asimismo, es necesario remarcar que, debido a sus múltiples aplicaciones, la estadística está potencialmente presente en casi todos los temas en la actualidad: en los libros, en los periódicos, en la televisión, en la radio, etc. Es por ello que se considera a la estadística como una parte de la alfabetización matemática que cualquier ciudadano del mundo debería conocer. El estudiante debe ser capaz de otorgarle sentido a esta información, evaluar su pertinencia y realizar inferencias, más que manejar de manera mecánica los procedimientos de cálculo.

Se sugiere también integrar los contenidos, pues dicho trabajo nos llevará a proponer a los estudiantes tareas más demandantes en el nivel cognitivo, tales como los llamados problemas globalizadores. Estos, cuando son adecuadamente trabajados, posibilitan, por un lado, establecer las conexiones matemáticas necesarias para poder así profundizar sus nociones y reorganizarlas de una manera más integrada, y, por otro, revisar y trabajar los prerrequisitos de la estadística.

5.5. Algunas sugerencias generales para el área

Ante las dificultades encontradas en los estudiantes, se presentan las siguientes sugerencias generales, que se considera tienen validez para toda el área.

En primer lugar, se debe centrar el trabajo pedagógico en el desarrollo de las capacidades matemáticas, por sobre la transmisión de contenidos. Asimismo, se debe utilizar una metodología centrada en la actividad intelectual del estudiante. Se debe apuntar a que el estudiante aprenda activamente mediante situaciones de alta demanda cognitiva y dejar de lado las actividades repetitivas de baja demanda cognitiva.

Con referencia al aspecto metodológico, se sugiere trabajar presentando situaciones que les permitan a los estudiantes familiarizarse con las nuevas nociones matemáticas y con la identificación de su sentido, simultáneamente. Es decir, el estudiante debe conocer dónde se presentan estas nociones y qué relación tienen con el medio en el que vive. Estas actividades deberán estar constituidas por situaciones caracterizadas por admitir variadas interpretaciones, ser complejas y propicias para la reflexión de los estudiantes. El docente no debe presentar a los estudiantes únicamente problemas tipo, unívocos y de respuesta convergente (que tienen una sola interpretación y repuesta), sino que deberá ser el grupo de estudiantes del salón quien los limite, precise o defina, lo que implica que han comprendido y se han apropiado de la situación.

Asimismo, se propone trabajar con los mencionados problemas globalizadores que permiten a los estudiantes establecer conexiones entre los diferentes contenidos y nociones matemáticos trabajados y superar las limitaciones de compartimentalización que presentan los problemas típicos de los libros de texto, cuyo formato estándar es unívoco y bien definido, y que responden más a la lógica de la ejercitación para entrenar un procedimiento específico, que a la presentación de nuevos contextos para transferir y generalizar aprendizajes.

6 ¿Cómo usar las preguntas mostradas en este informe?

En esta sección se presentan algunas de las posibilidades de uso de las preguntas mostradas en este informe. No se pretende detallar todas estas posibilidades, sino señalar algunas que se consideran importantes y podrían ser útiles para el trabajo en el aula.

Tal como se ha explicado a lo largo de este informe, la EN 2004 evalúa la eficacia del sistema educativo peruano con el propósito de recoger y difundir información relevante para propiciar la reflexión sobre el funcionamiento de dicho sistema y, específicamente, para aportar a la toma de decisiones que ayuden a mejorar los niveles de aprendizaje de los estudiantes. Para ello, se desarrolló un marco de evaluación del área de Matemática que refleja el espíritu de las actuales propuestas curriculares del Ministerio de Educación. A partir de ese marco se elaboraron las pruebas con preguntas que responden a esta concepción del área y que buscan recoger información de las principales capacidades matemáticas de los estudiantes.

Algunas de las preguntas de la prueba de tercero de secundaria se presentan en este documento en el capítulo 4 de la Parte II. Las preguntas comentadas en ese capítulo pueden dar luces acerca de lo que los estudiantes conocen, sus esquemas de razonamiento, sus patrones de error y sus creencias acerca de la matemática. Además, el análisis de las respuestas de los estudiantes a estas preguntas nos muestra sus principales dificultades en el aprendizaje de la matemática.

Las preguntas que aparecen en este informe no deben utilizarse para elaborar pruebas que intenten reproducir el trabajo realizado por la UMC, pues la evaluación elaborada desde esta unidad, al ser una evaluación de sistema, tiene objetivos y características particulares que la hacen diferente a la evaluación que usted busca realizar en el aula. Por esta razón, se propone que los ejemplos de preguntas presentados y comentados en secciones anteriores sean utilizados para ayudarlo en su práctica pedagógica de una manera más amplia. Entre otros usos, usted puede utilizar estas preguntas para la evaluación diagnóstica (o de entrada) del desempeño de sus estudiantes en una determinada capacidad o para explorar su nivel de desarrollo en una determinada noción matemática. Asimismo, sobre la base del modelo de evaluación propuesto, usted puede elaborar preguntas similares para complementar la información que desea recoger de sus estudiantes, o para diseñar actividades de aprendizaje que incorporen estas preguntas al quehacer cotidiano del aula.

A continuación, se ofrecen algunas sugerencias para utilizar de manera adecuada la información presentada. Para hacerlo de manera más provechosa, se sugiere que el docente realice previamente los siguientes pasos:

1) Estudiar el marco de evaluación del área.
2) Interpretar el significado de la escala de dificultad de las preguntas.
3) Comprender los niveles de desempeño.
4) Analizar las dificultades encontradas en los estudiantes (Parte II, cap. 5).

1. Estudio del marco de trabajo de la evaluación del área

Se propone que el docente (o el equipo docente, según el caso) lea e identifique las ideas principales del marco de evaluación del área que orientaron la elaboración de las pruebas. Luego de la lectura, usted debería poder contestar algunas preguntas tales como:

- ¿En qué consiste el enfoque centrado en la resolución de problemas?
- ¿Por qué se sostiene que la resolución de problemas es el centro de la actividad matemática?
- ¿Qué se evaluó en la EN 2004?
- ¿Qué capacidades matemáticas se han seleccionado para esta evaluación?
- ¿Cuál es la relación entre las capacidades curriculares y lo evaluado?
- ¿Qué diferencias existen entre los contenidos curriculares y las capacidades propuestas en la EN 2004?
- ¿Cuál es el papel que desempeñan los contextos en el modelo de evaluación?

Es importante establecer relaciones entre el marco de evaluación del área y la forma de construcción de las preguntas. Para ello, usted debe comprender por qué cada pregunta mostrada evalúa una determinada capacidad, contenido y contexto. Asimismo, usted debería analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver cada una de dichas preguntas y qué habilidades se encuentran involucradas al responderlas, profundizando lo comentado en el capítulo 4 de la Parte II.

2. Interpretación del significado de la escala de dificultad de las preguntas

Luego de la aplicación de la prueba, el análisis estadístico determinó un índice de dificultad para cada pregunta. Así, las preguntas fueron ordenadas en una escala creciente con respecto de la dificultad que tuvieron los estudiantes para responderlas, es decir, se ordenaron las preguntas desde la más fácil hasta la más difícil. En el diagrama que se muestra en la página siguiente, se presenta la ubicación en la escala de cada una de las preguntas que aparecen en el informe. Se puede observar, en la parte inferior de la escala, las preguntas con menor dificultad y, en la parte superior, las de mayor dificultad.

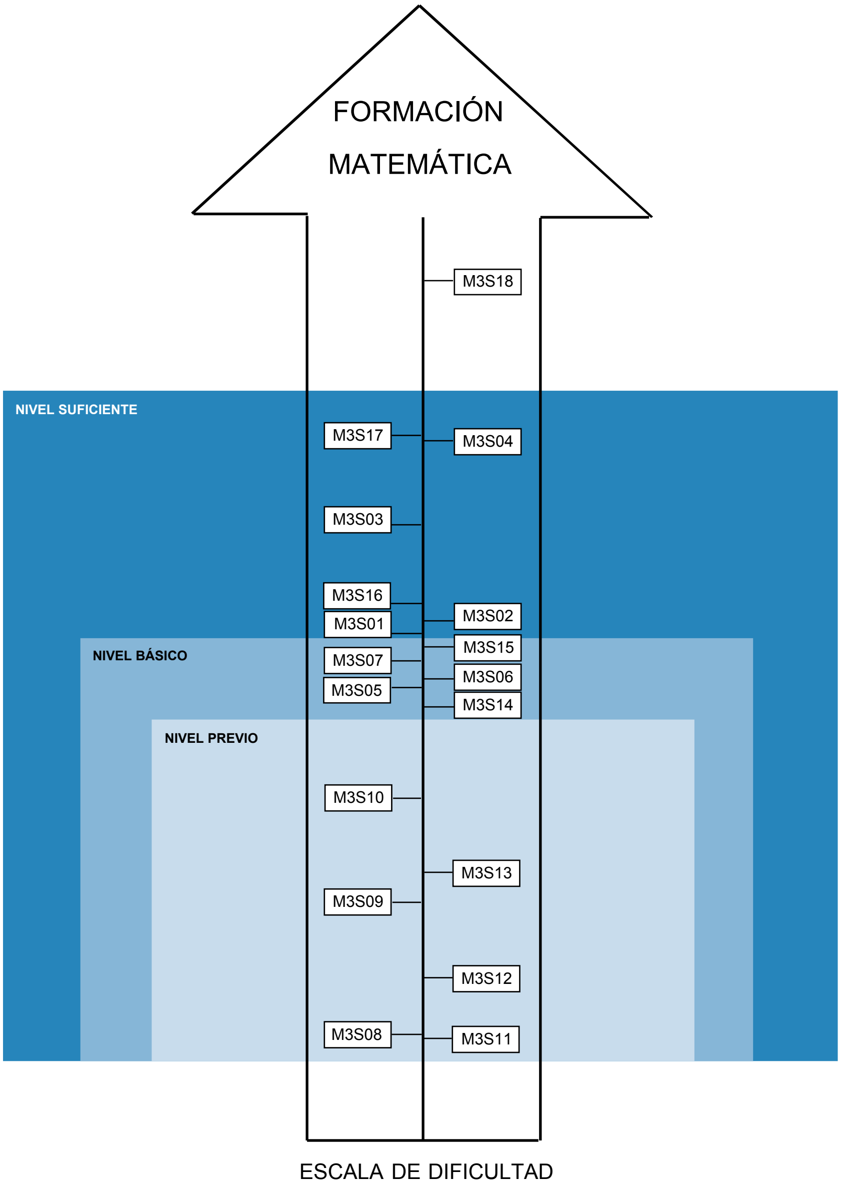
Es importante que usted analice dichas preguntas, trate de establecer por qué se ubican en ese lugar de la escala, por qué existen diferencias en los puntajes entre las preguntas y cuáles son los posibles criterios que otorgan dificultad a las diversas nociones matemáticas contenidas en cada una de estas.

3. Comprensión de los niveles de desempeño

Como se puede apreciar en el diagrama, las preguntas están distribuidas de acuerdo con el nivel de desempeño al que pertenecen: suficiente, básico, previo.

No debe olvidarse que los estudiantes que se encuentran en determinado nivel no solo demuestran poseer el conocimiento y las habilidades que les permiten responder las preguntas de dicho nivel, sino también son capaces de resolver las preguntas asociadas con los niveles inferiores.

Ubicación de las preguntas de tercer grado de secundaria
mostradas en este informe



Usted debería leer, en el capítulo 2 de la Parte I, la definición general de estos niveles y, luego, en el capítulo 2 de la Parte II, la descripción de dichos niveles para tercer grado de secundaria. A partir de esta descripción debería identificar, en el capítulo 4 de la Parte II, aquellas preguntas correspondientes a cada nivel de desempeño y hacer un análisis crítico referido a en qué medida la pregunta comentada refleja realmente las habilidades descritas.

4. Analizar las dificultades encontradas en los estudiantes

El capítulo 5 contiene una detallada descripción de las limitaciones y problemas que muestran los estudiantes en las capacidades evaluadas. Será útil tener en cuenta esta información para reforzar aquellas nociones en las que sus estudiantes tienen más dificultades. Las sugerencias que ofrece ese capítulo presentan algunas alternativas de solución;

sin embargo, usted debe adecuarlas y complementarlas de acuerdo con la realidad particular de sus estudiantes.

A continuaciión, se presentan algunos comentarios sobre el diagrama de ubicación de las preguntas. Se puede apreciar claramente la relación de orden respecto de la dificultad. Algunos ejemplos pueden aclarar esta idea:

- La pregunta M3S12 pertenece al nivel previo y es de menor dificultad que la M3S06 que pertenece al nivel básico.
- La pregunta M3S06 pertenece al nivel básico y es de menor dificultad que la M3S15 que pertenece al mismo nivel.

Si un estudiante ha demostrado la habilidad necesaria para enfrentarse con éxito a la pregunta M5S08 (ubicada en el nivel previo), tendrá entonces una mayor probabilidad de responder correctamente preguntas ubicadas por debajo de esta en la escala de preguntas. Tal como se señala líneas arriba, para responder correctamente las preguntas ubicadas en la parte inferior de la escala se demanda un menor desarrollo de las habilidades que el necesario para responder las preguntas ubicadas en la parte superior. En ese sentido, lo que la escala muestra es cómo las distintas preguntas demandan de los estudiantes habilidades o estrategias implicadas en la resolución de las preguntas que evalúan la formación matemática. Dichas habilidades y estrategias permiten ir construyendo un conocimiento que se va complejizando paulatinamente.

Luego de este análisis introductorio al modelo de evaluación del área, el docente puede utilizar las preguntas mostradas de diversas formas, entre las que se puede mencionar el diagnóstico de sus estudiantes y las actividades en el aula.

Diagnóstico de sus estudiantes

Las preguntas pueden utilizarse en forma individual para explorar el estado de las nociones matemáticas de sus estudiantes. Para ello puede usted seleccionar una pregunta referida a un concepto matemático. En el capítulo 4 de la Parte II se muestran ejemplos de preguntas que cuentan con una descripción sobre algunos aspectos de estas:

- A qué capacidad se refiere.
- Qué habilidades y contenidos relacionados se ponen en juego.
- Qué caminos puede utilizar el estudiante al responderla.

Proponga esta pregunta a sus estudiantes, analice sus respuestas y podrá tener una idea del grado de desarrollo de dicha noción en ellos. Debe tomar en cuenta que, si la mayoría de sus estudiantes ha respondido adecuadamente la pregunta, entonces estarán en capacidad de responder las preguntas asociadas con esta noción que se ubiquen en niveles relativos inferiores de la escala de dificultad. Esto le indicará en qué medida sus estudiantes han incorporado dicha noción matemática. A partir de lo anterior, usted podrá proponer actividades para que sus estudiantes sigan desarrollando las nociones referidas.

Si, en cambio, la pregunta es respondida por pocos estudiantes, entonces utilice una pregunta de menor nivel y, si esta última es respondida por la mayoría, proceda como en el párrafo anterior. Sin embargo, es recomendable hacer un análisis de los procedimientos y estrategias utilizados por sus estudiantes para identificar sus errores y cuán lejano está su desempeño al requerido por la pregunta aplicada.

Actividades de aula

Se debe recordar que la labor docente en las clases de matemática debe estar centrada en desarrollar las capacidades matemáticas de los estudiantes y que las actividades que se realicen en las clases deben caracterizarse por generar en ellos una alta demanda cognitiva. Dichas actividades deben demandar al estudiante explicar, justificar, inferir, tomar decisiones, modelar, resolver problemas, entre otras capacidades. En este sentido, las preguntas de la prueba pueden utilizarse de distintas maneras. Estas son algunas de ellas.

Como elementos problematizadores para una sesión de aprendizaje

Por ejemplo:

- Seleccione una pregunta de la escala de dificultad y aplíquela a sus estudiantes.
- Recoja las respuestas, revíselas y agrúpelas en términos de sus estrategias, procedimientos y resultados.
- En plenaria, trabaje con ellos su solución, explorando los métodos utilizados, los razonamientos novedosos y analizando los errores que se han producido al resolverla.
- Aliente a sus estudiantes a explicar sus procesos de solución y a defender sus puntos de vista.

Para elaborar actividades de aprendizaje

Es posible utilizar las preguntas de un determinado nivel o un grupo de ellas, que esté referido a un concepto o capacidad, para diseñar las clases de matemática y plantear actividades de aprendizaje cooperativo (de trabajo en grupo organizado). Para ello, deberá convertir la pregunta en una actividad didáctica. Se sugiere este camino:

- Elija una pregunta que será el centro de una ficha de trabajo.
- Formule preguntas introductorias a la elegida para explorar los conocimientos previos de los estudiantes y para facilitar la comprensión de la situación problemática.
- Formule otras preguntas que profundicen lo que se va a trabajar.
- Elabore preguntas que sirvan como instrumento de evaluación referido a lo trabajado en la pregunta seleccionada.
- Propóngasela a sus estudiantes en una sesión de trabajo activo. En esta sesión, le recomendamos alternar momentos de trabajo individual con momentos de trabajo en grupos.

Para generar nuevas situaciones problemáticas a partir de las preguntas

Se puede presentar a los estudiantes una pregunta de la escala de dificultad y trabajar en plenaria su solución. El docente solo debe actuar como facilitador, planteando preguntas orientadoras o desencadenantes y no dando respuestas. Como esquema que organice la secuencia de trabajo, se pueden utilizar las fases de resolución de problemas propuestas por George Polya en 1945, presentadas en la página 22 de este informe.

Al resolver problemas, el docente debe poner el mayor énfasis en la visión retrospectiva del estudiante sobre su proceso de resolución, pues lo ayuda a evaluar el significado de sus acciones y su utilidad para otras situaciones problemáticas, es decir, aporta al meta-aprendizaje. En esta fase, debe promover en los estudiantes la actitud de explorar más allá de la respuesta hallada y el hábito de reflexionar sobre lo realizado, identificar los bloqueos mentales que ocurrieron, las estrategias que permitieron salir de dichos bloqueos, el método utilizado, las heurísticas que afloraron en la fase inicial, etc. También se debe promover que los estudiantes modifiquen las preguntas, cambien los datos, modifiquen su estructura y planteen nuevos problemas relacionados. El docente, en el papel de facilitador, debe estimular en los estudiantes la necesidad de hacer generalizaciones, reflexionar sobre los métodos utilizados, hacer extensiones, etc.

PARTE III

QUINTO GRADO DE SECUNDARIA

1 Importancia y alcances de la evaluación

La EN 2004 evalúa quinto grado de secundaria debido a que este grado representa el final de la Educación Básica Escolar. Durante esta etapa, los estudiantes consolidan su preparación académica básica y perfilan su proyecto de vida al tomar decisiones respecto de su futuro, ya sea para acceder a niveles superiores de estudio o insertarse en el mundo laboral. Al finalizar este grado, deberían haber desarrollado actitudes y capacidades que les permitieran pensar y seguir aprendiendo de manera autónoma en cualquiera de las opciones por las que opten.

Debe considerarse que en la sociedad actual la matemática desempeña un papel importante en campos tan diversos como la ciencia y la tecnología, en las esferas social, profesional, familiar y personal. Por esta razón, los jóvenes requieren contar con capacidades y conocimientos matemáticos adecuadamente desarrollados que les permitan responder a las demandas y expectativas que se les plantean, y que les sirvan de base para seguir desarrollando nuevas capacidades e incorporando nuevos conocimientos con el fin de responder a los requerimientos de una sociedad en continua evolución. En este sentido, el cálculo mental, el realizar estimaciones, la capacidad de reflexión, el comunicarse con un lenguaje claro y riguroso, el comprender y organizar información diversa, la flexibilidad de pensamiento, el razonar más allá de una situación concreta, el inferir, interpretar, analizar, explicar, argumentar, generalizar y formalizar son capacidades importantes, pues son herramientas que permiten usar la matemática para solucionar los problemas que se presentan en diferentes ámbitos.

Como ciudadanos, el medio nos demanda ser personas críticas, capaces de interpretar las diversas informaciones —a veces contradictorias, confusas y parciales— que recibimos. Frente a esta situación, debemos poder tomar una posición, elaborar opiniones fundamentadas y coherentes, ser capaces de exponerlas ordenadamente, sustentarlas y rebatir otras posiciones. Debemos también poder analizar las situaciones a las que nos enfrentamos, hacer inferencias y tomar decisiones siendo conscientes de los riesgos de las alternativas por las que optamos. En lo laboral, se requiere personas capaces de poner en práctica sus conocimientos y hacer uso constante de sus destrezas matemáticas de manera eficiente y eficaz para poder solucionar problemas en forma óptima. En el ámbito personal, la matemática también puede ser satisfactoria, estimulante y beneficiosa. Por ejemplo, cualquier persona, incluso para realizar labores domésticas, requiere del uso de habilidades matemáticas para organizar las tareas, efectuar cálculos, estimaciones, mediciones, etc.

Por otro lado, es necesario señalar que este tipo de evaluación estandarizada de papel y lápiz posee alcances limitados. Se debe tener en cuenta que no es posible evaluar la totalidad de las capacidades y contenidos planteados en el currículo. Por este motivo, se seleccionaron aquellas capacidades y contenidos comunes en los DCB vigentes en el momento de elaborar la prueba. Se puede afirmar que las capacidades evaluadas se consideran las más elementales pero que, simultáneamente, por su importancia y relevancia, deberían formar parte de cualquier propuesta curricular. Además, si bien estas capacidades se consideran necesarias para los estudiantes de quinto de secundaria, se incluyen también todas aquellas capacidades fundamentales desarrolladas a lo largo de la escolaridad desde el nivel primario, y no solo las exclusivas del grado. En consecuencia, se han considerado tareas en las que el estudiante debe utilizar habilidades y contenidos matemáticos de grados anteriores; por ejemplo, planteamiento y desarrollo de ecuaciones, cálculo de porcentajes simples, nociones de proporcionalidad, etc.

Respecto de la elaboración de los cuadernillos de la prueba a los que se enfrentaron los estudiantes, se puede señalar que la prueba de matemática de quinto grado de secundaria está constituida por alrededor de 180 preguntas. Este número es inadecuado para que sea resuelto por un solo estudiante, por lo que las preguntas se distribuyeron en 17 cuadernillos mediante el método de las formas rotadas, de manera tal que cada estudiante respondiera solo a uno de los cuadernillos y, no obstante, se pudiera recoger la información necesaria para medir su habilidad en la variable evaluada.

Capacidades evaluadas en la EN 2004
en quinto grado de secundaria

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	• Resuelve situaciones problemáticas referidas a número y cantidad en el conjunto de los números reales. • Resuelve situaciones problemáticas susceptibles de ser abordadas mediante ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grados y algunas funciones elementales lineales, cuadráticas. • Resuelve situaciones problemáticas referidas a triángulos mediante razones trigonométricas. • Resuelve situaciones problemáticas referidas a diagramas estadísticos, frecuencias y medidas de tendencia central.
COMUNICACIÓN MATEMÁTICA	• Representa conjuntos e intervalos de números reales. • Recodifica e interpreta situaciones problemáticas mediante el lenguaje algebraico. Representa puntos, rectas, curvas, funciones y sus elementos. • Representa ángulos y razones trigonométricas asociadas a un triángulo rectángulo. • Interpreta, clasifica y grafica información estadística. • Justifica la probabilidad de ocurrencia de un evento.
APLICACIÓN DE ALGORITMOS	• Calcula operaciones combinadas hasta con tres niveles de agrupación con números reales. • Calcula el conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones de primer y segundo grados en R. • Calcula valores de funciones elementales, ecuaciones de una cónica y sus elementos. Tabula y grafica a partir de la tabla. • Calcula las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo mediante el Teorema de Pitágoras. Calcula longitudes, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos básicos.

Es importante señalar que lo que se reporta en este informe se circunscribe a los aspectos evaluados en la EN 2004 en quinto grado de secundaria y no pretende trascender más allá de lo considerado en esta evaluación.

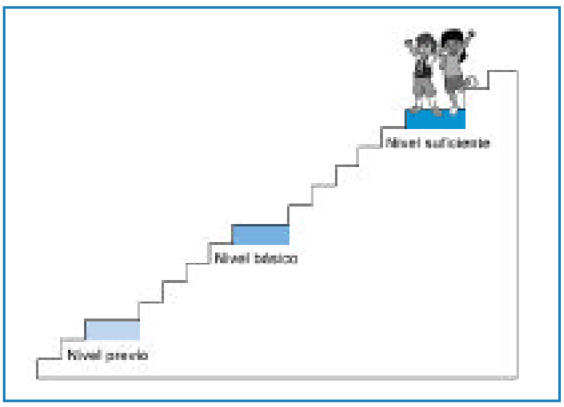
2 ¿Qué pueden hacer los estudiantes en cada nivel de desempeño?

En este capítulo se presenta la descripción de los niveles de desempeño definidos en quinto grado de secundaria para el área de Matemática y una descripción de las tareas que pueden realizar los estudiantes que se encuentran en cada nivel. Además, se incluyen algunos ejemplos ilustrativos de preguntas de cada nivel, luego de los cuales se comentan los principales aspectos de la pregunta (qué evalúa, qué pueden hacer los estudiantes para resolverla) y se ofrecen ejemplos de respuestas de los estudiantes. Se presenta también una ficha técnica en la cual se describe la capacidad que evalúa la pregunta, su contenido matemático, el contexto en el que se sitúa, el formato de la pregunta (opción múltiple, respuesta corta o respuesta extensa), el nivel de desempeño y la dificultad Rasch.[31]

2.1. Lo que hacen los estudiantes que alcanzaron el nivel suficiente

NIVEL SUFICIENTE

Que un estudiante se ubique en este nivel significa que ha desarrollado adecuadamente las capacidades correspondientes al grado evaluado.



Los estudiantes ubicados en el nivel suficiente pueden enfrentar situaciones matemáticas novedosas de diversos tipos, realizar estimaciones adecuadas de longitud y tiempo, interpretar información presentada en diversos diagramas, discriminar la pertinencia de la información que se les presenta y hacer inferencias sencillas que les permiten tomar decisiones adecuadas.

Mediante la adaptación o la construcción de estrategias, estos estudiantes resuelven situaciones problemáticas rutinarias y no rutinarias, en diversos contextos, utilizando notaciones y términos matemáticos convencionales. Los hechos y conceptos son elementos de redes más amplias que les permiten establecer conexiones en distintos niveles y contextos. Estos estudiantes justifican y

31. Es el puntaje que determina la ubicación de la pregunta en la escala de dificultad. En esta escala, en la medida en que aumenta el puntaje, aumenta también la dificultad de la pregunta.

explican sus procedimientos y razonamientos mediante un lenguaje matemático formal acorde con el grado.

Los estudiantes que se ubican en este nivel manejan adecuadamente el conjunto de los números racionales utilizando cualquiera de sus representaciones. Han logrado consolidar su razonamiento proporcional, pues resuelven situaciones problemáticas utilizando nociones de proporcionalidad con dos o más magnitudes.

Resuelven situaciones problemáticas que demandan plantear ecuaciones algebraicas lineales con una incógnita, de tres o cuatro términos, con un nivel de signos de agrupación y con coeficientes en los racionales. Utilizan las variables para representar números, patrones y dependencias funcionales (es decir, para representar argumentos en funciones). Esto les permite manejar la noción de función como una correspondencia entre dos variables. Asimismo, empiezan a comprender el carácter predictivo de las funciones.

Respecto del pensamiento geométrico, estos estudiantes manejan los procedimientos y los conceptos básicos de la geometría analítica, identifican y grafican ecuaciones de rectas. Resuelven problemas que demandan el empleo de triángulos notables y de razones trigonométricas (seno, coseno y tangente).

Además, resuelven situaciones problemáticas que involucran interpretar información presentada en los diversos formatos usuales de la estadística.

También resuelven situaciones problemáticas que involucran el cálculo y la comparación de probabilidades de eventos sencillos.

Tareas que realiza el estudiante en el nivel suficiente

- Interpreta y resuelve situaciones problemáticas (de varias etapas) que involucran realizar cálculos con las cuatro operaciones aritméticas en el campo de los números racionales (representación fraccionaria y decimal), y usar la proporcionalidad directa e inversa, porcentajes simples y sucesivos, reparto proporcional, MCD y MCM.
- Grafica números racionales en la recta numérica e identifica el que está más próximo al origen. Interpreta y recodifica intervalos usando la notación especializada.
- Resuelve problemas que le demandan interpretar, codificar o recodificar situaciones mediante el lenguaje algebraico. Calcula el conjunto solución de ecuaciones e inecuaciones lineales con un nivel de signos de agrupación, con coeficientes en el conjunto de los números racionales y resuelve sistemas de ecuaciones lineales.
- Identifica, recodifica, calcula y grafica puntos coordenados pertenecientes a funciones lineales o funciones lineales afines.
- Identifica el dominio y el rango de funciones presentadas gráficamente en el plano cartesiano.
- Resuelve problemas que demandan interpretar funciones en su representación algebraica, calcular y comparar valores de la imagen y de la preimagen de funciones lineales, lineales afines y racionales elementales.
- Resuelve problemas verbales que involucran el modelado de situaciones mediante el empleo de ecuaciones lineales.

- Identifica la ecuación de rectas o cónicas y su respectiva denominación (circunferencia, parábola y recta). Interpreta y resuelve situaciones problemáticas elementales y rutinarias que involucran el uso de la ecuación de circunferencia.
- Resuelve problemas que demandan comparar áreas de figuras geométricas irregulares a partir de su representación gráfica y justifica su respuesta. Calcula el perímetro de un cuadrado a partir de su área, y el área de figuras geométricas elementales a partir de su fórmula.
- Resuelve problemas que demandan relacionar lados y ángulos mediante el uso de triángulos notables (53º y 37º; 30º y 60º y 45º) o mediante el uso de razones trigonométricas elementales (seno, coseno y tangente) con apoyo gráfico, aun cuando los triángulos no se presentan en su posición más usual.
- Resuelve problemas que involucran calcular porcentajes, frecuencias absolutas y relativas a partir de la interpretación de información presentada en diagramas de barras, en diagramas circulares o en tablas de doble entrada. Calcula medidas de tendencia central de conjuntos de datos.
- Identifica variables cuantitativas discretas y espacios muestrales de experimentos aleatorios sencillos (con monedas).
- Calcula probabilidades de eventos sencillos y rutinarios, y las compara.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de preguntas que pueden ser resueltas por los estudiantes que se ubican en el nivel suficiente.

M5S01

Suficiente

Al resolver la inecuación:

$$1 + 2(3 - x) > 11 - 2x$$

se obtiene como conjunto solución:

a)]4 ; +4[

✓**b)** ϕ

c)]–1 ; +4[

d) todos los enteros

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*

Contenido: *Álgebra y funciones*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *582*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la capacidad para aplicar algoritmos que demandan al estudiante calcular el conjunto solución de una inecuación con coeficientes en los enteros en un contexto intramatemático. Esta inecuación tiene como solución al conjunto vacío, por lo que el estudiante no solo debe resolverla, sino, además, debe interpretar el resultado al que llega. En esta pregunta, destaca el uso de la simbología algebraica, símbolos y signos de niveles de agrupación.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

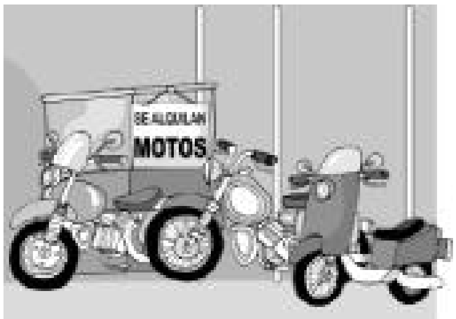
Para resolver esta pregunta, se requiere que el estudiante comprenda la noción de incógnita y de conjunto solución. En primer lugar, debe recodificar la expresión inicial simplificando los signos de agrupación para, luego, transponer los términos que contienen la incógnita a un miembro de la desigualdad y los otros términos al otro miembro, lo que lo lleva a la siguiente expresión: «0 > 4». Llegar a esta expresión no es suficiente para obtener el conjunto solución: el estudiante debe analizar el valor de verdad de dicha expresión e interpretar que «0 > 4» es una proposición falsa. Esto significa que no hay ningún número real que satisfaga la desigualdad inicial y, a partir de allí, debe inferir que el conjunto solución es el conjunto vacío.

M5S02

Suficiente

En una ciudad, el alquiler de motos cuesta S/. 20 el día más S/. 0,50 por kilómetro recorrido.

Halla la expresión que representa el costo de alquilar una moto durante un día para un recorrido de x kilómetros.



Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Álgebra y funciones

Contexto: Extramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 632

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas que demandan al estudiante usar expresiones algebraicas para representar y modelar una situación dada en un contexto no escolar. El estudiante debe usar las letras (variables) con un significado matemático distinto al ejemplo anterior en el que la «x» era la incógnita. En esta pregunta, se emplean las variables para representar dependencias funcionales entre dos magnitudes: el alquiler de la moto, en soles, y la distancia recorrida, en kilómetros.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe modelar la situación presentada, es decir, asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que lo represente. Además, se requiere que tenga una noción de variable que le permita representar dependencias variacionales entre magnitudes.

El estudiante debe interpretar la situación problemática presentada en la pregunta e identificar y relacionar las variables «costo de alquiler por un día» y «distancia total recorrida por la moto» para, luego, generalizar la situación mediante el empleo de una función lineal afín. Se obtiene así como expresión: «C(*x*) = 20 + 0,5*x*», o una expresión equivalente donde *x* es el recorrido del día de la moto en kilómetros y C(*x*) es el costo diario del alquiler.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunas respuestas correctas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

Respuesta A

Escribe aquí tu procedimiento

alquiler S/ 20
1 km = 0,50
Km = x

costo del alquiler de moto y

y = S/ 20 + x(0,50)

Respuesta: y = S/ 20.00 + x(0,50).

En la respuesta A, el estudiante seleccionó los datos del enunciado e identificó las variables para, luego, presentar la expresión lineal que las relaciona correctamente. El esquema inicial utilizado no solo le sirvió para organizar los datos, sino que, probablemente, facilitó la comprensión de la situación inicial planteada.

Respuesta B

Escribe aquí tu procedimiento

por día S/20 más x kilómetros recorridos

20 + x K
20 + (0,50)x

Respuesta: veinte más cero coma cincuenta x

La respuesta B evidencia el uso de un esquema previo como parte del proceso de comprensión para matematizar la situación. Además, se observa que el estudiante tiene una adecuada comprensión de las variables pues las emplea en dos formas distintas: para generalizar el costo de alquiler por kilómetro recorrido por día («k», que posteriormente particulariza para «k = 0,5») y para representar dependencias funcionales («x»).

Respuesta C

Escribe aquí tu procedimiento

$$\boxed{C_{alquiler} = 20 + 0{,}50x}$$

Respuesta:

En esta respuesta, el estudiante planteó de manera directa la expresión algebraica que representa la situación. Es evidente que comprendió la situación problemática, pues la tradujo al lenguaje algebraico haciendo uso de una notación adecuada.

Respuesta D

Escribe aquí tu procedimiento

$$20 + \frac{5}{10}x$$

$$\frac{200 + 5x}{10} = \frac{40 + x}{2}$$

Respuesta: LA EXPRESIÓN ES = $\frac{40+x}{2}$

En la respuesta D, el estudiante escribe directamente la ecuación que modela la situación presentada en el enunciado. Se destaca en su estrategia el adecuado manejo de las diversas representaciones o simbolizaciones mediante el uso de fracciones, pues recodifica la expresión decimal dada en el enunciado y, finalmente, homogeneiza los denominadores de la expresión.

M5S03

Suficiente

El número de asistentes a una fiesta se muestra en la siguiente tabla:

	Adultos	**Niños(as)**
Hombres	30	X
Mujeres	40	10

Si el número total de adultos es el doble del número total de niños halla la frecuencia relativa de los niños hombres con respecto al total de personas.

✓**a)** $\frac{5}{21}$

b) $\frac{4}{21}$

c) $\frac{1}{21}$

d) $\frac{5}{7}$

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Suficiente*

Dificultad Rasch: *573*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas que demandan al estudiante utilizar e interpretar cuadros de doble entrada para relacionar las frecuencias a partir de un enunciado verbal en un contexto que le es familiar. Además, en el enunciado de la pregunta se utiliza terminología especializada como «frecuencia relativa de... con respecto a...», la cual debe ser comprendida por el estudiante para poder interpretar lo que se le solicita.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe interpretar la información presentada en la tabla y establecer relaciones entre las frecuencias implicadas. Estas relaciones se presentan en el mismo enunciado de la pregunta y, a partir de la interpretación de estas condiciones, se puede calcular el número de niños. Después, se debe calcular el total de personas para así obtener la frecuencia relativa pedida ($\frac{\text{Número de niños hombres}}{\text{Total de personas}} = \frac{25}{105}$) y, finalmente, se debe simplificar esta fracción para obtener y seleccionar la respuesta correcta.[32]

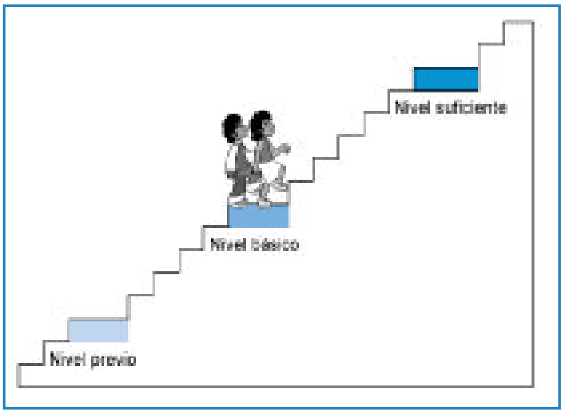
32. A pesar de ser una pregunta de opción múltiple, se consideraron como correctos aquellos procedimientos en los que el estudiante demostraba tener la habilidad para responderla mediante la fracción $\frac{25}{105}$ sin simplificar.

2.2. Lo que hacen los estudiantes que no alcanzaron el nivel suficiente

A continuación, se presenta la descripción de las capacidades de los estudiantes que no alcanzaron el nivel suficiente, es decir, aquellos que se ubican en el nivel básico y en el nivel previo.

NIVEL BÁSICO

Que un estudiante se encuentre en el nivel básico significa que demuestra un desarrollo incipiente o inicial de las capacidades propias del grado.



Los estudiantes ubicados en el nivel básico, mediante la adaptación y reproducción de estrategias previamente aprendidas, resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que demandan interpretar situaciones en diversos contextos y que, a su vez, emplean en el enunciado algunas notaciones y términos matemáticos convencionales. Asimismo, resuelven situaciones comerciales que involucran cálculos de descuentos e interés simple, realizan estimaciones de medidas de longitudes pequeñas, siguen y ejecutan instrucciones verbales breves y analizan con sentido crítico información presentada en diversos diagramas.

Además, estos estudiantes realizan cálculos aritméticos con operaciones básicas en el conjunto de los números racionales (representación fraccionaria y decimal) y en el conjunto de los números enteros. Asimismo, resuelven problemas de texto en situaciones comerciales que involucran el significado de los números negativos.

Estos estudiantes utilizan tanto la noción de incógnita como la de variable. Esto les permite manejar en un nivel intuitivo la noción de función, entendida como regla de correspondencia entre dos magnitudes relacionadas. Además, resuelven situaciones realistas que demandan plantear ecuaciones lineales enteras con una incógnita, hasta con tres términos y sin signos de agrupación. Su pensamiento proporcional se encuentra en proceso de construcción pues solo resuelven problemas utilizando la proporcionalidad simple y el cálculo directo de porcentajes.

Identifican elementos y propiedades de figuras geométricas básicas y utilizan el Teorema de Pitágoras para sustentar afirmaciones. Calculan áreas de figuras geométricas básicas y de prismas rectos. Los estudiantes de este nivel manejan las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo de manera incipiente e inconexa.

Asimismo, interpretan y grafican información estadística presentada en tablas de doble entrada y en diagramas de barras rectangulares, calculan medidas de tendencia central en un listado ordenado de datos y la probabilidad de ocurrencia de eventos sencillos.

TAREAS QUE REALIZA EL ESTUDIANTE EN EL NIVEL BÁSICO

- Calcula operaciones básicas en el conjunto de los números racionales (representación fraccionaria y decimal).
- Resuelve problemas que involucran usar las nociones de proporcionalidad simple (entre magnitudes directa e inversamente proporcionales), porcentajes, y aplica algunos criterios de divisibilidad.
- Interpreta, recodifica y grafica intervalos, que pueden estar expresados verbalmente o utilizando la notación usual o mediante inecuaciones (sin mostrar precisión en la notación especializada).
- Resuelve situaciones problemáticas mediante el uso del lenguaje algebraico (ecuaciones sin signos de agrupación) en el conjunto de los números enteros. Calcula el conjunto solución de ecuaciones de primer grado con un nivel de signos de agrupación con coeficientes en los racionales (representación decimal), y calcula el conjunto solución de inecuaciones compatibles y determinadas de primer grado con coeficientes en los enteros, sin signos de agrupación.
- Calcula y compara valores de las imágenes de funciones lineales y racionales, que simulan contextos realistas, en puntos enteros del dominio.
- Identifica y recodifica puntos representados en el plano cartesiano usando correctamente la notación especializada.
- Resuelve problemas elementales que demandan calcular el área de figuras geométricas. Calcula el área lateral de prismas rectos a partir de la altura de dichos prismas y de las longitudes de los lados de su base. Identifica si un triángulo es rectángulo o no y justifica su respuesta partiendo del Teorema de Pitágoras.
- Resuelve situaciones que involucran el uso de razones trigonométricas (seno, coseno y tangente), utilizando un soporte gráfico que representa al triángulo rectángulo con un cateto paralelo a la horizontal. Calcula senos, cosenos y tangentes de triángulos rectángulos a partir de su representación gráfica y de las medidas de sus lados.
- Grafica diagramas de barras rectangulares de frecuencias presentadas en tablas y recodifica diagramas circulares representados mediante gráficos de barras de distribución de frecuencias.
- Identifica variables cuantitativas y cualitativas en un conjunto de variables.
- Identifica, en un experimento aleatorio sencillo, el espacio muestral y resuelve problemas que demandan estimar probabilidades para seleccionar qué evento es el más probable.
- Calcula la media aritmética, la moda y la mediana de datos ordenados.

A continuación, se presentan algunas preguntas que pueden resolver los estudiantes del nivel básico.

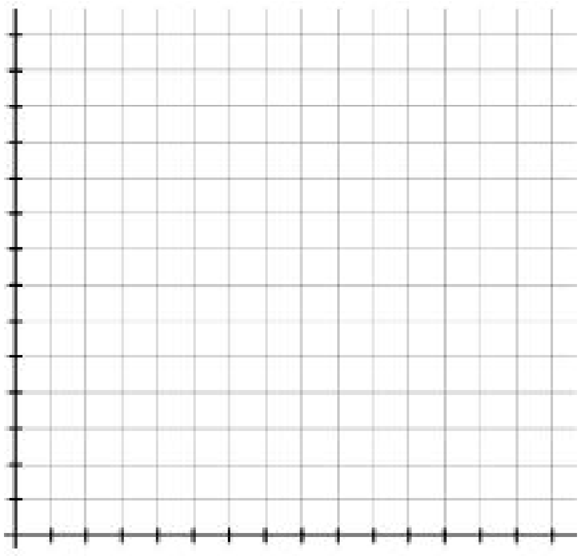
M5S04

Básico

Paolo estaba interesado en saber con qué frecuencia comía fruta, así que durante el mes de marzo apuntó el nombre de cada fruta que comía. Luego elaboró la siguiente tabla:

Fruta	**Frecuencia**
Naranja	8
Plátano	13
Manzana	10
Total	**31**

Dibuja en la siguiente cuadrícula un diagrama de barras que represente los datos de la tabla anterior:



FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *544*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la comunicación matemática cuando se demanda interpretar tablas estadísticas y elaborar diagramas de barras rectangulares a partir de estas, en una situación cotidiana. Además, en la pregunta se utilizan términos especializados como «frecuencia» y «diagrama de barras» que pueden ser parcialmente interpretados dentro del contexto.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

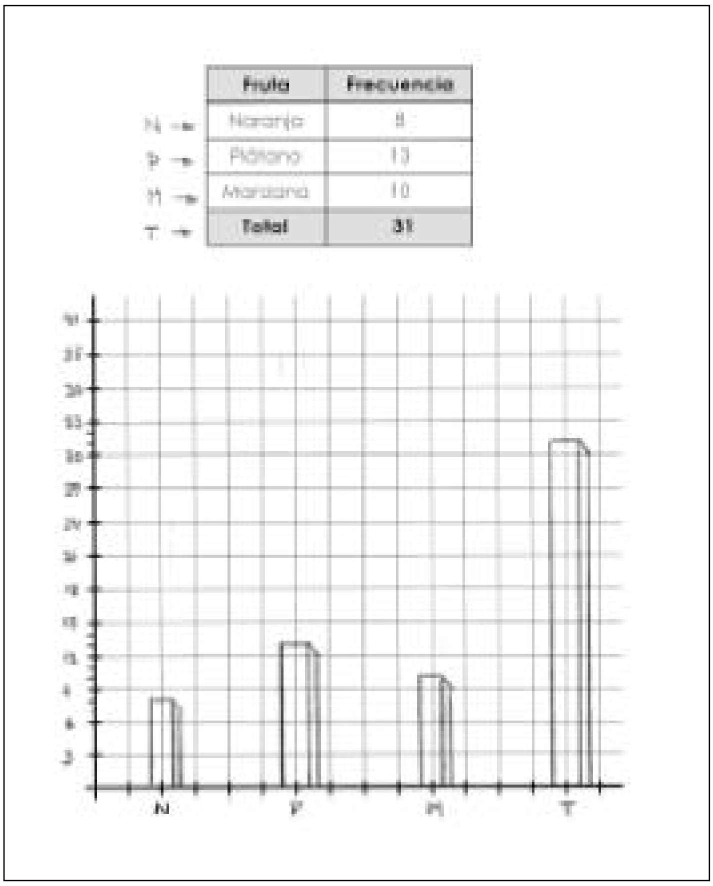
El estudiante debe interpretar la situación y otorgar significado a la información estadística presentada en el cuadro para, finalmente, recodificarla, es decir, expresarla en un lenguaje matemático diferente. En este caso, debe pasar de un cuadro de doble entrada a un diagrama de barras rectangulares.

Para responder correctamente la pregunta, el estudiante debe asignar a cada frecuencia una expresión gráfica (barra) que la represente y denominar correctamente tanto las barras como los ejes.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunas respuestas correctas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

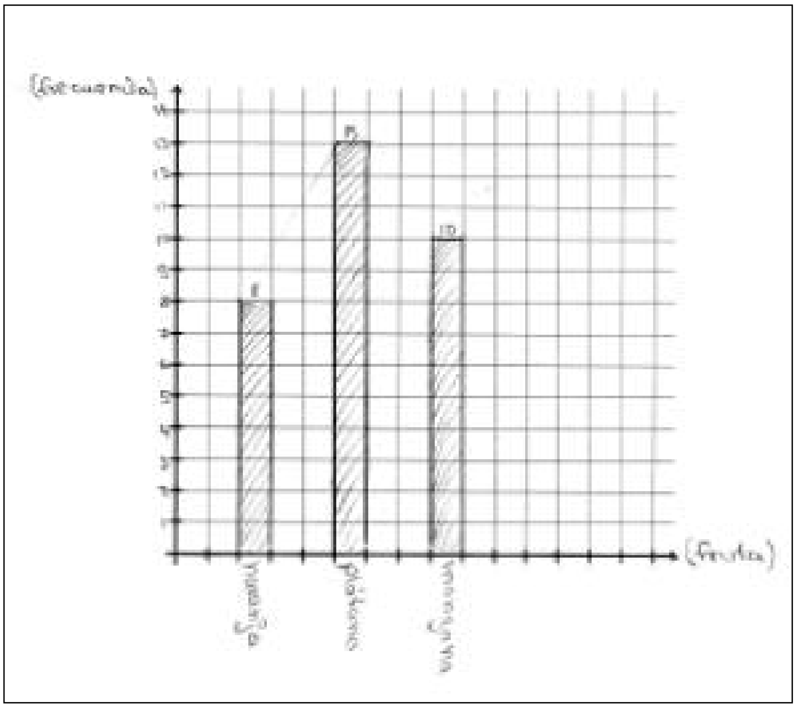
Respuesta A



En la respuesta A, el estudiante grafica toda la información del cuadro. Por ello, ha tenido que definir una escala (distinta de 1:1) para poder representar el total de frutas en la cuadrícula que se le ofreció.

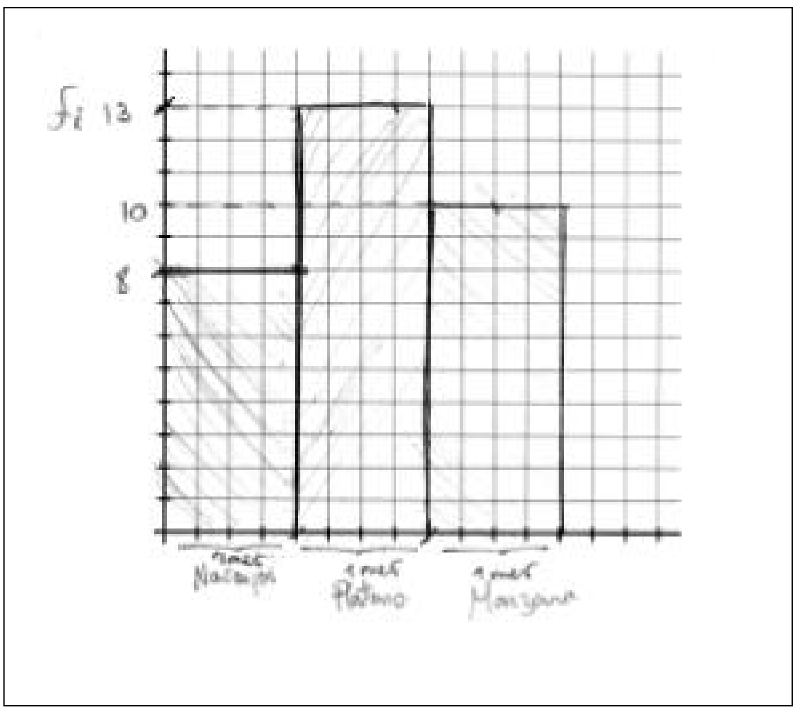
Hubo muy pocos casos en los que los estudiantes usaron escalas distintas a 1:1. Estas nuevas escalas provienen de subdivisiones en la cuadrícula propuesta en la pregunta, tal como se muestra en la respuesta A, en la que un «cuadradito» equivale a una frecuencia de 3; es decir, se ha usado una escala de 1:3. Si hubiera graficado usando una escala de 1:1, no hubiera tenido suficientes «cuadraditos» para representar la barra del total de frutas.

Respuesta B



La respuesta B fue considerada correcta pues el estudiante elaboró un diagrama de barras que corresponde a la información presentada en la tabla. No solo denominó las barras que representan las frecuencias, sino, además, colocó la escala en el eje correspondiente a la frecuencia. Son pocas las respuestas encontradas en las que los estudiantes denominan los ejes cartesianos.

Respuesta C



La respuesta C también se consideró correcta. En ella, el estudiante representa en la cuadrícula las frecuencias correspondientes a la tabla denominándolas adecuadamente. En este caso, solo denomina el eje de las ordenadas, es decir, el de las frecuencias (usando notación especializada «f_i»). Sin embargo, no lo hace con el eje que corresponde a las clases. En este ejemplo, el estudiante usa una escala de 1:1 para representar las frecuencias.

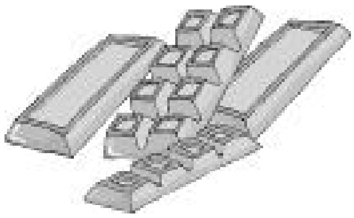
M5S05

Básico

La función que expresa el gasto (en soles) para la compra de x chocolates es:

$$f(x) = 2x$$

Calcula el valor de $f(4) - f(3)$:



a) 1

✓**b)** 2

c) 6

d) 8

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Aplicación de algoritmos

Contenido: Álgebra y funciones

Contexto: Extramatemático

Formato: Opción múltiple

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 528

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación de algoritmos que demandan al estudiante calcular la diferencia entre dos imágenes de una función lineal en un contexto extramatemático. El estudiante requiere una noción de variable más elaborada, pues debe entender que «*x*» no es una incógnita sino que debe ser usada como argumento en la función. Esta pregunta presenta una notación especializada que el estudiante debe conocer para entender lo que se le solicita.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta se requiere que el estudiante interprete la situación, en particular, la notación «$f(x) = 2x$». Además, debe, a partir de $f(4)$ y $f(3)$, identificar los valores de las preimágenes que tendrá que evaluar en dicha función. Posteriormente, debe evaluar en la función los valores enteros de dominio dados (4 y 3) para, luego, calcular la diferencia entre estas imágenes. Si el estudiante no conoce esta notación funcional, no podrá identificar las preimágenes, ni interpretar lo que se le pide, ni responder la pregunta.

M5S06

Básico

En cada triángulo se indica las medidas de sus lados. Usa el Teorema de Pitágoras, para saber si se trata de un triángulo rectángulo o no, y justifica tu respuesta.

¿Es un triángulo rectángulo? **Sí** **No** ¿Por qué?

Escribe aquí tu procedimiento

12

5

13

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Espacio y forma*

Contexto: *Intramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *534*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas que demandan al estudiante aplicar e interpretar el Teorema de Pitágoras en un contexto intramatemático. Se le propone una situación en la que no solo tiene que recordar y aplicar la fórmula de manera mecánica, sino que debe usar la recíproca de este teorema para interpretar los resultados numéricos y llegar a una conclusión (determinar el valor de verdad).

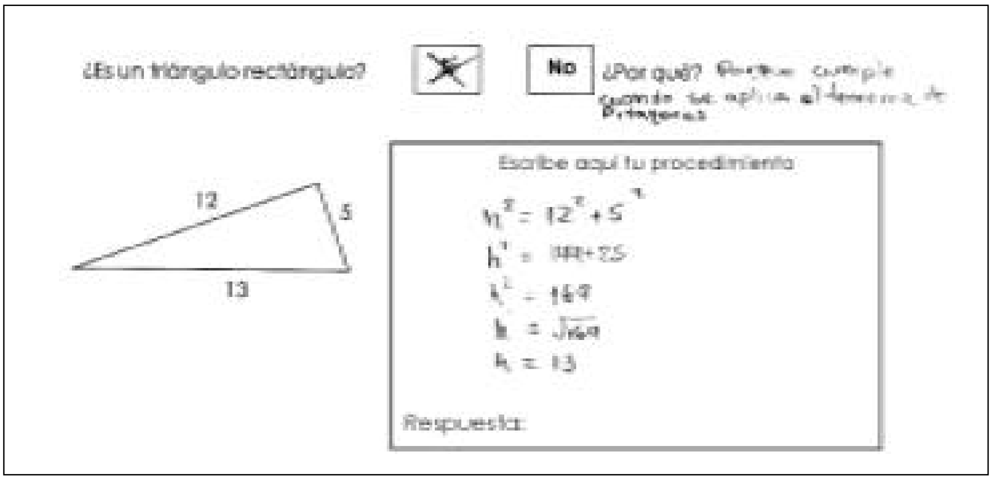
¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

En primer lugar, el estudiante debe interpretar la situación y relacionar el Teorema de Pitágoras con el hecho de que se trate o no de un triángulo rectángulo. Luego, debe identificar la hipotenusa y los catetos del triángulo para reemplazar sus respectivas medidas en la fórmula y poder confirmar si se obtiene una igualdad. Finalmente, tiene que interpretar lo que significa dicha igualdad: concluir que el triángulo es rectángulo. Otro camino es hallar un tercer lado a partir de los otros dos para, posteriormente, comparar el dato obtenido con la medida correspondiente en el gráfico, interpretar el significado de esta coincidencia y concluir que dicho triángulo es rectángulo.

Debe precisarse que las habilidades implicadas para enfrentar con éxito esta pregunta son más complejas que la simple aplicación directa del Teorema de Pitágoras, pues no solo se tiene que calcular un lado a partir de los otros dos sabiendo de antemano que se trata de un triángulo rectángulo, actividad común en el aula. En este caso, el estudiante debe realizar algunos cálculos previos para interpretar sus resultados y concluir si dicho triángulo cumple con ciertas características o no, es decir, debe usar la recíproca de dicho teorema.

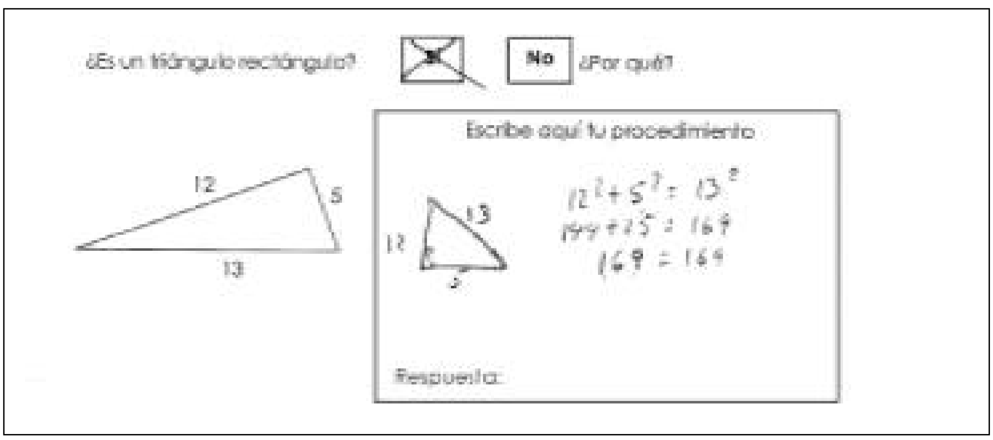
A continuación, se presentan algunos ejemplos de respuestas correctas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

Respuesta A



La respuesta A presenta la estrategia usada por la mayoría de estudiantes que contestó correctamente. Aquí, el estudiante reemplaza las medidas de los catetos en la fórmula para calcular la medida de la hipotenusa; luego, compara el resultado con el dato correspondiente de la gráfica y verifica que, en efecto, ambos coincidan. En consecuencia, concluye que se trata de un triángulo rectángulo.

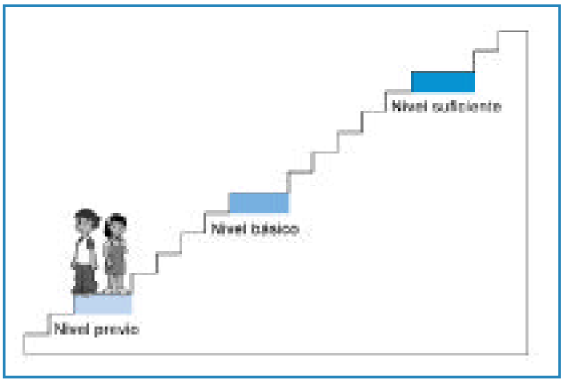
Respuesta B



Fueron pocos los estudiantes que usaron una estrategia como la propuesta en la respuesta B. En ella, el estudiante reemplaza la medida de los tres lados en la fórmula del teorema para llegar a una igualdad y concluir que, efectivamente, se trata de un triángulo rectángulo. En este caso, se observa la necesidad del estudiante de representar nuevamente el gráfico, esta vez en posición estándar, es decir, con uno de los catetos paralelo a la horizontal. Para comprender mejor lo representado e identificar sus elementos, reelabora el dibujo y lo coloca en una posición que le resulta usual y conocida. Este hecho podría reflejar una enseñanza basada en ejemplos referidos a un solo modelo.

Nivel previo

Que un estudiante se ubique en este nivel significa que demuestra solamente un desarrollo de capacidades que son propias de grados anteriores.



Los estudiantes que se encuentran en el nivel previo resuelven situaciones problemáticas rutinarias y sencillas de tipo comercial que requieren solo la aplicación de las cuatro operaciones básicas —y combinaciones de estas— y que no requieren el uso del porcentaje. También pueden realizar algunas estimaciones de medida de longitudes pequeñas, seguir y ejecutar instrucciones verbales breves y directas, y leer información presentada en tablas o en diagramas sencillos, sin evidenciar la capacidad crítica para analizar la pertinencia de la información que reciben.

Se ha encontrado que únicamente resuelven situaciones en las que toda la información relevante aparece explícita en el enunciado y que solo demandan reproducir procedimientos breves previamente aprendidos. Respecto del manejo de información cuantitativa, comparan información a partir de la lectura directa de frecuencias presentadas en tablas y diagramas de barras.

Calculan una secuencia de hasta tres operaciones aritméticas básicas en el conjunto de los números naturales. Su pensamiento proporcional es incipiente. Además, representan situaciones de enunciado verbal mediante el uso del lenguaje algebraico en los casos más elementales (cuando el enunciado permite ir escribiendo la ecuación por medio de la «traducción palabra por palabra»). También calculan el valor de la incógnita en ecuaciones lineales enteras con tres términos. Utilizan las letras únicamente como incógnitas, lo que no les permite aún manejar la noción de función —que exige el uso de las letras como variables para representar argumentos. Identifican los elementos y algunas propiedades de figuras geométricas básicas aunque no relacionan estas propiedades entre sí. Asimismo, manejan una simbología geométrica elemental.

Tareas que realiza el estudiante en el nivel previo

- Interpreta y resuelve situaciones problemáticas de contexto familiar que demandan realizar operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), operaciones combinadas de estas, proporcionalidad directa de dos magnitudes en el conjunto de los números enteros, y aplicar criterios de divisibilidad (entre tres).
- Interpreta y recodifica situaciones problemáticas que pueden ser representadas mediante ecuaciones de primer grado con tres términos, sin signos de agrupación, cuando el enunciado permite ir escribiendo la ecuación por medio de la «traducción palabra por palabra». Calcula el conjunto solución de ecuaciones de primer grado de tres términos, sin signos de agrupación, en el conjunto de los números enteros.

- Grafica puntos en el plano cartesiano cuando los pares ordenados presentan componentes en los enteros. Identifica y recodifica puntos representados en el plano cartesiano y los denomina usando la notación especializada de manera imprecisa.
- Grafica e identifica circunferencias a partir de las coordenadas de su centro y la longitud de su radio en los casos más sencillos (centradas en el origen de coordenadas).
- Identifica ángulos en figuras geométricas, calcula complementos de ángulos. Grafica segmentos paralelos entre sí.
- Grafica figuras geométricas siguiendo la descripción de esquemas y pautas específicas.
- Calcula el perímetro de figuras geométricas básicas a partir de sus definiciones y propiedades presentadas en forma verbal.
- Interpreta información estadística directa a partir de la lectura de cuadros de doble entrada o diagramas de barras para identificar y comparar frecuencias absolutas.
- Calcula el promedio aritmético de un conjunto de números presentado como listado.

A continuación, se presentan algunas preguntas que pueden resolver los estudiantes que se ubican en el nivel previo.

M5S07

Previo

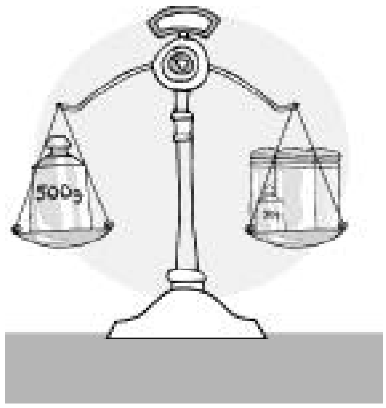
En una balanza de platillos se observa que, al colocar 3 envases iguales de vidrio y una pesa de 50 gramos en un platillo, estos pesan igual que una pesa de 500 gramos colocada en el otro platillo. ¿Cuánto pesa cada envase de vidrio?

a) 183,3 gramos

✓ **b)** 150 gramos

c) 166,6 gramos

d) 447 gramos



FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Álgebra y funciones*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *445*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas en los que se demanda utilizar expresiones algebraicas para recodificar la situación presentada y, luego, resolver la ecuación obtenida. En este caso, la pregunta tiene un soporte gráfico que pretende representar la situación, por lo que la interpretación del contexto no debería implicar mucha dificultad. Dentro del grupo de las preguntas que involucran estas habilidades, esta resultó la más sencilla.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Esta pregunta, igual que otras semejantes que pertenecen a este nivel, demanda que el estudiante interprete situaciones muy sencillas y cercanas a su entorno para, luego, codificarlas usando el lenguaje algebraico mediante una traducción casi «palabra por palabra». Además, se tiene un soporte gráfico que representa la situación descrita en el enunciado, lo cual facilita la comprensión del estudiante, pues la equivalencia entre el peso de los tres envases más la pesita (de 50 g) y la pesa de 500 g está explícita en el gráfico. Finalmente, el estudiante debe resolver la ecuación planteada, que es de primer grado con tres términos y con coeficientes en el conjunto de los enteros.

Otra manera de resolver esta pregunta es mediante el empleo de una estrategia aritmética. En este caso, la equivalencia entre el peso de los tres envases y la pesita (de 50 g), y la pesa de 500 g significa que los tres envases pesan juntos 450 g (500 – 50 = 450). A partir de este hecho se puede concluir con facilidad que cada envase de vidrio pesa 150 gramos (450 ÷ 3 = 150).

M5S08

Previo

La edad que tendrá Carlos dentro de 16 años será igual al triple de su edad actual. Si "**x**" es la edad actual de Carlos, la ecuación correspondiente es:

$$x + 16 = 3x$$

Calcula la edad actual de Carlos.

✓ **a)** 8 años
b) 4 años
c) 13 años
d) 14 años

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Aplicación de algoritmos*
Contenido: *Álgebra y funciones*
Contexto: *Extramatemático*
Formato: *Opción múltiple*
Nivel de desempeño: *Previo*
Dificultad Rasch: *486*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la aplicación de algoritmos que demandan al estudiante resolver una ecuación lineal de tres términos con coeficientes en el conjunto de los números enteros, que representa una situación de contexto cercano a su entorno.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver la pregunta, el estudiante debe interpretar la situación, identificar la incógnita y, luego, resolver la ecuación dada. Para ello, debe simplificar la ecuación y llegar a una expresión del tipo «ax = b» con a ≠ 0, mediante la transposición de los términos que tienen la incógnita a un miembro de la igualdad y de los términos que no la tienen al otro. Luego, debe despejar la incógnita y encontrar su valor numérico. Otra estrategia posible es usar el concepto de raíz de una ecuación y reemplazar en la ecuación dada los valores de las alternativas de respuesta hasta llegar a una igualdad.

M5S09

Previo

Esta tabla muestra las temperaturas ambientales tomadas a diferentes horas durante cuatro días en una ciudad.

DÍAS	TEMPERATURAS				
	6 de la mañana	9 de la mañana	Mediodía	3 de la tarde	8 de la noche
Lunes	15 °	17 °	20 °	21°	19 °
Martes	15 °	15 °	15 °	10 °	9 °
Miércoles	13 °	10 °	14 °	13 °	10 °
Jueves	20 °	11 °	14 °	17 °	8 °

¿Cuándo se registró la temperatura más alta?

a) El lunes a mediodía.

✓**b)** El lunes a las tres de la tarde.

c) El martes a mediodía.

d) El jueves a las ocho de la noche.

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *432*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la comunicación matemática cuando se demanda al estudiante interpretar información en tablas de doble entrada en un contexto no tan cercano a su entorno.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe interpretar y extraer la información brindada en la tabla de doble entrada. A partir de la lectura directa de la información, tiene que identificar la mayor de las temperaturas para luego relacionarla con el día de la semana y la hora que le corresponden.

Resumen de los niveles de desempeño en quinto grado de secundaria

NIVEL SUFICIENTE

Los estudiantes ubicados en el nivel suficiente pueden enfrentar situaciones matemáticas novedosas de diversos tipos, realizar estimaciones adecuadas de longitud y tiempo, interpretar información presentada en diversos diagramas, discriminar la pertinencia de la información que se les presenta y hacer inferencias sencillas que les permiten tomar decisiones adecuadas.

Mediante la adaptación o la construcción de estrategias, estos estudiantes resuelven situaciones problemáticas rutinarias y no rutinarias, en diversos contextos, utilizando notaciones y términos matemáticos convencionales. Los hechos y conceptos son elementos de redes más amplias que les permiten establecer conexiones en distintos niveles y contextos. Estos estudiantes justifican y explican sus procedimientos y razonamientos mediante un lenguaje matemático formal acorde con el grado.

Los estudiantes que se ubican en este nivel manejan adecuadamente el conjunto de los números racionales utilizando cualquiera de sus representaciones. Han logrado consolidar su razonamiento proporcional, pues resuelven situaciones problemáticas utilizando nociones de proporcionalidad con dos o más magnitudes.

Resuelven situaciones problemáticas que demandan plantear ecuaciones algebraicas lineales con una incógnita, de tres o cuatro términos, con un nivel de signos de agrupación y con coeficientes en los racionales. Utilizan las variables para representar números, patrones y dependencias funcionales (es decir, para representar argumentos en funciones). Esto les permite manejar la noción de función como una correspondencia entre dos variables. Asimismo, empiezan a comprender el carácter predictivo de las funciones.

Respecto del pensamiento geométrico, estos estudiantes manejan los procedimientos y los conceptos básicos de la geometría analítica, identifican y grafican ecuaciones de rectas. Resuelven problemas que demandan el empleo de triángulos notables y de razones trigonométricas (seno, coseno y tangente).

Además, resuelven situaciones problemáticas que involucran interpretar información presentada en los diversos formatos usuales de la estadística. También resuelven situaciones problemáticas que involucran el cálculo y la comparación de probabilidades de eventos sencillos.

NIVEL BÁSICO

Los estudiantes en este nivel, mediante la adaptación y reproducción de estrategias previamente aprendidas, resuelven problemas rutinarios y no rutinarios que demandan interpretar situaciones en diversos contextos y que emplean en el enunciado algunas notaciones y términos matemáticos convencionales. Asimismo, resuelven situaciones comerciales que involucran cálculos de descuentos e interés simple, realizan estimaciones de medidas de longitudes pequeñas, siguen y ejecutan instrucciones verbales breves y analizan con sentido crítico información presentada en diversos diagramas.

Además, estos estudiantes realizan cálculos aritméticos con operaciones básicas en el conjunto de los números racionales (representación fraccionaria y decimal) y en el conjunto de los números enteros. Asimismo, resuelven problemas de texto en situaciones comerciales que involucran el significado de los números negativos.

Estos estudiantes utilizan tanto la noción de incógnita como la de variable. Esto les permite manejar en un nivel intuitivo la noción de función, entendida como regla de correspondencia entre dos magnitudes relacionadas. Además, resuelven situaciones realistas que demandan plantear ecuaciones lineales enteras con una incógnita, hasta con tres términos y sin signos de agrupación. Su pensamiento proporcional se encuentra en proceso de construcción pues solo resuelven problemas utilizando la proporcionalidad simple y el cálculo directo de porcentajes.

Identifican elementos y propiedades de figuras geométricas básicas y utilizan el Teorema de Pitágoras para sustentar afirmaciones. Calculan áreas de figuras geométricas básicas y de prismas rectos. Manejan las definiciones de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo de manera incipiente e inconexa. Asimismo, interpretan y grafican información estadística presentada en tablas de doble entrada y en diagramas de barras rectangulares, calculan medidas de tendencia central en un listado ordenado de datos y la probabilidad de ocurrencia de eventos sencillos.

NIVEL PREVIO

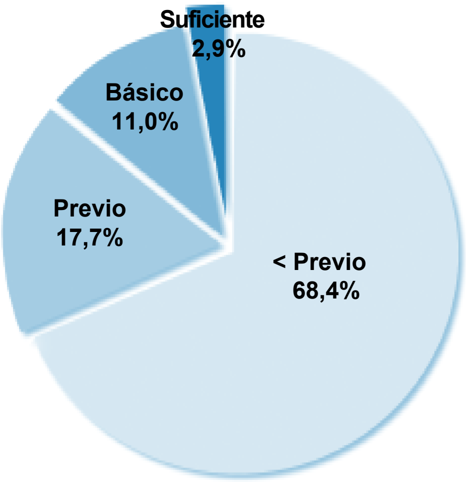
Los estudiantes de este nivel resuelven situaciones problemáticas rutinarias y sencillas de tipo comercial que requieren solo la aplicación de las cuatro operaciones básicas —y combinaciones de estas— y que no requieren el uso del porcentaje. También pueden realizar algunas estimaciones de medida de longitudes pequeñas, seguir y ejecutar instrucciones verbales breves y directas, y leer información presentada en tablas o en diagramas sencillos, sin evidenciar la capacidad crítica para analizar la pertinencia de la información que reciben.

Se ha encontrado que únicamente resuelven situaciones en las que toda la información relevante aparece explícita en el enunciado y que solo demandan reproducir procedimientos breves previamente aprendidos. Respecto del manejo de información cuantitativa, comparan información a partir de la lectura directa de frecuencias presentadas en tablas y diagramas de barras.

Calculan una secuencia de hasta tres operaciones aritméticas básicas en el conjunto de los números naturales. Su pensamiento proporcional es incipiente. Además, representan situaciones de enunciado verbal mediante el uso del lenguaje algebraico en los casos más elementales (cuando el enunciado permite ir escribiendo la ecuación por medio de la «traducción palabra por palabra»). También calculan el valor de la incógnita en ecuaciones lineales enteras con tres términos. Utilizan las letras únicamente como incógnitas, lo que no les permite aún manejar la noción de función —que exige el uso de las letras como variables para representar argumentos. Identifican los elementos y algunas propiedades de figuras geométricas básicas aunque no relacionan estas propiedades entre sí. Asimismo, manejan una simbología geométrica elemental.

3 Resultados según niveles de desempeño

En el siguiente gráfico se presentan los resultados obtenidos a nivel nacional en la prueba de Matemática de quinto grado de secundaria.



Solo el 2,9% de los estudiantes de quinto grado de secundaria se ubica en el nivel suficiente. Esto significa que, aproximadamente, tres de cada cien estudiantes peruanos que están terminando su educación básica escolar demuestran haber desarrollado las habilidades y destrezas matemáticas y haber consolidado las nociones y los contenidos que se esperan de ellos, es decir, solo esta pequeña parte de la población de estudiantes muestra un manejo suficiente, necesario y aceptable de las capacidades evaluadas considerando los objetivos propuestos por la ECB. Debe tomarse en cuenta que no se trata de estudiantes avanzados, sino de estudiantes con un nivel de desempeño adecuado para el grado.

El nivel suficiente es aquel que se espera que los estudiantes alcancen al terminar el grado. Un 97,1% de los estudiantes de la población nacional de quinto grado de secundaria **no** alcanza este nivel.

El que la mayoría de estudiantes de quinto grado de secundaria no alcance el nivel suficiente implica que presentan serias dificultades para emplear la matemática como herramienta eficiente y significativa aun en aquellas situaciones propuestas en una prueba escrita. Además, sus dificultades serán mayores al enfrentar situaciones problemáticas novedosas propias de la vida cotidiana, al ampliar sus conocimientos y al seguir desarrollando sus capacidades en esta y en otras áreas, en caso que decidan continuar su educación formal.

Asimismo, el 11,0% de los estudiantes de quinto grado de secundaria se ubica en el nivel básico. Estos estudiantes tienen un manejo incipiente y elemental de las capacidades correspondientes a quinto de secundaria. Esto significa que el conjunto de habilidades y de dominios conceptuales que han desarrollado e incorporado están en proceso de logro.

El 17,7% de los estudiantes de quinto grado de secundaria se ubica en el nivel previo. Estos estudiantes únicamente tienen un dominio de las habilidades que corresponden a los grados anteriores. Este grupo de estudiantes, que está próximo a egresar del sistema educativo peruano, ni siquiera ha logrado desarrollar destrezas y habilidades e incorporar nociones y contenidos que son considerados requisito para iniciar el quinto grado de secundaria.

Finalmente, el 68,4% de los estudiantes de quinto grado de secundaria se encuentra por debajo del nivel previo. No pueden realizar ni siquiera todas las tareas que son propias del nivel previo.

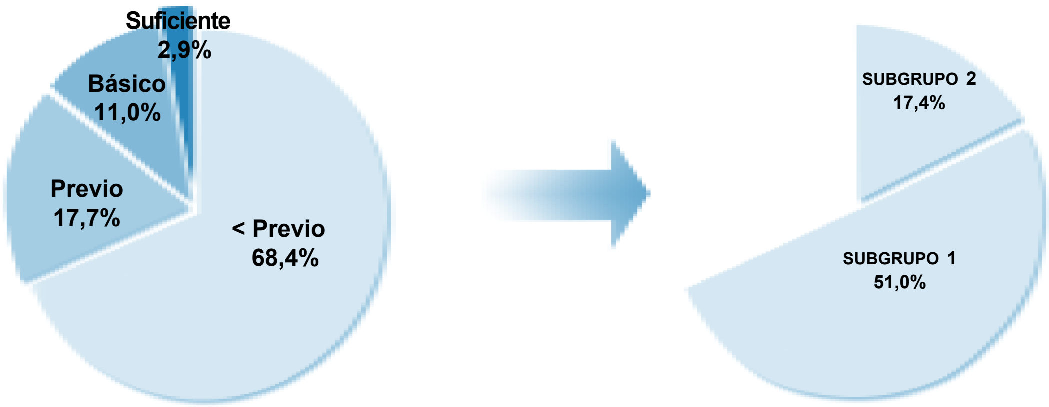
Si la población nacional de quinto grado de secundaria fuera una clase de treinta estudiantes, esta sería su probable distribución:

- Un estudiante estaría en el nivel suficiente: tendría un manejo aceptable de las capacidades evaluadas en el grado.
- Tres estudiantes estarían en el nivel básico: presentarían un desarrollo incipiente y elemental de las capacidades.
- Cinco estudiantes estarían en el nivel previo: tendrían solo la habilidad correspondiente a grados anteriores.
- Veintiún estudiantes no realizarían ni siquiera todas las tareas del nivel previo.

Lo que hacen los estudiantes que se encuentran debajo del nivel previo

Los estudiantes que se ubican por debajo del nivel previo no forman propiamente un nivel con características homogéneas. Sin embargo, debido a que se ha encontrado gran cantidad de estudiantes que no llegaban a resolver todas las preguntas exigidas para estar en el nivel previo, fue necesario definir este grupo.

Como se aprecia en el gráfico de la página siguiente, el grupo de los estudiantes ubicados por debajo del nivel previo (68,4% de la población nacional en quinto grado de secundaria) ha sido dividido en dos subgrupos, de acuerdo con las tareas que logran realizar.



Por debajo del previo	68,5%	Subgrupo 1	51,0%
		Subgrupo 2	17,4%

A continuación, se presenta una descripción de las tareas que pueden realizar los estudiantes de cada subgrupo ubicado por debajo del nivel previo.

Subgrupo 1

Los estudiantes que pertenecen a este subgrupo:

- Resuelven situaciones problemáticas sencillas y rutinarias de tipo comercial que demandan aplicar una secuencia de operaciones aritméticas básicas (adición, sustracción, multiplicación o división).
- Identifican formas de figuras geométricas básicas y sus principales elementos, como ángulos y lados.
- Extraen datos e identifican frecuencias absolutas a partir de la lectura directa de información estadística presentada como listado o en cuadros de doble entrada.
- Calculan el promedio de un conjunto pequeño de números naturales.

Subgrupo 2

Este es el subgrupo con más bajo rendimiento. Estos estudiantes solo realizan de manera aislada algunas de las tareas que resuelven los estudiantes del subgrupo 1.

A continuación, se presentan dos ejemplos de preguntas que los estudiantes ubicados por debajo del nivel previo pueden realizar.

M5S10

Mónica tiene S/. 72 y Diego tiene S/. 48. Juntos salen de compras: Mónica compra una cartera por S/. 50 y Diego un polo por S/. 40. Finalmente quieren comer juntos ¿cuánto dinero les queda para comprar algo para comer?

a) S/. 90

✓**b)** S/. 30

c) S/. 120

d) S/. 10

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Dificultad Rasch: *350*

¿Qué evalúa la pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas en los que se demanda al estudiante reproducir una secuencia de operaciones matemáticas básicas en el conjunto de los números naturales en un contexto cercano al estudiante.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para enfrentarse con éxito a esta pregunta, el estudiante tiene que interpretar la situación presentada en el enunciado; luego, debe calcular el monto total del que disponen Mónica y Diego para restarle el monto gastado y obtener así el dinero disponible para comer juntos. Otra forma de resolver esta pregunta podría ser calcular los montos que les sobran a Mónica y a Diego por separado después de realizar sus compras, y luego sumar dichas cantidades y obtener así el monto del que disponen para comer juntos.

M5S11

En un colegio se han organizado para pintar las carpetas. Si ya han pintado 48 carpetas y en total hay 146, ¿cuántas carpetas les falta pintar?

a) 194

b) 108

c) 102

✓**d)** 98

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Dificultad Rasch: *388*

¿Qué evalúa la pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas que demandan que el estudiante reproduzca una operación aritmética básica en el conjunto de los números naturales, en un contexto escolar.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para enfrentarse con éxito a esta pregunta, el estudiante tiene que interpretar la situación presentada en el enunciado, para luego restar del total de carpetas el número de carpetas pintadas, es decir, deberá restar 48 de 146. Obtendrá así como respuesta que faltan pintar 98 carpetas.

4 Análisis de las preguntas de la prueba y de respuestas de los estudiantes

En esta sección se presentan algunas de las preguntas que integraron la prueba de quinto grado de secundaria. Estas preguntas se dan a conocer para su uso por parte de personas interesadas en el tema.

Todas estas preguntas han sido diseñadas de acuerdo con las definiciones formuladas en el marco de trabajo de la EN 2004[33] y miden la formación matemática de los estudiantes. Cada una de ellas evalúa una capacidad, un contenido y un contexto específico que son señalados en una ficha técnica. Además, en esta ficha se indica el formato de presentación de la pregunta y su dificultad Rasch. Las preguntas se encuentran ordenadas de acuerdo con su dificultad, desde la más fácil a la más difícil. Asimismo, se describen los procedimientos matemáticos, estrategias y conceptos que los estudiantes pueden utilizar para responder con éxito las preguntas propuestas y se presentan los criterios empleados para la calificación de cada pregunta.

En algunos casos, especialmente en las preguntas que requieren de una respuesta extensa, se han reproducido algunas de las respuestas de los estudiantes. Estas preguntas, en particular, son fuente de mucha información, pues al registrar su procedimiento el estudiante permite conocer sus estrategias, sus patrones de pensamiento y el grado de estructuración del conocimiento matemático que posee para aplicarlo a situaciones diversas. Por esta razón, al momento de codificar las respuestas se han considerado códigos específicos que permiten clasificarlas de acuerdo con las diversas aproximaciones a la respuesta correcta y con los posibles patrones de error, que muestran el tipo de razonamiento y el sistema de creencias que utilizan los estudiantes al momento de contestar determinadas preguntas matemáticas.

Luego de cada pregunta, se hace un breve comentario con el fin de ilustrar, mediante casos específicos, algunos de los patrones y esquemas de pensamiento de los estudiantes. Además, se proporciona el porcentaje estimado de la población nacional que está en la capacidad de responder con éxito cada pregunta.[34]

Cada pregunta tiene un código que permite ubicarla en la escala de dificultad presentada en la página 213.

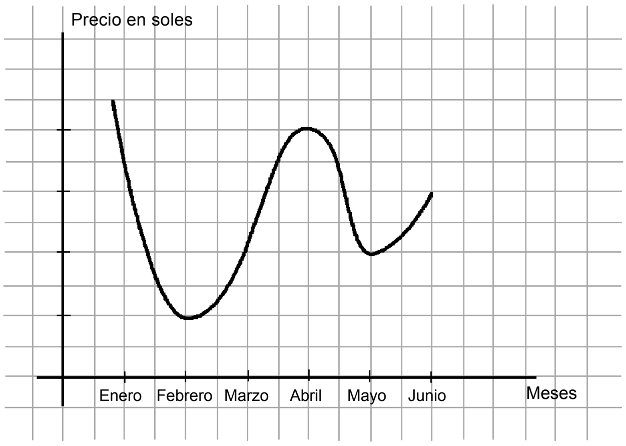
33. *Marco de trabajo de las pruebas de rendimiento.* En <http://www.minedu.gob.pe/umc/2004/marctrab/MarcTranPruebEN2004.pdf.pp 71-121>.

34. Este indicador señala que ese porcentaje de estudiantes de quinto grado tiene un 62% de probabilidad de responder correctamente la pregunta.

M5S12

Previo

El precio del quintal de café en un determinado periodo cambió como se muestra en la gráfica:



¿En qué mes se tuvo el precio más bajo?

a) mayo

✓ **b)** febrero

c) junio

d) marzo

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Álgebra y funciones*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *389*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la comunicación matemática, específicamente la interpretación de una gráfica en el plano cartesiano, en una situación que representa un contexto nacional y que resulta poco frecuente en el entorno de la mayoría de los estudiantes. En la gráfica se ha omitido el valor de la escala en el eje vertical, lo que busca dar cuenta de la habilidad del estudiante al identificar e interpretar el mes en el que la función toma el mínimo valor. Por otro lado, no se necesita saber qué es un quintal o a cuánto equivale, pues se puede deducir del contexto presentado que se trata de una medida de peso; con eso basta para poder interpretar y resolver la pregunta.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe interpretar la situación presentada en el enunciado y relacionarla con el gráfico dado; luego, a partir de la lectura de dicho gráfico, tiene que identificar el mínimo valor que toma la función para, finalmente, relacionarlo con la categoría que le corresponde en el eje de las abscisas e identificar el mes que corresponde a dicho mínimo.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

De las tareas que evalúan contenidos relacionados con funciones y sus gráficas en cualquiera de los tres procesos evaluados, esta es la de menor dificultad. La mayor parte de los estudiantes que no logró identificar el mes en el que se tuvo el mínimo valor (menor precio) seleccionó la opción «c) junio». Esta opción corresponde al último valor que toma la función en la gráfica y no a algún mínimo relativo (como es el caso de mayo), lo que puede darnos información sobre una inadecuada interpretación del gráfico.

Se estima que un 90% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M5S13

Previo

Al término del día un vendedor decide depositar en el banco todos los billetes que ha recibido por las ventas. Tiene 5 billetes de S/. 50 y 7 billetes de S/. 10; si camino al banco gasta S/. 50. ¿Cuánto dinero depositará en total?

a) S/. 10

b) S/. 370

c) S/. 75

✓**d)** S/. 270

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *389*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas cuando se demanda al estudiante realizar cálculos mediante algunas operaciones aritméticas básicas en el conjunto de los números naturales e interpretar una situación en un contexto que le resulta familiar.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe interpretar la información presentada en el enunciado y calcular la cantidad total de dinero de la que dispone el vendedor para, luego, disminuirle a esa cantidad el gasto que realiza y obtener así el monto que depositará en el banco. Las operaciones aritméticas involucradas en esta pregunta son la multiplicación, la adición y la sustracción. Además, el conjunto numérico en el que se tienen que realizar estas operaciones es el de los números naturales menores que 350, por lo que el cálculo no debería representar ninguna dificultad para los estudiantes de este grado.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

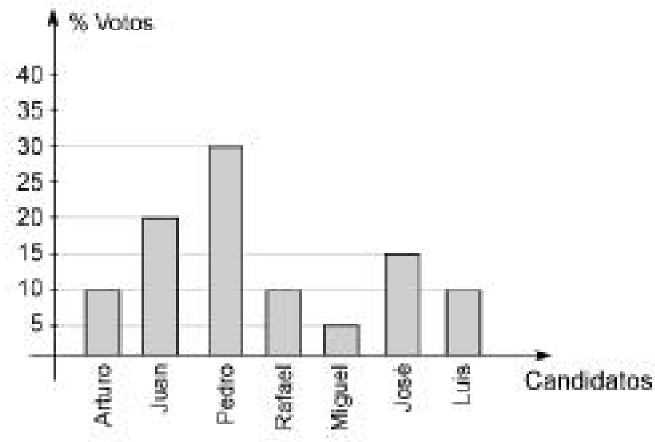
Esta tarea pertenece al nivel previo. Los estudiantes que no la respondieron correctamente, en su mayoría, eligieron la alternativa que proviene de sumar la cantidad total de dinero que tiene el vendedor (S/. 320) y la cantidad que ha gastado (S/. 50), obteniendo como respuesta S/. 370. Este distractor («b) S/. 370») podría proporcionarnos información sobre la interpretación inadecuada del gasto que el estudiante maneja.

Se estima que un 90% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M5S14

Previo

Al realizar una votación para la elección del delegado de aula, se obtuvieron los siguientes resultados (en porcentajes):



¿Quién obtuvo más del 10% y menos del 20% de los votos?

a) Miguel

b) Rafael

✓**c)** José

d) Ninguno

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Comunicación matemática*

Contenido: *Estadística y probabilidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Opción múltiple*

Nivel de desempeño: *Previo*

Dificultad Rasch: *438*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la comunicación matemática cuando el estudiante tiene que interpretar situaciones que demandan la lectura de diagramas de barras y la comparación de frecuencias. Se trata de una pregunta de opción múltiple en una situación que se ubica en un contexto escolar cercano al estudiante.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe interpretar la situación y las frecuencias dadas en el diagrama de barras. Debe partir de la lectura directa de la información presentada en el gráfico, obtener las frecuencias relativas de votos correspondientes a cada candidato, compararlas e identificar aquella que cumple con las dos condiciones establecidas en la pregunta (frecuencias mayores al 10% y menores que 20%). Otra forma de obtener la respuesta es identificar primero la frecuencia (la barra) que cumple con las condiciones dadas y, luego, relacionarla con el candidato correspondiente.

Finalmente, se debe señalar que en esta pregunta el trabajar con frecuencias relativas porcentuales no implica mayor dificultad, pues no se requiere recodificar dichas frecuencias a frecuencias absolutas: lo que se pide es que se efectúen comparaciones a partir de dichas frecuencias porcentuales.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Más de la mitad del grupo de estudiantes que no contestó correctamente la pregunta optó por elegir la opción «d) Ninguno». Este hecho podría deberse a que identifican a qué candidatos corresponden las frecuencias del 10% y del 20%, respectivamente, pero no consiguen relacionar dichas condiciones entre sí, es decir, no se logra conectar la información con los datos presentados en la gráfica, ni con la condición dada, ni con la tarea requerida.

[Se estima que un 69% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M5S15

Básico

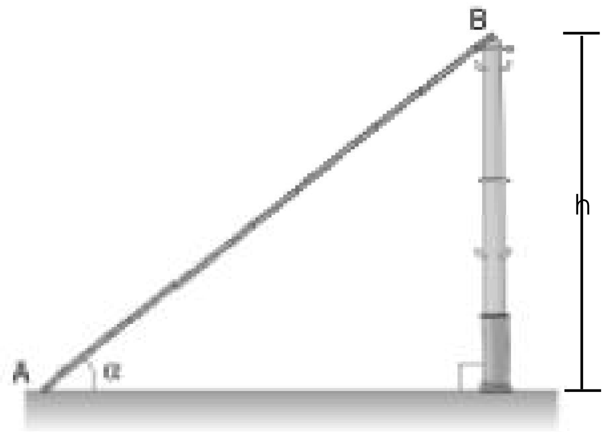
Un poste se encuentra amarrado con una cuerda AB de longitud 15 m, como muestra la figura. Si sen$\alpha = \frac{1}{3}$, halla la altura "h" del poste.

✓ **a)** 5 m

b) 15,33 m

c) $10\sqrt{2}$ m

d) 15 m



FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Opción múltiple

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 502

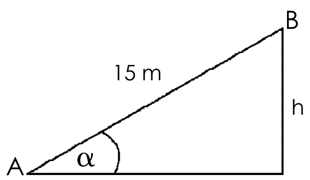
¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas cuando se demanda al estudiante utilizar la razón trigonométrica seno para relacionar los lados en triángulos rectángulos semejantes, en una situación representada gráficamente y ubicada en un contexto comunitario. El gráfico facilita la comprensión del problema: incluye algunos datos, la incógnita entre ellos, y simplifica así la redacción del enunciado.

Además, la posición en la que se presenta la figura es muy usual y no debería implicar mayor dificultad el identificar el lado opuesto del ángulo «α» y la hipotenusa, pues se trata de una tarea usual en trigonometría. Asimismo, se puede afirmar que esta tarea es representativa de aquellas realizadas en el aula cuando se aborda el contenido de razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolverla, el estudiante tiene que interpretar y relacionar los datos del enunciado con el soporte gráfico presentado. Por un lado, puede usar y aplicar directamente la definición de la función seno y reemplazar el dato dado (la hipotenusa) y la incógnita «h» (el cateto opuesto al ángulo α), para igualar esta expresión al valor de sen(α) y obtener así una ecuación lineal (una proporción) con una incógnita sencilla de resolver.



Por dato $sen(\alpha) = \frac{1}{3}$

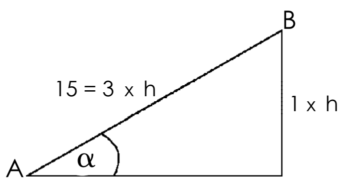
Y además $sen(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{h}{15}$

Como las proporciones son iguales, entonces obtenemos lo siguiente:

$\frac{1}{3} = \frac{h}{15}$, de lo que obtenemos que h = *5*

Interpretando la respuesta, se tiene que la altura del poste es de 5 metros.

Otra forma de resolver el problema podría ser usando la definición de razones trigonométricas como proporciones, pues de $sen(\alpha) = \frac{1}{3}$ se obtiene que el cateto opuesto «h» es proporcional a la unidad (el numerador), es decir, tiene un valor 1 x h, y que la hipotenusa que mide 15 m es proporcional a 3 (el denominador), por lo que tiene un valor de 3h, con lo que se obtiene la igualdad (3h = 15), como se muestra en el gráfico:



Obtenemos, entonces, que:

3h = 15, de donde h = 5

Así, la altura (h) del poste es 5 m

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Los estudiantes que no contestaron adecuadamente esta pregunta optaron por alguno de los tres distractores casi con igual frecuencia. Estas alternativas incorrectas provienen de operar con los datos sin relacionarlos con el contenido evaluado, por ejemplo, sumar datos, o aplicar el Teorema de Pitágoras, etc.

Se estima que un 29% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M5S16

Básico

Lee estos dos avisos publicitarios:

Aviso 1

Bazar Liliana
Antes
Precio casaca:
S/. 75

Ahora
casacas con 50%
de descuento

Aviso 2

Bazar Angélica
Antes
Precio casaca:
S/. 75

Ahora
casacas a mitad
de precio

¿En qué bazar están ofreciendo el mayor descuento? ¿Por qué?

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: *Resolución de problemas*

Contenido: *Número y cantidad*

Contexto: *Extramatemático*

Formato: *Respuesta extensa*

Nivel de desempeño: *Básico*

Dificultad Rasch: *511*

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas cuando el estudiante tiene que utilizar nociones de proporcionalidad y equivalencias entre distintas representaciones de un mismo número. Esta situación se presenta en un contexto comunitario cercano al entorno del estudiante, pues se trata de una situación de compraventa con tipos de descuento habituales en las tiendas o en los avisos de los diarios. Sin embargo, no es usual presentar a los estudiantes preguntas en las que no se espera como respuesta resultados numéricos sino que se opte por una u otra alternativa.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe interpretar la información de cada aviso. Primero se presenta el precio inicial de una casaca y, luego, el descuento sobre dicho precio; en cada caso, el estudiante debe calcular los descuentos o precios finales de venta para relacionar la información obtenida en cada aviso entre sí con la tarea requerida. Otra forma de resolver la pregunta requiere que el estudiante, directamente, comprenda que el «50%» y «la mitad» son equivalentes. Sin embargo, esta constatación no basta para concluir que el descuento total es igual; también tendrá que analizar las cantidades totales (S/. 75), que en este caso coinciden. Cumplidas ambas condiciones podrá concluir que ambos bazares ofrecen el mismo descuento y el mismo precio de venta. Otra estrategia que puede usar el estudiante es realizar cálculos aritméticos para hallar el descuento en el aviso 1 (el 50% de 75), luego calcular el descuento en el aviso 2 (la mitad de S/. 75) para, finalmente, comparar los valores obtenidos y concluir que se trata del mismo descuento.

Se debe señalar que, por lo general, en problemas de este tipo —en los que se requiere elegir una «alternativa»— las respuestas suelen ser solo una de dichas «alternativas»; sin embargo, en esta pregunta se tiene que concluir que el descuento es el mismo en ambos casos.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron como correctas aquellas respuestas que señalaban que ninguno de los dos bazares ofrecía mayor descuento, pues estos eran iguales, justificando la respuesta con alguna explicación de equivalencia entre el 50% y la mitad de una misma cantidad, o con alguna expresión numérica o cálculo aritmético a partir del cálculo independiente de los descuentos.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Los estudiantes que respondieron en forma adecuada, en su mayoría, usaron como estrategia de solución el cálculo de los dos precios con descuento para, luego, compararlos y concluir su respuesta mostrando sus procedimientos aritméticos. Otro grupo significativo hizo referencia solo a la equivalencia entre el porcentaje y la fracción dados, sin especificar si tomaron en cuenta o no el precio de la casaca. Solo un mínimo porcentaje de estudiantes se refirió a la equivalencia entre los descuentos y las cantidades iniciales sin realizar ningún cálculo previo. Dentro de los estudiantes que no respondieron correctamente, la mayoría realizó comparaciones como, por ejemplo, $50 > \frac{1}{2}$.

A continuación, se presentan algunas respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

✓ Respuestas correctas

Escribe aquí tu procedimiento

Aviso 1
S/ 75
los camisas con 50% de descuento q. viene a ser la mitad 37.5 soles

Aviso 2
S/ 75
los casacas a mitad de precio q. es 37.5 soles

Respuesta:

El estudiante de este ejemplo calcula directamente los descuentos en cada uno de los casos. La mayoría de los estudiantes calcula dichos descuentos evocando que el 50% es equivalente a $\frac{1}{2}$, como en este caso. Esto implica mayor destreza y rapidez al momento de realizar los cálculos; sin embargo, se evidencia que el estudiante no responde explícitamente a la pregunta, es decir, no señala que los dos bazares ofrecen el mismo descuento. Esto se puede deber a que no logra integrar los cálculos realizados o a que está habituado a dar respuestas numéricas.

Escribe aquí tu procedimiento

BAZAR LUANA
75 ...... 100 %
x ...... 50 %

$\frac{75 \cdot 50}{100}$

$\frac{75}{2}$

37.5

$\frac{75}{2} = 37.5$

Respuesta: En los bazares ofrecen el mismo descuento

El estudiante muestra una estrategia numérica en la que, para calcular el 50% de descuento del precio de venta inicial de la camisa, usa una regla de tres simple. En este caso, el estudiante sí realiza la comparación de los descuentos hallados y brinda una respuesta contextualizada en la que señala que en los dos bazares se ofrece el mismo descuento.

Escribe aquí tu procedimiento

$75 \times \frac{50}{100} = \frac{75}{2} = 375 =$ 75 | 2 → 375

Respuesta: en la dos el descuento es =

En este caso, el estudiante muestra una estrategia numérica en la que multiplica el precio de la camisa por el porcentaje mediante el uso de su representación fraccionaria, compara los resultados obtenidos a partir de sus cálculos y concluye que el descuento es el mismo. Se hacen evidentes las deficiencias en la ejecución de los cálculos aritméticos en los números racionales que llevan a obtener como respuesta que el descuento es de S/. 375, es decir, un descuento mayor al precio de venta inicial. Este error nos permite inferir que el estudiante no analiza ni interpreta sus resultados en el contexto de la situación.

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta: ninguna por que las 2 estan a mitad de precio, estan igual

En esta respuesta, el estudiante identifica la equivalencia entre los dos descuentos ($\frac{1}{2}$ = 50%) sin realizar cálculos explícitos. El estudiante menciona que «...están a mitad de precio…», por lo que podríamos deducir que toma en cuenta los precios iniciales.

Escribe aquí tu procedimiento

Los 2 contienen el mismo descuento ya que de un 100% al siempre se utiliza el 50% es la mitad

100% — 50% = $\frac{1}{2}$ → mitad

Respuesta: Los 2 el mismo descuento

En el ejemplo anterior, tampoco se presentó explícitamente una estrategia numérica. El estudiante justifica su razonamiento señalando la equivalencia entre ambos descuentos. Además, se evidencia que toma en cuenta la cantidad absoluta (el 100%).

Escribe aquí tu procedimiento

Los descuentos son iguales, debido a:

B. Liliana: 50%
B. Angélica: $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 50\% = \frac{1}{2}$

$50\% = \frac{\cancel{50}}{\cancel{100}} = \frac{1}{2}$

Respuesta: Los descuentos son iguales.

En este caso el estudiante solo identifica la equivalencia entre $\frac{1}{2}$ y 50%, sin tomar en cuenta si las cantidades absolutas en ambos bazares son equivalentes o no. La mayoría de estudiantes tiende a emplear estrategias como la presentada en el ejemplo, en las que se evidencia que solo usan las cantidades relativas para concluir si se trata o no de un mismo descuento.

X Respuestas incorrectas

Escribe aquí tu procedimiento

~~Aviso 1~~

S/ 75 = 100%
S/ 37.50 = 50%

Aviso 2

S/ 75 costaba antes
75/2
37.5 ahora S/ 37.50

Respuesta: están ofreciendo el mayor descuento en Bazar Angélica por venderse a mitad de su precio

En este ejemplo, el estudiante calcula correctamente los descuentos de ambos bazares en forma independiente; sin embargo, no relaciona la información que ha obtenido a partir de sus cálculos y deduce, erradamente, que uno de los bazares ofrece un mayor descuento.

Escribe aquí tu procedimiento

BAZAR DE MAYOR ESCUENTO ES
LILIANA 50%

Respuesta: 50%

En este ejemplo, el estudiante indica que uno de los bazares es el que brinda mayor descuento sin ofrecer explicación alguna. Aun en estudiantes que están cursando quinto grado de secundaria, se encuentran respuestas que hacen evidente la falta total de comprensión de la situación y en las que no logran elaborar o evocar alguna estrategia que podría aproximarlos a enfrentar con éxito las tareas propuestas.

Se estima que un 25% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M5S17

Básico

Supón que la temperatura en Huancayo, a partir de la medianoche (00:00 horas) está dada por la función $f(x) = \dfrac{-x^2 + 24x + 10}{10}$ donde f está en °C y x representa las horas transcurridas después de la medianoche, ¿cuál será la temperatura a las 10:00 a.m.?

a) 140 °C

b) 14 °C

✓ **c)** 15 °C

d) 33 °C

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Álgebra y funciones

Contexto: Extramatemático

Formato: Opción múltiple

Nivel de desempeño: Básico

Dificultad Rasch: 549

¿Qué evalúa la pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas en los que se demanda al estudiante interpretar y evaluar funciones, en una situación que representa un contexto nacional no cercano al entorno de la mayoría de estudiantes. Por otro lado, esta pregunta utiliza en su enunciado notación especializada para denominar la función «$f(x)$» que modela una situación.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta los estudiantes podrían seguir el esquema que aparece a continuación:

Interpretar la situación propuesta en el enunciado.

Se trata de una situación en la que se relaciona la temperatura de un determinado lugar respecto de la hora (contando las horas transcurridas a partir de la medianoche).

Se desea saber a qué temperatura se encuentra dicha ciudad a una hora específica.

Identificar e interpretar las variables involucradas y relacionarlas con la función dada.

Variables:

x = Horas transcurridas después de la medianoche

$f(x)$ = Temperatura de Huancayo en ºC a x horas transcurridas después de la medianoche.

Como se desea saber la temperatura de la ciudad a las 10 a. m., el estudiante debe analizar que a esa hora han transcurrido 10 horas después de la medianoche.

A partir de la situación que la función modela y de lo que se desea calcular, se deduce que se tiene que evaluar la función en dicho valor del dominio (10).

$$f(10) = \frac{-10^2 + 24(10) + 10}{10} = 15$$

Finalmente, se debe contextualizar la respuesta:

La temperatura de Huancayo a las 10:00 a. m. es de 15 ºC.

La contextualización de la respuesta solo fue realizada por un bajo porcentaje de estudiantes.

Es necesario mencionar que el esquema presentado es solo una de las formas en las que se podría abordar el problema. Sería recomendable investigar qué otras estrategias es posible usar o elaborar para enfrentar esta situación problemática para, posteriormente, hacer un análisis metacognitivo.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

Las respuestas del grupo de estudiantes que no contestó correctamente se distribuyeron casi equitativamente entre las alternativas incorrectas que provienen, sobre todo, de errores al evaluar la función $f(x)$ dada.

> Se estima que un 14% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M5S18

Suficiente

Ubica los siguientes números en una recta numérica y señala el más próximo al origen.

–0,36;   0,48;   –2;   1   y   –0,53

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 580

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la comunicación matemática en los casos en los que se demanda al estudiante graficar y comparar números decimales en un contexto intramatemático.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe establecer relaciones de orden en el conjunto de los números racionales (representación decimal) y, luego, representarlos gráficamente en la recta numérica. El estudiante debe, en primer lugar, estimar el rango de la recta que va a graficar, rango que debe incluir los valores numéricos dados en el enunciado. En segundo lugar, tiene que usar, de manera explícita o no, algunos valores de referencia como, por ejemplo, el cero (al identificar que hay números positivos y negativos) y la unidad (al identificar que los números dados están próximos al cero y a la unidad). Finalmente, tiene que incorporar en la recta numérica propuesta los números, uno a uno.

Se pueden encontrar dos tipos de respuestas: aquellas en las que los estudiantes solo colocan en orden los números dados basados en convencionalismos (los positivos a la derecha, los negativos a la izquierda; ordenan los positivos de manera creciente y los negativos de manera decreciente omitiendo el signo; etc.); y otras en las que los estudiantes construyen (mental o explícitamente) una escala que representa la proporción entre los puntos que grafican y la distancia de estos puntos respecto del origen (respecto del cero). Para este segundo grupo de estudiantes, el identificar el número más próximo al origen resulta una tarea sencilla.

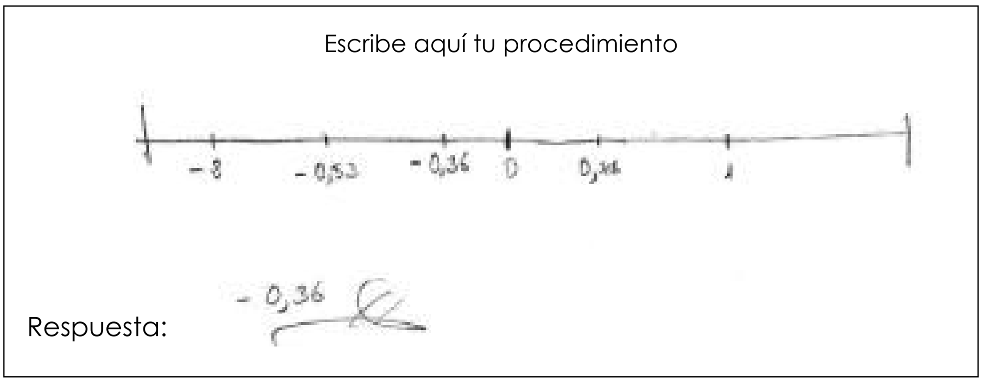
¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron correctas aquellas respuestas en las que el estudiante dibujó en la recta numérica los números correspondientes «–2; –0,53; –0,36; 0,48; 1» (en ese orden, de izquierda a derecha) y señaló que el número más próximo al origen es –0,36.

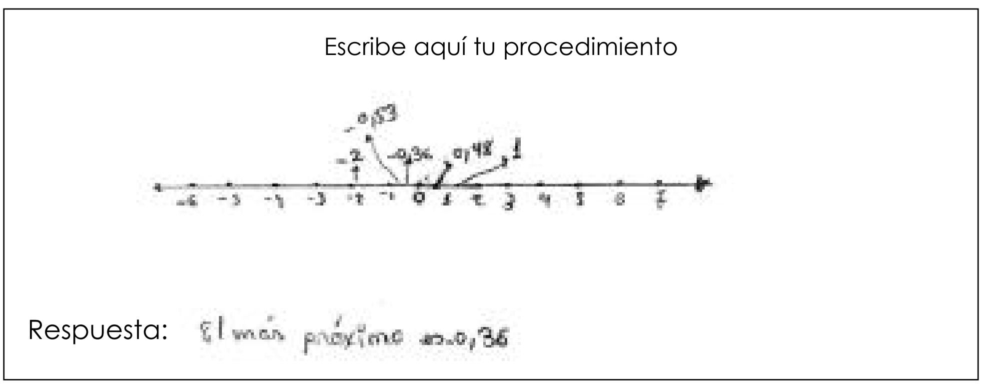
¿Cómo respondieron los estudiantes?

A continuación, se presentan algunos ejemplos de respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes.

☑ Respuestas correctas



En esta respuesta, el estudiante logra ordenar los números dados en una recta numérica e identifica el número más cercano al origen. Por otro lado, se observa que presenta una gráfica con los números ordenados sin usar una escala aparente.



Igual que en el ejemplo anterior, el estudiante logra ordenar los números dados en la recta real e identifica el número más cercano al origen. En este gráfico se evidencia que el estudiante trata de mantener las proporciones al representar los números, sin embargo, no indica la escala usada.

Escribe aquí tu procedimiento

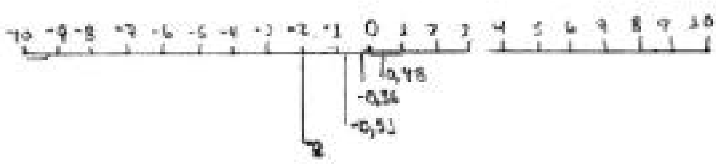
Respuesta: −0,36

En este ejemplo, el estudiante, además de ordenar los números e identificar el más cercano al origen, hace uso explícito de una escala con la que trata de respetar las proporciones de las distancias entre los números y el origen.

☒ Respuestas incorrectas

La mayoría de estudiantes que respondió incorrectamente consiguió ordenar los números decimales presentados en el enunciado, pero no identificar el número más próximo al origen.

Escribe aquí tu procedimiento



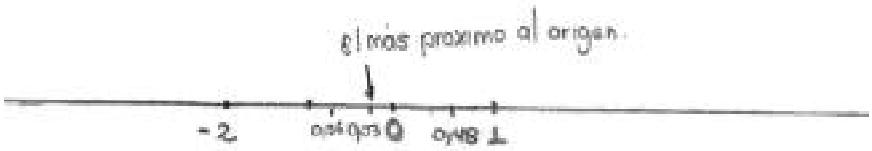
Respuesta: 0,48

En este ejemplo, el estudiante logra ordenar los números correctamente usando una escala, pero identifica en forma errónea el número que está más cerca del origen. Se observa que, gráficamente, en su escala propuesta ubica al –0,36 más cerca del origen que 0,48; sin embargo, al señalar el número más próximo escribe «0,48». La causa probable de este error es que solo toma en cuenta los números positivos, es decir, no ha incorporado la noción de números enteros o racionales y los utiliza solo de manera mecánica o algorítmica.

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta: −0,53 y 0,48

Escribe aquí tu procedimiento



Respuesta:

Estos dos ejemplos fueron considerados incorrectos pues ambos ubican los números en la gráfica ordenándolos en forma inadecuada: tratan de ordenar los decimales negativos (–0,36 y –0,53) como si se tratase de números positivos, es decir, obviando los signos y ordenándolos de manera creciente.

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta: 0,53 El más próximo al origen

En este ejemplo, el estudiante intenta ordenar los números considerando las cifras de las décimas como números enteros. Se puede afirmar que, en este caso, el estudiante no comprende el sistema de valor posicional en los decimales.

Se estima que un 8% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M5S19

Suficiente

Nicolás quiere pavimentar el patio rectangular de su nueva casa. El patio mide 5,25 metros de largo y 3,00 metros de ancho. Nicolás necesita 81 ladrillos por metro cuadrado.

¿Cuántos ladrillos necesita Nicolás para pavimentar todo el patio?

Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problemas

Contenido: Número y cantidad

Contexto: Extramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 585

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas cuando se demanda al estudiante adaptar una estrategia de solución que permita realizar conexiones entre las nociones de proporcionalidad y la noción de área en el conjunto de los racionales. La situación presentada pertenece a un contexto comunitario que probablemente resulta distante para muchos estudiantes.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para responder esta pregunta, el estudiante tiene que interpretar la situación presentada y, además, tener interiorizada la noción de área para relacionarla con el número de ladrillos que se necesita por metro cuadrado. Luego, tiene que calcular el área que mide el patio de Nicolás, multiplicando 5,25 m x 3 m, para obtener 15,75 m^2 como área. Posteriormente, tiene que calcular el número de ladrillos que requiere para pavimentar el patio sabiendo que necesita 81 ladrillos para pavimentar un metro cuadrado. Para esto debe multiplicar el área hallada por 81 y así obtener como respuesta que necesita 1 275,75 ladrillos. Una vez obtenida esta cantidad se concluye que deben ser 1 276 ladrillos (mediante el redondeo al entero inmediato superior), pues solo se pueden conseguir unidades enteras de ladrillos.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Para la calificación de esta pregunta se consideraron como válidas aquellas respuestas que muestran una estrategia correcta e indican 1 275,75 o 1 276 ladrillos como resultado, u otras respuestas con una estrategia adecuada pero que presentan errores de cálculo. También se consideraron correctas aquellas respuestas en las que el estudiante redondea el área del patio en lugar de redondear el número de ladrillos.

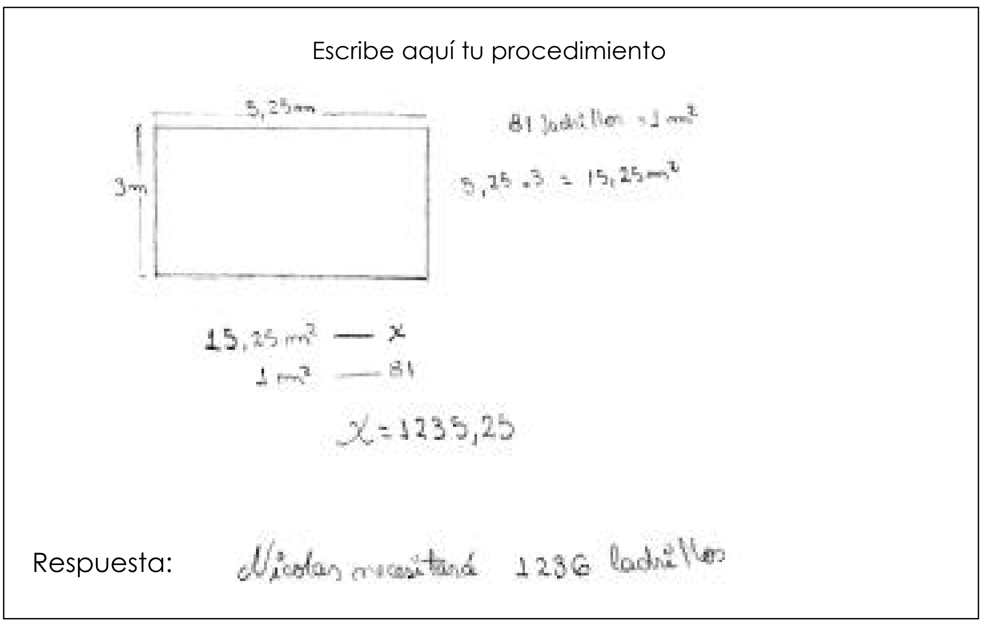
¿Cómo respondieron los estudiantes?

Entre los estudiantes que no respondieron en forma adecuada esta pregunta, la mayoría extrajo datos o realizó operaciones no relacionadas con el enunciado de la pregunta, por ejemplo, sumó los datos, etc.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

✓ Respuestas correctas

Respuesta A


Escribe aquí tu procedimiento

5,25m

3m

81 ladrillos = 1 m²

5,25 . 3 = 15,25 m²

15,25 m² — x

1 m² — 81

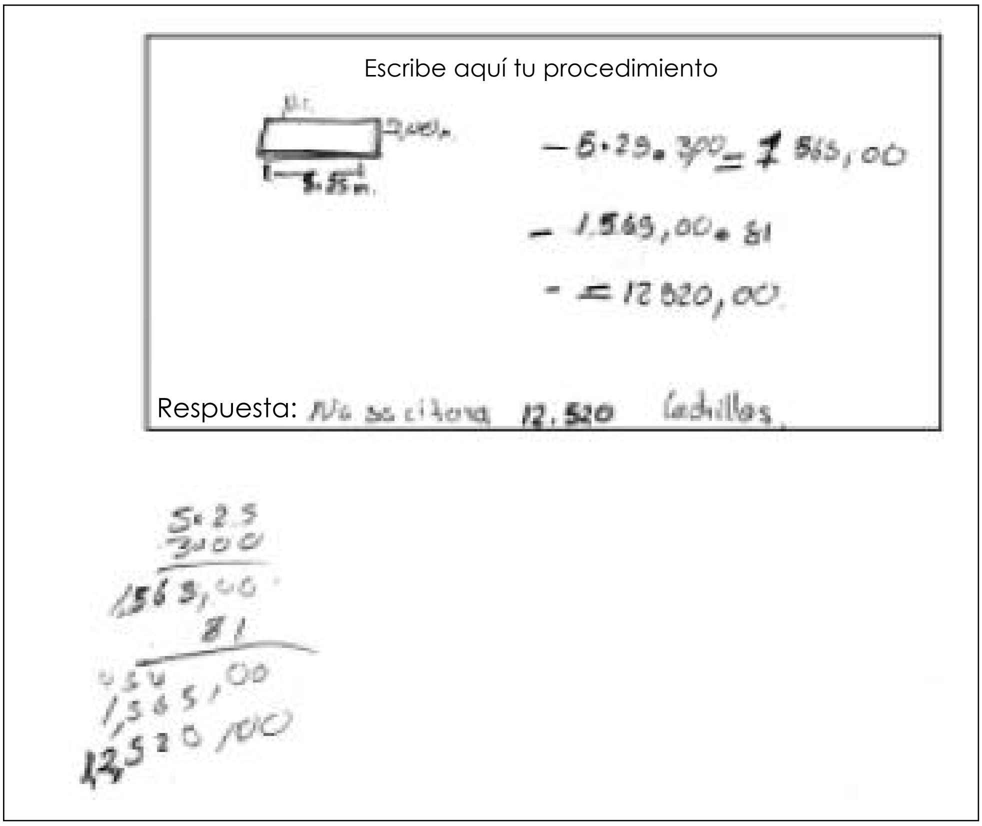
x = 1235,25

Respuesta: Nicolas necesitará 1236 ladrillos

En la respuesta A se advierte que el estudiante utiliza una estrategia adecuada para calcular cuántos ladrillos se necesitan para pavimentar todo el patio. Se observa el planteamiento de algunos esquemas y el uso de un soporte gráfico como apoyo para facilitar la comprensión de la situación propuesta. Sin embargo, se aprecian también dificultades al realizar los cálculos operativos con los decimales (5,25 x 3 ≠ 15,25).

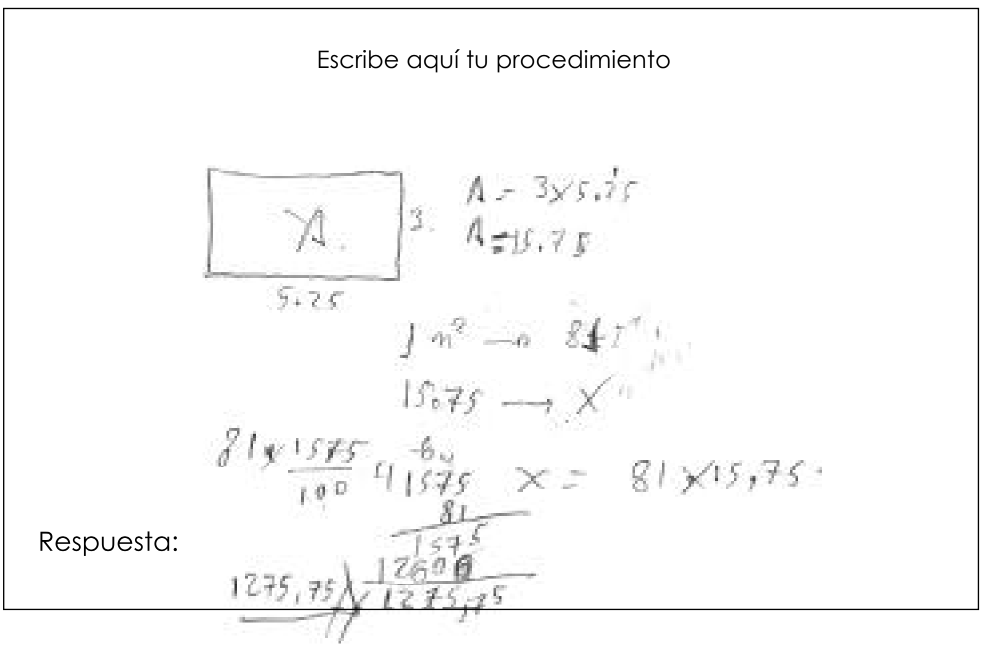
En este caso, el estudiante contextualiza su respuesta dentro de la situación planteada e, incluso, se da cuenta de que no se puede adquirir una cantidad no entera de ladrillos, por lo que redondea el valor calculado al entero inmediato superior.

Respuesta B



En la respuesta B, el estudiante también utiliza una estrategia adecuada, emplea un soporte gráfico como ayuda para la comprensión de la situación. Sin embargo, muestra dificultades al realizar los cálculos operativos, tanto al asignar la coma decimal como al calcular los productos parciales.

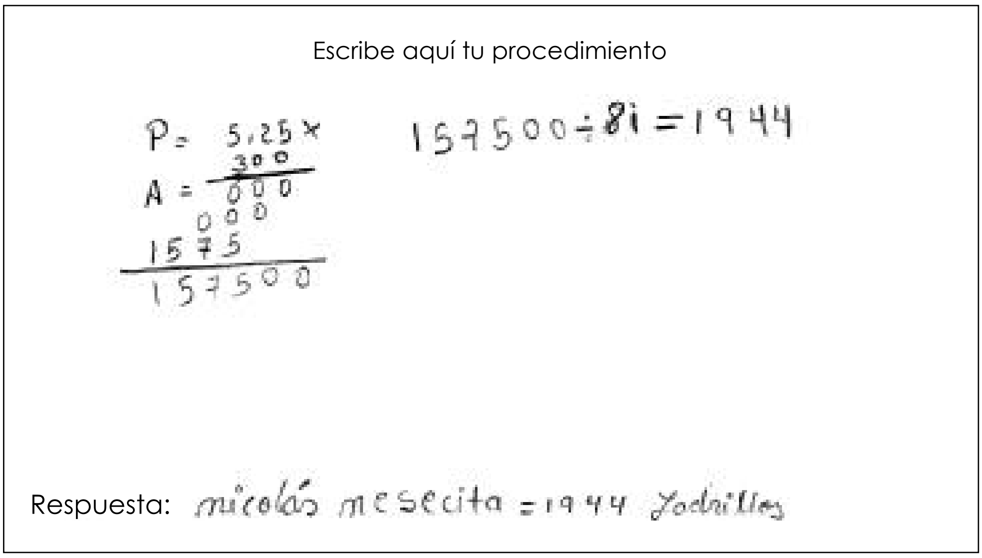
Respuesta C



La respuesta C evidencia una estrategia apropiada para calcular el número de ladrillos que se necesita. En este caso, se observa el uso de un soporte gráfico como ayuda para comprender la situación y el empleo de la regla de tres simple como parte de la estrategia para el cálculo del número de ladrillos que se necesita. No obstante, se puede ver que el estudiante da como respuesta final el número que ha calculado, sin redondearlo ni contextualizarlo. Esta hecho da cuenta de la desconexión entre las situaciones que se presentan a los estudiantes y las estrategias usadas por estos, pues no logran relacionar la matemática aprendida en el aula con las situaciones reales que se les proponen.

☒ Respuestas incorrectas

Respuesta D


Escribe aquí tu procedimiento

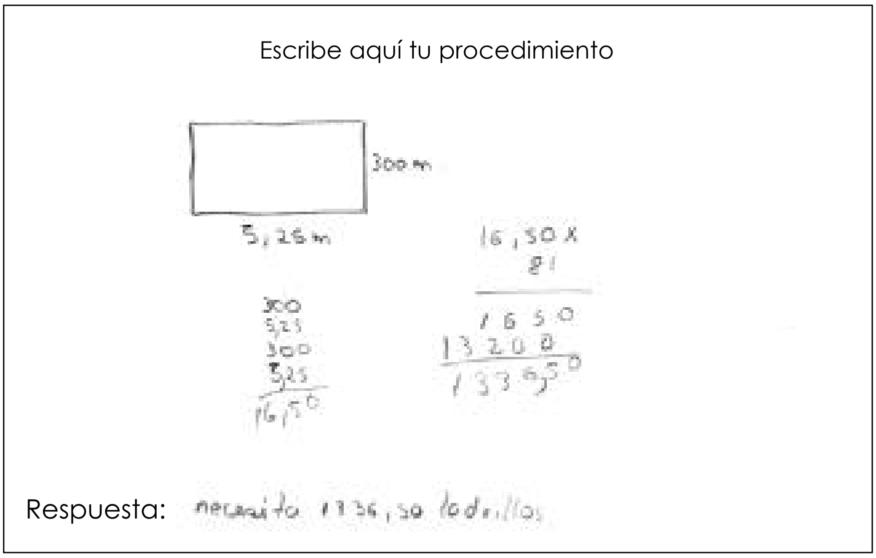
P = 5,25 ×
A = 300
1575
157500

157500 ÷ 81 = 1944

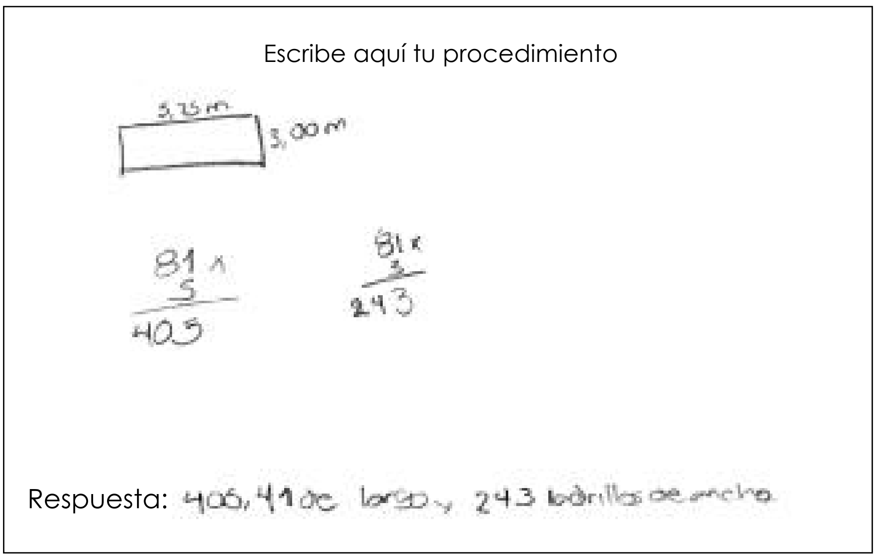
Respuesta: nicolás necesita = 1944 ladrillos

En la respuesta D, que fue considerada incorrecta, se aprecia que, si bien el estudiante calcula el área del patio, no logra comprender la situación propuesta en el enunciado, por lo que no consigue calcular el número de ladrillos necesarios para pavimentar el patio. Por el contrario, el estudiante divide el área del patio entre el número de ladrillos que se necesita por metro cuadrado. De esta situación se puede inferir que, probablemente, no ha interiorizado la noción de área como tal, lo que ocasiona un bloqueo en su comprensión de la situación.

Respuesta E



Respuesta F



Estos dos ejemplos fueron considerados como respuestas incorrectas. En ellos los estudiantes usan estrategias que involucran el empleo del perímetro del patio o de la longitud de un lado, en lugar del área del patio. Se puede inferir que estos estudiantes no tienen interiorizada la noción de área y no logran relacionar esta noción con los elementos de su entorno.

Respuesta G

Escribe aquí tu procedimiento

5,25 + 3,00 + 81 = 906

Respuesta: Nicolás necesita 906 ladrillos.

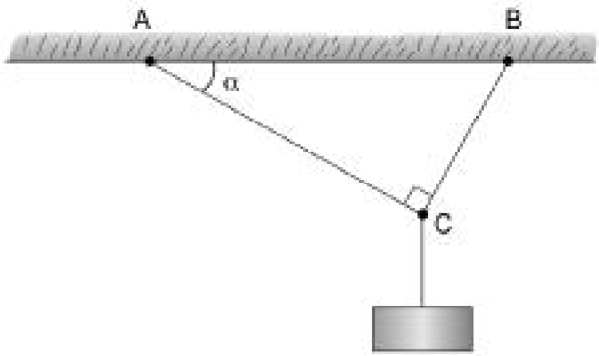
Se aprecia en este caso que, aun en estudiantes que se encuentran finalizando la etapa escolar, es posible encontrar respuestas que demuestran la absoluta falta de comprensión de la situación presentada y de las nociones involucradas en la resolución del problema. Se trata de respuestas en las que los estudiantes solo logran organizar los datos del enunciado o en las que suman dichos datos, como en este ejemplo.

> Se estima que un 8% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

M5S20

Suficiente

Se sostiene un bloque del techo mediante cuerdas como indica la figura. Si sen $\alpha = \frac{1}{4}$ y la cuerda CB mide 30 cm, calcula la distancia entre A y B.



Escribe aquí tu procedimiento

Respuesta:

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Resolución de problenas

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Extramatemático

Formato: Respuesta extensa

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 603

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la resolución de problemas que demandan el empleo de la razón trigonométrica seno para usar proporciones entre las longitudes de los lados de triángulos rectángulos semejantes, en un contexto que no resulta cotidiano. A diferencia de otro ejemplo ya mostrado, en el que también se tiene que usar la razón seno, esta pregunta posee un apoyo gráfico no usual. Así, la posición del triángulo rectángulo presentado (con la hipotenusa paralela a la horizontal) dificulta la identificación del cateto opuesto al ángulo y de la hipotenusa.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

Para resolver esta pregunta, el estudiante debe interpretar la situación presentada en el enunciado y relacionarla con el gráfico. Además, tiene que identificar el lado opuesto al ángulo «α» y la hipotenusa en el triángulo rectángulo, de tal forma que pueda plantear una proporción entre estos lados y el valor de la razón trigonométrica dada. La proporción se puede plantear de distintos modos, por ejemplo, mediante el uso de la definición de la razón seno como se muestra a continuación: como $sen(\alpha) = \frac{1}{4}$ y, además, se sabe que $sen(\alpha) = \frac{\textit{cateto opuesto de } \alpha}{\textit{hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{30}{\overline{AB}}$, se obtiene la proporción $\frac{1}{4} = \frac{30}{\overline{AB}}$, despejando se obtiene que AB = 120 cm.

Otra forma de usar las definiciones de razones trigonométricas como proporciones para resolver el problema sería que, a partir del dato $sen(\alpha) = \frac{1}{4}$, se deduzca que el cateto opuesto al ángulo α es proporcional al numerador de la razón dada, es decir, es proporcional a 1; así, se puede afirmar que BC = k (k ≠ 0) y, como por dato BC = 30 cm, entonces k = 30 cm. Por otro lado, la hipotenusa es proporcional al denominador del valor de la razón seno, es decir, es proporcional a 4, así AB = 4k y, como k = 30 cm, entonces AB = 4k = 4 x 30 cm = 120 cm.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron correctas aquellas respuestas que señalaban que la distancia entre A y B es de 120 cm, mostrando o no los cálculos. Incluso se consideraron correctas aquellas respuestas con una estrategia adecuada pero con errores de cálculo (que no fuesen de definición) en las operaciones aritméticas. Por otro lado, se tomaron en cuenta las respuestas que lograron plantear la proporción correctamente sin llegar a despejar la incógnita para obtener la respuesta numérica.

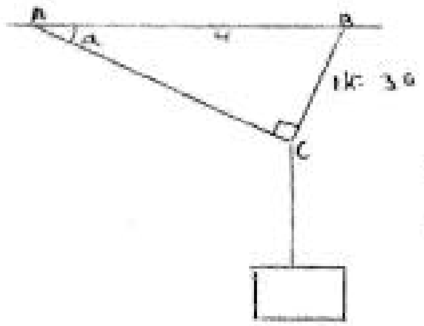
¿Cómo respondieron los estudiantes?

Entre los estudiantes que no respondieron correctamente esta pregunta, la mayoría solo extrajo los datos y los organizó como parte de la gráfica presentada, sin lograr plantear una estrategia relacionada con la tarea; por ejemplo, sumaron los datos del enunciado, recogieron y organizaron los datos en el gráfico, etc.

A continuación, se presentan algunas respuestas de los estudiantes que se enfrentaron a esta pregunta.

Respuestas correctas

Escribe aquí tu procedimiento



$K = \frac{30}{1}$

$K = 30$

$4K$

$4(30) = 120$

Respuesta: La distancia entre A y B es de 1 m y 20 cm

Esta respuesta se considera correcta pues el estudiante usa la razón seno ($sen(\alpha) = \frac{1}{4}$) para identificar los segmentos BC (cateto opuesto al ángulo α) y AB (hipotenusa) como proporcionales a 1 y 4, respectivamente, tal como muestra en su gráfico. Plantea la expresión 1k = 30 para calcular la constante de proporcionalidad «k» que, en este caso, es 30 y, finalmente, calcular la medida de AB que es igual a 4k, es decir, AB = 4k = 4(30) = 120. En este ejemplo se evidencia un adecuado manejo del uso de las definiciones de razones trigonométricas relacionadas con las nociones de proporcionalidad; además, el estudiante realiza una conversión de las unidades de medida y responde en metros y centímetros.

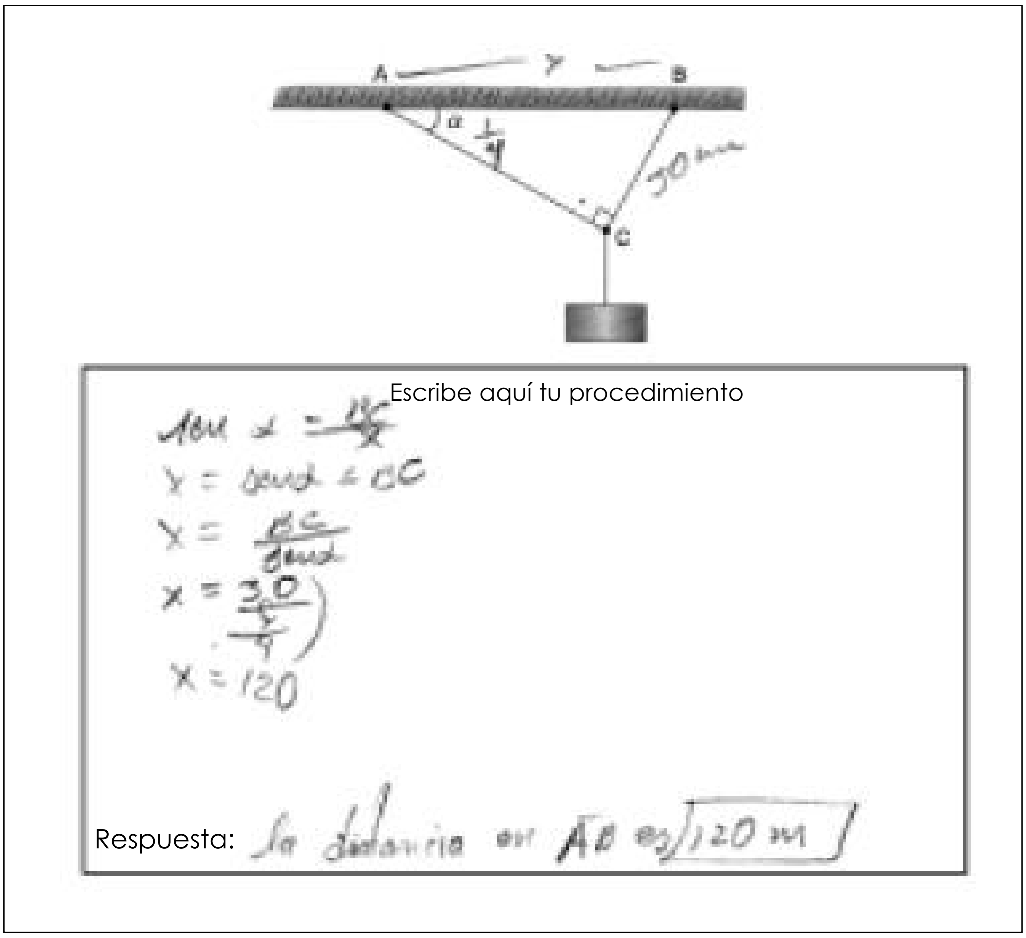
Escribe aquí tu procedimiento

$$\frac{1}{4} = \frac{30}{x}$$

$$x = 120$$

Respuesta: 120

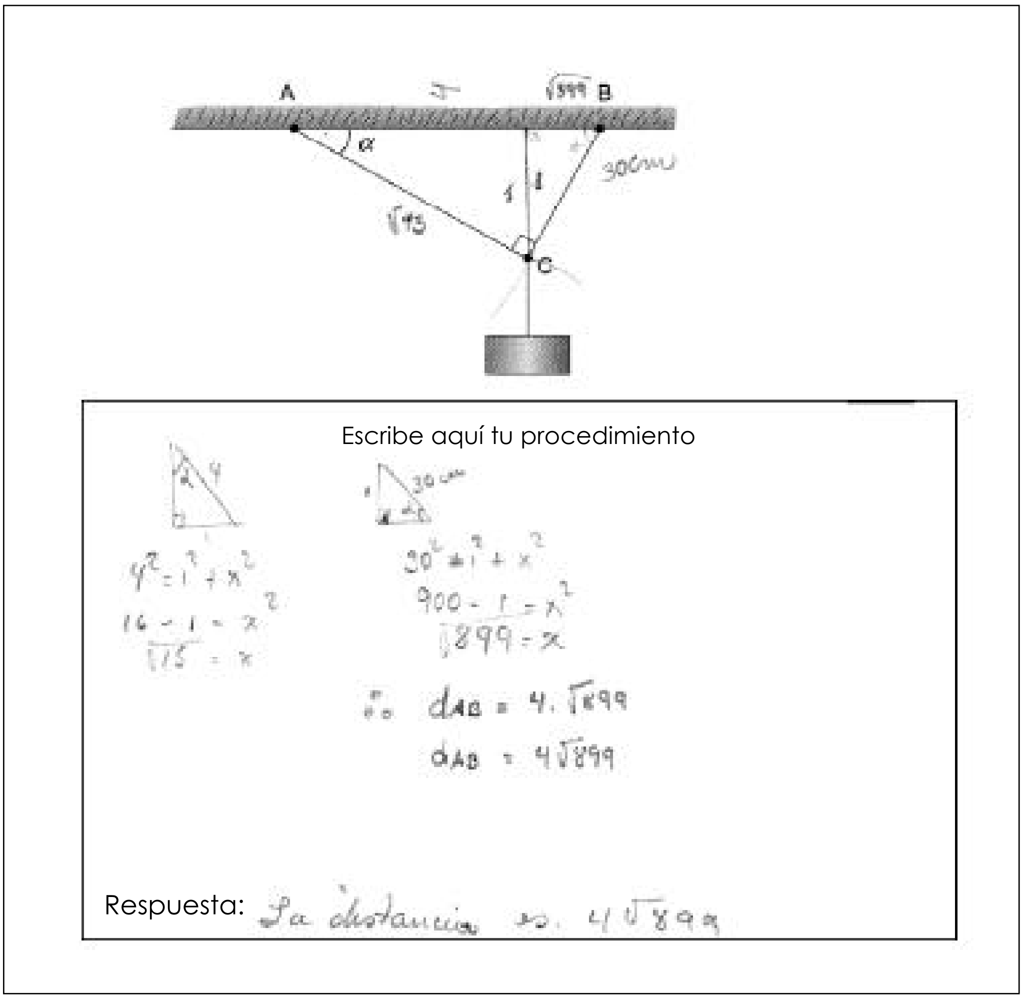
Este ejemplo se consideró correcto. Se evidencia aquí un manejo adecuado de la definición de la razón trigonométrica seno, al igualar el valor del seno(α) con la razón que proviene de usar la respectiva definición en el triángulo que aparece en el gráfico para, finalmente, despejar el valor de la incógnita. Sin embargo, el estudiante no contextualiza su respuesta ni usa unidades de medida, pues probablemente no relacione su respuesta con la situación dada.



Al igual que en el caso anterior, el estudiante utiliza en forma adecuada la definición de la razón trigonométrica seno al plantear una proporción y reemplazar los valores correspondientes y la incógnita en dicha proporción. Este ejemplo evidencia algunas deficiencias en el manejo de la simbología algebraica (el uso del signo igual); sin embargo, esta deficiencia es superada por el estudiante al lograr reemplazar los valores y despejar correctamente la incógnita para calcular su valor. Además, el estudiante contextualiza su respuesta; sin embargo, comete un error al asignar las unidades, es decir, realiza sus cálculos y operaciones sin tener en cuenta las dimensiones de las medidas de longitud que utiliza y, finalmente, asocia una unidad de medida a su respuesta sin hacer un análisis previo.

Este tipo de casos nos lleva a inferir que el estudiante no está habituado a efectuar una visión retrospectiva del problema: no analiza la respuesta obtenida, ni las estrategias utilizadas para llegar a la solución. Para evitar estas deficiencias, el docente debe desarrollar en sus estudiantes habilidades metacognitivas que les permitan identificar sus debilidades y potencialidades y mejorar sus habilidades para resolver problemas.

X Respuesta incorrecta



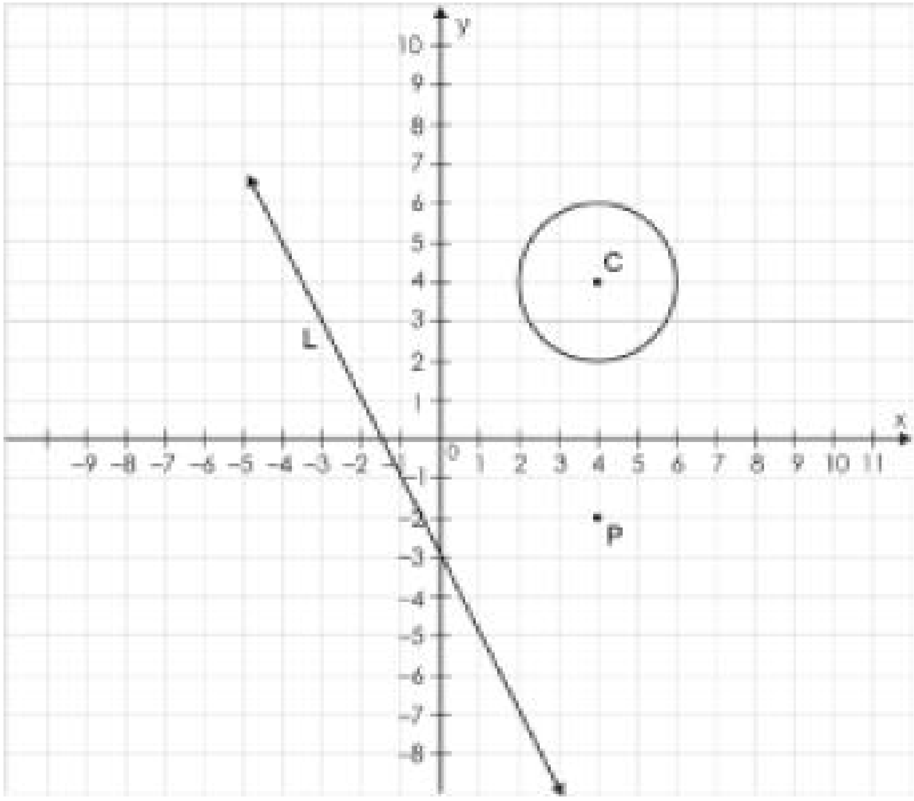
Esta respuesta fue considerada incorrecta. Aquí el estudiante logra usar la definición de seno al graficar un triángulo rectángulo con un ángulo α, cuyo cateto opuesto mide 1 unidad y cuya hipotenusa mide 4 unidades. Sin embargo, demuestra no comprender las nociones de proporcionalidad implicadas en dicha razón y en la situación dadas, lo que se evidencia en el segundo triángulo que grafica. Por otro lado, aparentemente intenta calcular la distancia de AB a partir del cálculo de distancias parciales; sin embargo, en lugar de sumar las distancias calculadas, las multiplica.

[Se estima que un 5% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.]

M5S21

Suficiente

Observa los siguientes gráficos en el plano cartesiano:



Ahora responde:

Dos puntos de paso de la recta L son _________ y __________.

FICHA TÉCNICA

Capacidad: Comunicación matemática

Contenido: Espacio y forma

Contexto: Intramatemático

Formato: Respuesta corta

Nivel de desempeño: Suficiente

Dificultad Rasch: 622

¿Qué evalúa esta pregunta?

Esta pregunta evalúa la comunicación matemática cuando se demanda al estudiante identificar puntos que pertenecen a una recta dada gráficamente en el plano cartesiano, en un contexto intramatemático.

¿Qué puede hacer el estudiante para resolver la pregunta?

El estudiante debe identificar dos puntos de paso de la recta para, luego, denominar estos puntos usando la notación especializada. El estudiante debe identificar dichos puntos a partir de la visualización de la gráfica dada para, entonces, identificar la abscisa y la ordenada que corresponden a estos puntos. También puede calcular la ecuación que corresponde a dicha recta a partir del cálculo de la pendiente y de algún punto de paso; a partir de esta ecuación debe encontrar dos puntos que pertenezcan a la recta.

Responder correctamente esta pregunta implica que el estudiante es consciente de la doble dimensión del plano cartesiano al identificar y relacionar un punto con una coordenada de dos componentes.

¿Cómo se calificaron las respuestas?

Se consideraron respuestas correctas aquellas en las que el estudiante escribió dos puntos de paso de la recta, usando o no la notación adecuada de pares ordenados (a ; b), {a ; b}, etcétera.

Se encontraron varios tipos de respuestas, aquellas en las que el estudiante era consciente de la doble dimensión del plano cartesiano, al identificar y relacionar un punto con una coordenada de dos componentes en el conjunto de los números reales, y otras en las que el estudiante denotó los puntos haciendo uso de las coordenadas de manera mecánica y algorítmica.

¿Cómo respondieron los estudiantes?

De los estudiantes que respondieron correctamente, la mayoría no presentó dificultades al usar la notación especializada. Solo un bajo porcentaje de estudiantes identificó dos puntos de paso de la recta y no logró usar la simbología de par ordenado de manera adecuada.

✓ Respuestas correctas

Dos puntos de paso de la recta L son (-1,5);0 y (0,-3).

Este ejemplo fue considerado correcto a pesar de que, en el primer caso, el estudiante usa la notación en forma inadecuada; sin embargo, resulta claro que identificó los puntos (–1,5 ; 0) y (0 ; 3) como puntos de paso de la recta.

Dos puntos de paso de la recta L son F(-1,5;0) y H(0;-3).

Dos puntos de paso de la recta L son (-1;-1) y (-3;3).

Dos puntos de paso de la recta L son (-2;1) y (-4;5).

Estas respuestas se consideraron correctas. En ellas los estudiantes no solo identifican los puntos de paso de la recta dada sino, además, escriben los pares ordenados que denotan dichos puntos.

X Respuestas incorrectas

Dos puntos de paso de la recta L son +1, -1 y -3,0.

Esta respuesta fue considerada incorrecta. En ella el estudiante logra identificar en forma adecuada solo un par ordenado sin usar la notación adecuada. No solo deja de emplear los paréntesis y el punto y coma sino que, además, se evidencia (en el segundo par ordenado) que no asigna la abscisa como primer componente del par ordenado, ni la ordenada como segundo componente de dicho par.

Dos puntos de paso de la recta L son -1, 5 y - 3.

En este ejemplo, el estudiante identifica dos puntos de paso de la recta: los interceptos con los ejes coordenados; sin embargo, no identifica los valores de la ordenada y abscisa, respectivamente, que corresponden a dichos puntos, por lo que se puede concluir que no ha interiorizado la doble dimensionalidad del plano cartesiano.

Se estima que un 4% de los estudiantes peruanos está capacitado para enfrentarse con éxito a esta pregunta.

5 Principales dificultades en el desempeño en matemática

Probables causas y sugerencias pedagógicas

En este capítulo se presentan las dificultades encontradas en los estudiantes de quinto grado de secundaria para la comprensión de conceptos y su puesta en práctica al resolver situaciones matemáticas. Estas dificultades se organizan en núcleos de interés para el docente. Además, se esbozan algunas hipótesis acerca de las razones que explican estas dificultades y se incluye una sección con sugerencias metodológicas y didácticas para mejorar el desempeño matemático de los estudiantes.

El análisis de las preguntas de la prueba y de las respuestas elaboradas por los estudiantes constituye un elemento valioso que permite conocer las diversas tareas que los estudiantes son capaces o no de realizar de manera adecuada. Asimismo, contribuye a comprender los procesos empleados por los estudiantes para enfrentarse a cada pregunta; a conocer sus tendencias para elegir estrategias de solución y las habilidades que evidencian al desarrollar los problemas; a identificar los errores comunes típicos en los que incurren; y a constatar las principales dificultades que experimentan al resolver cada una de las preguntas.

A continuación se presentan las dificultades encontradas en cada uno de los ejes temáticos evaluados acompañadas de algunas sugerencias pedagógicas útiles para superar dichas deficiencias, una vez adecuadas por el docente a la realidad de cada aula y al nivel de cada estudiante. No se pretende proponer recetas, pues para el caso de aprendizajes complejos como lo es el aprendizaje de la matemática estas no existen, sino esbozar algunas líneas que puedan aportar a la reflexión del docente en su permanente interés por innovar y perfeccionar el trabajo didáctico en el aula.

5.1. Pensamiento numérico y proporcional

La EN 2004 ha encontrado que los estudiantes de quinto grado presentaron dificultades en el manejo de las nociones de número en el conjunto de los racionales y del pensamiento proporcional al:

- Resolver problemas sencillos y rutinarios de pocas etapas referidos a número y cantidad, que requieren la interpretación de los números racionales y el uso de las operaciones aritméticas básicas en el conjunto de los racionales. Los estudiantes no solo interpretan con dificultad las situaciones presentadas sino que, además, muestran deficiencias al realizar cálculos en las cuatro operaciones aritméticas básicas en los racionales (representación decimal y fraccionaria).
- Interpretar y recodificar los números racionales en sus diversas representaciones (decimal, fraccionaria, simbólica, porcentual, gráfica, etc.), pues no tienen incorporadas las nociones de número (entero, racional, real) y no realizan conexiones entre estos conjuntos numéricos.

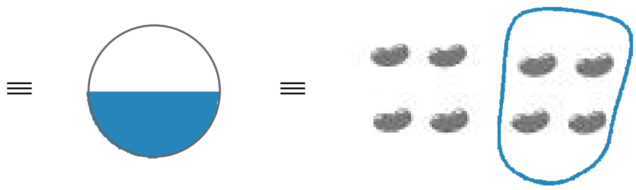
- Realizar cálculos aritméticos (adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones) en los racionales, en su representación fraccionaria y decimal. Un alto porcentaje de estudiantes no suma fracciones heterogéneas y da como respuesta la fracción que obtiene de sumar numerador con numerador y denominador con denominador. La mayoría de estudiantes de este grado no multiplica dos números decimales correctamente, pues presentan dificultades al considerar el valor posicional de cada cifra, lo que impide que ubiquen correctamente la coma decimal.
- Interpretar y recodificar intervalos en sus diversas representaciones (verbal, gráfica, como inecuación o como conjunto), al calcular la unión e intersección de estos, sobre todo en los puntos extremos, pues no distinguen si dichos extremos pertenecen o no a la intersección o unión, según sea el caso. Este error puede explicarse por el hecho de que no establecen relaciones de orden en el conjunto de los números reales y no tienen interiorizada la noción de continuidad en la recta numérica.
- Resolver problemas elementales de enunciado verbal que involucran el uso de la proporcionalidad entre dos o más magnitudes y sus aplicaciones, pues no tienen incorporadas nociones elementales como razón o proporción, ni la relación de dependencia entre magnitudes proporcionales, etc.
- Identificar la dependencia entre magnitudes, pues no identifican los casos en los que las magnitudes son directa o inversamente proporcionales, sino que multiplican los datos del problema, sin analizar previamente de qué tipo de proporción se trata. No han interiorizado los diversos tipos de dependencias y relaciones que pueden existir entre magnitudes, lo que les impide identificar si se trata de proporciones o no. Tienen la concepción equivocada de que «a más, más» corresponde a magnitudes directas y a «a más, menos» corresponde a magnitudes inversas, sin verificar si se trata de magnitudes proporcionales.
- Resolver situaciones problemáticas que involucran el uso de porcentajes, pues no interpretan la situación presentada y no calculan porcentajes simples no usuales, qué porcentaje es una cantidad respecto de otra, ni calculan porcentajes sucesivos, etc.

Desde el nivel primario se inicia el trabajo con fracciones, decimales y proporciones, que abarcan la noción de número, las diferentes formas de representación, las cuatro operaciones aritméticas y el uso de la regla de tres directa e inversa. En el nivel secundario se formaliza este trabajo: se incluyen los racionales como un conjunto en sí, las operaciones combinadas que emplean operaciones básicas, la proporcionalidad y sus diversas aplicaciones. Todo lo anterior hace suponer que, al terminar su escolaridad, los estudiantes ya deberían haber interiorizado y consolidado las nociones y el trabajo aritmético de estos contenidos. Sin embargo, se evidencia en un alto porcentaje de estudiantes que esto no ocurre, lo que probablemente da cuenta de deficiencias en las actividades didácticas que se desarrollan en el aula en torno de estos temas.

Las dificultades encontradas en los estudiantes podrían tener su raíz en la enseñanza compartimentalizada de estos contenidos, es decir, la enseñanza subdividida (por partes) que no permite a los estudiantes establecer relaciones y conexiones entre los diversos temas, entre estos temas y la matemática, entre la matemática y otras áreas, y entre la matemática y las situaciones reales. Además, los temas se enseñan de manera descontextualizada o en contextos que carecen de sentido para los estudiantes, lo que no produce un aprendizaje significativo. Por el contrario, este tipo de enseñanza provoca que los estudiantes aprendan recetas y algoritmos en forma mecánica con el propósito de resolver los ejercicios y «problemas tipo» que habitualmente son propuestos en los exámenes.

SUGERENCIAS

- Se debe tener presente y hacer evidente ante los estudiantes que cada número racional tiene infinitas representaciones. Por ejemplo, «$\frac{1}{2}$» puede ser representado de varias maneras: $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{n}{2n}$; 50%; 0,5; la mitad; etc. También puede ser representado gráficamente:

$\frac{1}{2} \equiv$ 

Por otro lado, cuando se trabaja con razones, proporciones, porcentajes, escalas, etcétera, también se está utilizando fracciones equivalentes. Por ejemplo, reducir un dibujo usando una escala de 1:2 equivale a reducir el dibujo a la mitad de su tamaño original, o a reducirlo al 50%, o reducirlo a $\frac{1}{2}$ de sus longitudes originales, etc.

- La mayoría de estudiantes puede realizar adiciones y sustracciones de fracciones homogéneas. Es provechoso utilizar este conocimiento previo y lograr que, al sumar o restar fracciones heterogéneas, las sustituyan por otras fracciones equivalentes con igual denominador para convertir la adición y/o sustracción de fracciones heterogéneas a homogéneas.

- Una vez afianzadas las nociones con los números racionales, se debería empezar a introducir algunos números irracionales mediante la experimentación, por ejemplo: π. Es fundamental relacionar la definición de estos conceptos con los anteriores, es decir, presentar a los números irracionales como aquellos números que no admiten una representación decimal, o como alguna de las facetas de las fracciones (razones, por ejemplo), etc.

- La representación de los números en la recta es un tema fundamental en el proceso de aprendizaje de los números, porque permite hacer concreto algo tan abstracto como los números y los conjuntos numéricos, y permite visualizar la noción de orden. Por esta razón, es importante que los estudiantes relacionen los números con su representación en la recta numérica, pues, además, les permitirá establecer conexiones no solo entre los diversos conjuntos numéricos, sino entre los distintos temas de la matemática como, por ejemplo, el cálculo de distancias en la recta, la representación de puntos, etc.

Para el uso de la recta numérica se pueden emplear los modelos de desplazamiento, tal como se indica en la Parte II de este informe (véase la página 90). Son ejemplos de modelos de desplazamiento el uso del termómetro o los años antes y después de Cristo o el agua que entra y sale de un depósito, entre otros.

- Se deben vincular los problemas con situaciones reales y cercanas para los estudiantes con el fin de conseguir aprendizajes significativos que los lleven a comprender las nociones y su utilidad. Por ejemplo, para enseñar los números naturales, podemos proponer una situación en la que hablemos del número de habitantes en una determinada ciudad (aquí, claramente, no cabe hablar de cantidades negativas o de fracciones de personas). Los enteros nos podrían ayudar a representar situaciones que involucran opuestos, como ganancias y pérdidas de capital, en las que una cantidad negativa significa que se está perdiendo dinero; o recorridos, en los que una cantidad negativa significa que se está retrocediendo; o situaciones que involucran temperaturas, en las que la cantidad negativa representa temperaturas bajo cero; o situaciones referidas a la altura sobre el nivel del mar, en las que los negativos representan profundidades bajo el nivel del mar; etc.

Un contexto adecuado para trabajar con números racionales en su representación decimal es el de las unidades monetarias, pues, en este caso, los decimales (céntimos o décimas) nos ofrecen más exactitud que el conjunto de los enteros. Un contexto adecuado para el empleo de fracciones podría ser el de las unidades de medida que nos permiten trabajar con partes de la unidad. En el caso de los irracionales, se puede pedir a los estudiantes que traten de construir un cuadrado de 3; 5; 13 cm^2 de área (o cualquier número que no tenga raíz cuadrada exacta), etc.

Sin embargo, algunos de los contextos citados presentan limitaciones, pues los números involucrados en dichas situaciones no forman un conjunto denso[35] y, en el caso de los números reales, esto puede impedir la incorporación de la idea de continuidad de la recta real. Así, una vez afianzadas las nociones básicas de los números racionales y de sus operaciones, se debe descontextualizar dichas nociones para realizar un análisis de las relaciones aprendidas entre los conjuntos numéricos.

- Es recomendable explicitar la inclusión de los conjuntos numéricos, es decir, reconocer, por ejemplo, que los números naturales son también números enteros y que algunos reales son racionales, irracionales, enteros o naturales, etc. De acuerdo con los hallazgos de algunas investigaciones (Porcel y Ramírez 2002), se puede decir que los estudiantes presentan mayores dificultades al identificar o reconocer a los números naturales y enteros como números racionales. Para conseguir este objetivo, se propone el uso de actividades como la que se muestra en las tablas de la página siguiente.

  En ambas tablas se observan números pertenecientes a varios conjuntos numéricos; sin embargo, en la primera se consideran números más usuales para los estudiantes a diferencia de aquellos que aparecen en la segunda tabla. Para poder completar correctamente dichas tablas, los estudiantes deben hacer uso de sus habilidades para identificar los conjuntos numéricos a los que pertenecen los números de la primera columna. De acuerdo con la definición de Delgado: «Identificar es distinguir el objeto de estudio matemático sobre la base de sus rasgos esenciales. Es determinar si el objeto pertenece a una determinada clase de objetos que presentan ciertas características distintivas.» (Delgado 1998: 73). El identificar un objeto posibilita un dominio adecuado de los conceptos, pues implica la comprensión de sus diversos usos.

35. De manera general, un conjunto es denso cuando entre dos elementos de este conjunto existe un tercer elemento que pertenece a dicho conjunto; por ejemplo, los números reales forman un conjunto denso.

Tablas de identificación de conjuntos numéricos

En las siguientes tablas, marca con una X, en el o en los casilleros correspondientes, todos los conjuntos numéricos a los que pertenece cada uno de los números de las filas.

Conjuntos / Números	N Naturales	Z Enteros	Q Racionales	I Irracionales	R Reales
0					
2					
$\frac{1}{2}$					
$-\frac{1}{2}$					
$\sqrt{2}$					
$-\sqrt{2}$					

Conjuntos / Números	N Naturales	Z Enteros	Q Racionales	I Irracionales	R Reales
$-1,9$					
-4					
$-\sqrt{36}$					
$\frac{9}{4}$					
$-\sqrt{13}$					

- La noción de proporcionalidad va más allá de que los estudiantes aprendan a usar la regla de tres o planteen una igualdad con dos razones para calcular un término desconocido. Se deben desarrollar en los estudiantes habilidades para reconocer cuándo dos cantidades son proporcionales; para utilizar números, tablas y gráficos; para emplear y comprender funciones del tipo $y = kx$ con $k \neq 0$; y para modelar situaciones mediante el uso de proporciones o funciones proporcionales (por ejemplo, mediante el empleo de escalas en el diseño de un plano). El estudiante debe interiorizar y comprender que porcentajes, decimales, fracciones, conversiones de medidas, escalas, mezclas, estadística, probabilidades, proporcionalidad entre segmentos de lados en triángulos, semejanzas, funciones lineales, etc. están relacionados con el pensamiento proporcional.

  Para introducir las nociones de proporcionalidad, se pueden realizar actividades concretas como, por ejemplo, reducir o ampliar un dibujo haciendo uso de cuadrículas de diferentes tamaños:

Reproduce el dibujo de la tabla 1 en la tabla 2:

TABLA 1

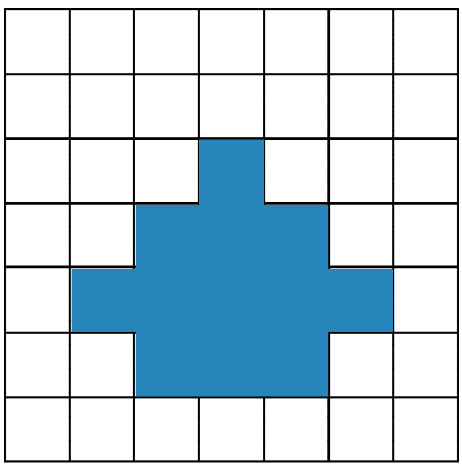
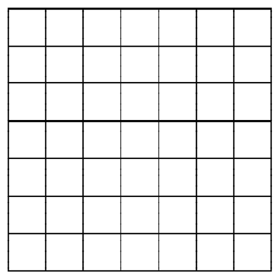


TABLA 2



Si sabemos que en la tabla 1 los cuadrados tienen 1 cm de lado y en la tabla 2 tienen 0,5 cm de lado, responde las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el perímetro de la figura en la tabla 1?
- ¿Cuál es el perímetro de la figura en la tabla 2?
- ¿En cuánto se ha reducido el perímetro? ¿Por qué?
- ¿Cuál es el área de la figura en la tabla 1?
- ¿Cuál es el área de la figura en la tabla 2?
- ¿En cuánto se ha reducido el área? ¿Por qué?
- ¿Qué podemos hacer con la cuadrícula para que el perímetro de la figura de la tabla 2 se triplique?
- ¿Qué podemos hacer con la cuadrícula para que el área de la figura de la tabla 2 sea nueve veces su área inicial?

Esta actividad permite a los estudiantes trabajar las nociones de proporcionalidad y realizar conexiones entre los diversos contenidos matemáticos. Muestra también las relaciones de dependencia entre dos magnitudes, en este caso, entre la longitud del lado del cuadrado y el perímetro de la figura, y entre la longitud del lado del cuadrado y el área de la figura. Esta constatación lleva a los estudiantes a concluir que no todas las dependencias son linealmente proporcionales, lo que se hace evidente cuando calculan y comparan los perímetros y las áreas de las figuras en ambas tablas.

Para realizar esta actividad u otra similar se pueden emplear croquis o mapas y reproducir los dibujos usando escalas para ampliarlos o reducirlos.

- Se deben vincular los números y las nociones de proporcionalidad con situaciones cotidianas y reales. Por ejemplo, los estudiantes pueden llevar sus recibos de luz y agua para analizar los costos por kw.h o por m^3 consumido y concluir cuánto se pagaría si se consumiese el doble de agua o la mitad, etc. A continuación, se presenta la simulación de un recibo de consumo de luz y algunas preguntas que permiten desarrollar un ejercicio con los estudiantes:

Empresas de Distribución Eléctrica — **Agosto**

Propietario: [illegible]
Usuario: Miguel Acevedo Román
Dirección: Calle Julio Vázquez P. 128, San Borja
Nº Recibo: [illegible]
Ruta: [illegible]

DATOS DEL SUMINISTRO

Alimentador: PA-06
Poten. Contratada: [illegible]
Medidor: MONOFÁSICO
Conexión: SUBTERRÁNEA

DETALLE DEL CONSUMO

Lectura actual (09/08/05)	1060
Lectura anterior (09/07/05)	842
Factor	1
Consumo kw.h	218
Precio Unitario S/. kw.h	0,3336

DETALLE DE LOS IMPORTES FACTURADOS

Cargo por Energía	72,72
Cargo Fijo	2,06
Alumbrado Público	7,10
Reposición y Mantenimiento de Conexión	0,81
Interés Compensatorio	1,12
SUBTOTAL DEL MES	83,81
I.G.V.	15,88
TOTAL IMPORTES POR CONSUMO	S/. 99,49

FECHA DE EMISION	FECHA DE VENCIMIENTO	TOTAL A PAGAR
09/AGO/2005	24/AGO/2005	S/.*******99,49

Observa el recibo de luz y responde las siguientes preguntas:

- En el detalle de consumo, ¿cuál es la lectura del presente mes (actual)?
- En el detalle de consumo, ¿cuál es la lectura del mes pasado (anterior)?
- ¿Cuántos kw.h se han consumido entre el 9-7-2005 y el 9-8-2005?
- Si el cargo por energía correspondiente al consumo del mes es de S/. 72,72, ¿cuánto cuesta un kw.h?
- Si en el siguiente mes se consume 250 kw.h, ¿cuánto se pagará por cargo de energía?
- ¿Cuántos kw.h se deberá consumir para pagar solo S/. 66,72?

5.2. Pensamiento algebraico

Los resultados de la prueba de Matemática nos muestran que los estudiantes de quinto grado presentan dificultades en el manejo del álgebra y las funciones. Estas dificultades se identifican al:

- Resolver problemas de enunciado verbal que demandan interpretar y recodificar situaciones mediante el uso del lenguaje algebraico, es decir, en las que el estudiante debe plantear ecuaciones e inecuaciones lineales o modelar, interpretar o graficar situaciones utilizando la noción de función en sus diversas representaciones. Los estudiantes presentan dificultades, específicamente, para recodificar situaciones mediante el empleo de expresiones algebraicas como ecuaciones o funciones. Se ha identificado la tendencia a asociar el orden de lectura de las palabras (de izquierda a derecha) con el orden al traducir enunciados; por ejemplo, los estudiantes entienden «hay seis veces más estudiantes que maestros» como «6E = M», en lugar de «E = 6M». Algunas investigaciones encuentran que son llevados a esta interpretación incorrecta pues consideran los símbolos «E» y «M» como representaciones de «estudiantes» y «maestros», en lugar de «el número de estudiantes» y «el número de maestros». Esta situación es consecuencia de una concepción didáctica que considera que, para el dominio del álgebra, la «traducción palabra por palabra» es la vía adecuada para pasar del lenguaje verbal al algebraico (o viceversa), que no considera que la unidad de significado en el lenguaje verbal es la oración y no la palabra.
- Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales con un nivel de signos de agrupación o sin signos de agrupación, con coeficientes en el conjunto de los números racionales. También presentan dificultades al simplificar expresiones algebraicas, pues no jerarquizan correctamente el orden de las operaciones ni los signos de agrupación. Además, no interpretan adecuadamente la relación de equivalencia que guardan los dos miembros de una ecuación, pues incurren en errores al transponer los términos y al despejar la incógnita. Esto ocurre porque, al no haber comprendido en forma adecuada esta relación de equivalencia y sus implicancias, los procedimientos algorítmicos y las reglas prácticas se confunden o se olvidan con facilidad, lo que lleva a errores al resolver las ecuaciones.
- Utilizar la noción de variable como símbolo que puede representar diversos números, representar patrones y denotar dependencias funcionales (representar argumentos en funciones), pues se ha encontrado que la mayoría de estudiantes solo utiliza las letras (variables) como incógnitas en ecuaciones.
- Usar la noción de función, pues no han logrado la comprensión de esta ni como una regla o fórmula para calcular imágenes y/o preimágenes, ni como una correspondencia entre dos variables, ni como un medio para modelar situaciones. No interpretan el sentido de lo que es una función, no recodifican funciones en sus diversas representaciones, no identifican los elementos de estas (dominio y rango), no asocian una función lineal a una gráfica lineal o una función cuadrática a la gráfica de una curva no rectilínea. Los estudiantes no grafican una función lineal o cuadrática a partir de su ecuación, aun cuando se les presenta la idea de tabular previamente algunos valores enteros del dominio. Asimismo, tienen dificultades para hallar la ecuación que corresponde a una gráfica lineal dada. Muy pocos estudiantes intentan calcular inicialmente la pendiente para, a partir de esta, calcular la ecuación. Se observan también dificultades en la comprensión del significado

de la pendiente de una recta pues, al calcularla, los estudiantes dan como respuesta pares ordenados provenientes de las coordenadas de los extremos de dichos segmentos. La mayoría de estudiantes no identifica los puntos de paso de una recta.

- Interpretar situaciones representadas mediante el uso de funciones lineales, cuadráticas o racionales. Asimismo, presentan dificultades al calcular los valores de las imágenes o las preimágenes de estas funciones en valores enteros del dominio o el rango. Además, no interpretan situaciones, ni las modelan, empleando ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, funciones lineales, cuadráticas o racionales.

A partir de los resultados obtenidos en la prueba, se pueden elaborar varias hipótesis acerca de las causas de las limitaciones encontradas. Así, se podría decir que la mayoría de estudiantes peruanos muestra un pensamiento algebraico centrado en el manejo de los procedimientos algebraicos básicos (como la resolución algorítmica de ecuaciones) y todavía no logra el desarrollo de un pensamiento analítico que emplee el álgebra para describir situaciones, comportamientos, objetos geométricos, etc. Esto puede deberse a que la mayoría de las actividades didácticas en el aula está enfocada a trabajar y reforzar esta visión algorítmica y mecánica del álgebra.

Por otro lado, el documento *Oportunidades de aprendizaje de quinto grado* (ODA5SM),[36] señala que el 44% de los estudiantes cuenta con docentes que desarrollan en forma introductoria actividades que involucran el uso de funciones cuadráticas y lineales para resolver problemas; mientras que otro 45% de los estudiantes no tiene oportunidad de realizar estas actividades porque sus docentes no las propician. Además, se encontró que el 20% de los estudiantes tiene docentes que consideran que algunos problemas propuestos en la EN 2004 (aquellos cuya solución demanda encontrar el valor puntual de una función) son difíciles de resolver por sus estudiantes; sin embargo, el 69% de los estudiantes tiene docentes que no promueven la resolución de este tipo de problemas. Por otro lado, solo el 10% de los estudiantes se ve enfrentado a situaciones problemáticas que demandan traducir al lenguaje matemático una situación de contexto real mediante el uso de funciones reales.

Se puede concluir que un considerable porcentaje de docentes no enfrenta a sus estudiantes a situaciones problemáticas o actividades que involucran el uso de las principales nociones del álgebra y las funciones, lo cual refuerza la idea de que el enfoque está orientado a desarrollar actividades algorítmicas y mecánicas.

Podría esbozarse como hipótesis complementaria que, desde los primeros grados de la educación primaria y hasta los primeros grados del nivel secundario, se proponen a los estudiantes situaciones matemáticas cuya naturaleza de solución está centrada en encontrar respuestas que siempre existen, que son numéricas, particulares y, por lo general, únicas. Por el contrario, en el estudio del álgebra se debería enfrentar al estudiante a otro enfoque: establecer procedimientos y relaciones y expresarlos de una forma general para que sean válidos en distintos casos. Muchas veces los docentes no ponen énfasis en el cambio de enfoque, por lo que muchos estudiantes no son advertidos, al iniciarse en el estudio del álgebra, de este enfoque distinto y, al no trabajar con la profundidad y tiempo necesarios para lograrlo, continúan creyendo que deben dar respuestas numéricas.

---

36. Cuestionario aplicado a los docentes del área de Matemática de los estudiantes evaluados.

Por esta razón, cuando se les pide en la prueba, por ejemplo, que planteen una ecuación que sea de primer grado y que tenga a «*x*» como incógnita, o que modelen una situación usando expresiones algebraicas, o que calculen el valor de una función en un punto a partir de la gráfica de esta, un considerable porcentaje de estudiantes da como respuesta números o expresiones numéricas o señala que le faltan datos.

Quizás uno de los aspectos más importantes para la construcción de las principales nociones algebraicas (variable, función, etc.) es la concepción que se tenga sobre el álgebra. Z. Usiskin (citado por Haetinger y Kettermann 2002) propone las concepciones siguientes:

Concepciones sobre el álgebra

1) Concepción del álgebra como aritmética generalizada.
2) Concepción del álgebra como estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas.
3) Concepción del álgebra como estudio de las relaciones entre cantidades.
4) Concepción del álgebra como estudio de las estructuras.

Estas diferentes concepciones del álgebra están asociadas a las diversas nociones y usos de elementos, como en el caso de la variable. A continuación se presenta un cuadro, adaptado de Z. Usiskin, que muestra la relación entre estas concepciones y el uso de la variable.

Uso de la variable según las distintas concepciones del álgebra

CONCEPCIÓN DEL ÁLGEBRA	USO DE LA VARIABLE SEGÚN LA CONCEPCIÓN	PROCESOS
Aritmética generalizada	Generalizadora de regularidades	Traducir, generalizar
Modo de resolver ciertos problemas	Incógnitas, constantes	Resolver, simplificar
Estudio de relaciones	Argumentos, parámetros	Relacionar, graficar
Estructura	Signos arbitrarios en el papel	Manipular, justificar

Fuente: Adaptado de Haetinger y Kettermann 2002.

En el cuadro anterior se muestran las diferentes concepciones del álgebra y el uso que se da a la variable de acuerdo con cada una. Por ejemplo, un estudiante que, a partir de su experiencia escolar con la matemática, tiene la concepción del álgebra como «modo de resolver ciertos problemas», usa las variables como incógnitas o constantes para, por ejemplo, plantear ecuaciones. Esta noción de variable no permite al estudiante emplear las variables para representar relaciones entre estas, es decir, para representar argumentos; por lo tanto, no podrá desarrollar alguna noción de función, ni usar las variables como signos para realizar manipulaciones, justificaciones o demostraciones, etc.

En el siguiente cuadro, que presenta diversas expresiones algebraicas, se puede apreciar con mayor claridad el uso de las variables que se da en cada uno de los casos.

Uso de variables en distintas expresiones algebraicas

EXPRESIÓN ALGEBRAICA	TIPO DE EXPRESIÓN ALGEBRAICA	USO DE LA VARIABLE
1) A = b x h	Fórmula	Las variables A, b y h representan el área, base y altura, respectivamente, teniendo estos el carácter de «elementos» conocidos, que solo hay que reemplazar. Cada letra es casi una «inicial» que hay que reemplazar con un número para hallar el resultado.
2) $50x = 40$	Ecuación	«*x*» representa a la incógnita que hay que calcular. La naturaleza de la solución es numérica y única.
3) $sen(x) = \cos(x).\tan(x)$	Identidad	«*x*» representa el argumento que, en este caso, indica el ángulo para cada una de las funciones trigonométricas. En esta identidad no se obtendrán respuestas numéricas, sino que se obtendrán expresiones.
4) $1 = n\left(\frac{1}{n}\right)$	Propiedad[37]	«*n*» es una variable y la expresión generaliza un modelo aritmético, donde «*n*» es un caso particular que puede tomar varios valores.
5) $y = kx$	Ecuación de una función	«*x*» es el argumento de la función que puede tomar varios valores reales; *k* es un parámetro. En este caso, $(x; y)$ puede tomar cualquier punto del plano cartesiano.

Fuente: Adaptado de Haetinger y Kettermann 2002.

37. Si bien la expresión 4 es una identidad, se le llama «propiedad» para distinguirla de la expresión 3.

En el cuadro anterior, solo en el caso 5 se presenta la característica de variabilidad y dependencia entre las variables «x» e «y»; además, la ecuación de la recta tendrá una pendiente diferente para cada uno de los valores del parámetro «k».

Como se indicó en la descripción del nivel previo, los estudiantes de este nivel emplean las letras, en el mejor de los casos, como incógnitas que representan números desconocidos que deberán calcular a partir de una ecuación (caso 2), como se muestra a continuación en las respuestas de algunos estudiantes a la pregunta M5S02.[38]

> En una ciudad, el alquiler de motos cuesta S/. 20 el día más S/. 0,50 por kilómetro recorrido.
>
> Halla la expresión que representa el costo de alquilar una moto durante un día para un recorrido de **x** kilómetros.

Respuesta A

Escribe aquí tu procedimiento

$20 + 0,5x = 1$

Respuesta B

Escribe aquí tu procedimiento

$x = 20 + 0,5$

$x = \underline{25,1}$

Sería 25 de "x"

En las respuestas A y B, se evidencia que los estudiantes asocian el uso de las ecuaciones como estrategia para enfrentarse a este tipo de situaciones. Este uso de las variables es una limitación que genera dificultades, pues restringe la noción de variable a la noción de incógnita. Así, este grupo de estudiantes difícilmente comprenderá la naturaleza de expresiones del tipo 5, es decir, no comprenderá la noción de función.

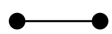
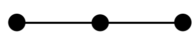
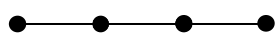
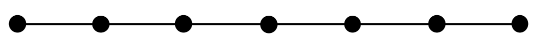
38. Ejemplo M5S02 en la página 121 de este informe.

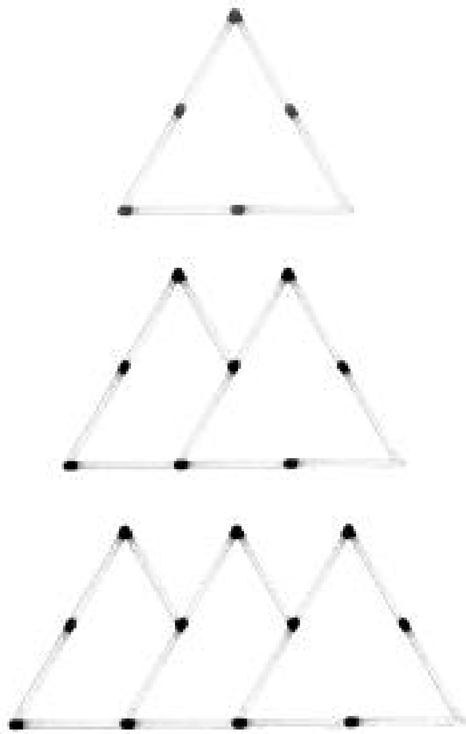
SUGERENCIAS

- Se debe dar sentido y significado al símbolo algebraico antes de que el estudiante comience a estudiar álgebra, es decir, se debe introducir en situaciones y contextos que le sean cercanos y significativos. El distanciamiento del sentido y de la significación tiene como consecuencia un énfasis en la aplicación de reglas para simplificar expresiones y/o resolver ecuaciones, lo que implica que los estudiantes manipulen los símbolos usando reglas y normas que no tienen mayor sentido para ellos, aunque las puedan memorizar sin mayor problema. Se debe hacer todo lo posible para que el álgebra surja *de* y *para* la resolución de problemas, pues se ofrecen así contextos y situaciones cercanas al entorno del estudiante que proporcionan sentido y significado al símbolo algebraico. La comprensión y el dominio del álgebra deben surgir en el pensamiento del estudiante de la misma manera como surgió en la historia de las distintas culturas: ligada a la resolución de problemas.

  Uno de los caminos para que los estudiantes puedan acercarse de manera natural al álgebra es enfrentarlos a situaciones problemáticas que los lleven al reconocimiento de patrones y a la generalización. Se pueden usar contextos geométricos, aritméticos, etc. que permiten el empleo de situaciones cercanas, concretas y significativas para los estudiantes. A continuación se presentan tres ejemplos.

Completa la siguiente tabla:

	NÚMERO DE SEGMENTOS	NÚMERO DE PUNTOS
	1 segmento	2 puntos
	2 segmentos	
	3 segmentos	
		
	N segmentos	



a) Completa lo siguiente:

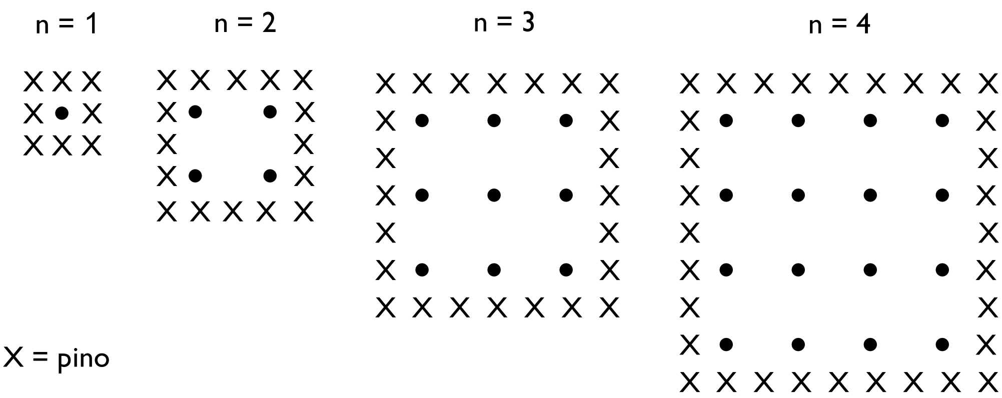
Número de triángulos		Número de fósforos
1	→	6
2	→	10
3	→	
4	→	
5	→	
12	→	
100	→	
200	→	

b) Explica con palabras, en cada caso, ¿cómo obtienes el número de fósforos a partir del número de triángulos?

c) Si *n* representa el número de triángulos, ¿cómo expresarías el número de fósforos?

Un agricultor planta manzanos en un esquema cuadrado. Para proteger los árboles del viento, él planta pinos alrededor de todo el huerto.

Aquí, ves un diagrama de esta situación, donde se presentan los cuadrados de manzanos y de pinos para algunos números (n) de filas de manzanas:



X = pino

● = manzano

1. Completa la tabla:

n	NÚMERO DE MANZANOS	NÚMERO DE PINOS
1	1	8
2	4	
3		
4		

2. Hay dos fórmulas que puedes usar para calcular el número de manzanos y de pinos para el esquema descrito anteriormente:

   Número de manzanos = n^2
   Número de pinos = $8n$

   Donde *n* es el número de filas de manzanos.

   Hay un valor de *n* para el cual el número de manzanos es igual al número de pinos. Encuentra el valor de *n* y muestra el método que usaste para calcularlo.

3. Supongamos que el agricultor quiere hacer un huerto mucho más grande con muchas filas de árboles. A medida que el agricultor agranda el huerto, ¿qué aumentará más rápidamente: el número de manzanos o el número de pinos? Explica cómo encontraste tu respuesta.

Fuente: Asmad y otros 2004.

Esta última pregunta permite a los estudiantes interpretar expresiones que contienen palabras y símbolos matemáticos y relacionar diferentes representaciones (pictórica, verbal y algebraica) de dos relaciones (una cuadrática y una lineal). Los estudiantes pueden buscar y usar diversas estrategias de solución, por ejemplo, por ensayo y error o por patrones (por medios algebraicos), y comunicar el resultado haciendo explícitos el razonamiento y los pasos de cálculo involucrados.

Además, se requiere que los estudiantes muestren una comprensión global de las funciones matemáticas para comparar el crecimiento de una función lineal con el de una función cuadrática (Asmad y otros 2004).

- Ofrecer al estudiante situaciones cotidianas para que las represente mediante el lenguaje algebraico. Por ejemplo:

  Situación 1: «El número de estudiantes es seis veces mayor que el número de docentes.»

  Situación 2: «Juana tiene el triple del dinero que tiene Irma.»

  Situación 3: «El número de personas es tres veces mayor que el número de gaseosas.»

  El docente debe guiar al estudiante para que comprenda las situaciones dadas en tres fases: comprensión cualitativa, comprensión cuantitativa y comprensión conceptual.

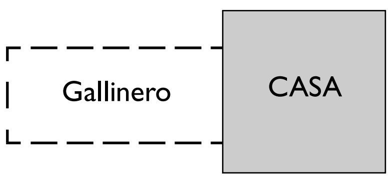
FASES	TAREAS	SITUACIÓN 1	SITUACIÓN 2	SITUACIÓN 3
		«El número de estudiantes es seis veces mayor que el número de docentes.»	«Juana tiene el triple del dinero que tiene Irma.»	«El número de personas es tres veces mayor que el número de gaseosas.»
Fase 1 COMPRENSIÓN CUALITATIVA	Se plantean a los estudiantes las siguientes preguntas:	¿Hay más estudiantes o más maestros?	¿Quién tiene más dinero Juana o Irma?	¿Hay más gaseosas o más personas?
Fase 2 COMPRENSIÓN CUANTITATIVA		Supón que había 100 maestros, ¿cuántos estudiantes hay?	Supón que Juana tiene S/. 30, ¿cuánto tendrá Irma? Supón que Irma tiene S/.12, ¿cuánto tendrá Juana?	Supón que hay 10 gaseosas, ¿cuántas personas hay? Supón que hay 60 personas, ¿cuántas gaseosas hay?
Fase 3 COMPRENSIÓN CONCEPTUAL	Los estudiantes escriben una ecuación que representa el enunciado propuesto:	$E = 6M$ Donde: M = Número de maestros E = Número de estudiantes	$J = 3I$ Donde: J = Cantidad de dinero que tiene Juana I = Cantidad de dinero que tiene Irma	$P = 3G$ Donde: P = Número de personas G = Número de gaseosas

Se debe presentar en el aula preguntas de este tipo mediante un diálogo en el que el docente no ofrezca las respuestas correctas, sino que guíe la búsqueda de estas por parte de los estudiantes. Estas preguntas se plantean con el fin de eliminar las contradicciones que son resultado de sus propias concepciones. El objetivo más importante en esta etapa no es hacer que los estudiantes escriban la ecuación apropiada, sino que enfrenten sus concepciones y las cambien. Antes de que los estudiantes escriban la ecuación, se les puede pedir que expresen la situación verbalmente, con sus propias palabras.

Las fases presentadas en la tabla anterior son similares a las fases de resolución de situaciones problemáticas propuestas por Polya en 1945: familiarización y comprensión de la situación, búsqueda de estrategias y elaboración de un plan, ejecución del plan y control, y visión retrospectiva. En las fases 1 y 2 de la tabla, el estudiante trata de comprender la situación, explorándola por medio de casos particulares. Entre la fase 2 y la fase 3, el estudiante debe buscar estrategias que le permitan llevar la situación al lenguaje algebraico. En la fase 3, el estudiante ejecuta su estrategia para lograr la simbolización. La visión retrospectiva propuesta por Polya, que no está incluida en la tabla anterior, deberá ser guiada y desarrollada por el docente, luego de la fase 3, mediante preguntas del tipo: ¿Cómo has llegado a la solución? ¿Por qué no has llegado a la solución? ¿Es este el modo más simple? ¿Se podrá usar el método en otros casos? ¿Existe otra manera más sencilla de hacerlo? ¿Qué sentiste? ¿Qué pensaste? ¿Qué aprendiste?

- Otra forma de introducir el álgebra es mediante situaciones que relacionen dos magnitudes. En este tipo de problemas, se introduce a los estudiantes a las primeras nociones de funciones, pues se hace evidente que existe una relación de dependencia entre dichas magnitudes. A continuación se muestra un ejemplo:

Un granjero dispone de 40 m de alambre para cercar un gallinero de forma rectangular. Este gallinero debe tener un lado colindante con la casa de tal forma que no necesite cerca, como se muestra a continuación:



Como el granjero quiere utilizar los 40 m de alambre, estudia cuáles son las posibles dimensiones del gallinero.

a) Completa la siguiente tabla:

Medida del lado del gallinero lindante con la casa (en m)	2	3	5	5,5	7	9	11,5	13	15
Medida del otro lado del gallinero (en m)									
Área del gallinero (en m^2)									

b) Si el lado del gallinero lindante con la casa es *x*, ¿cuál es la medida del otro lado?, ¿cuál es el área?

Se puede complementar esta actividad pidiendo a los estudiantes que grafiquen en el plano cartesiano los puntos correspondientes a la tabla que completaron (medida del lado lindante con la casa versus el área del gallinero, o medida del otro lado del gallinero frente al área del gallinero).

- Muchos de los errores comunes de los estudiantes provienen de un mal aprendizaje o de un aprendizaje incompleto de las propiedades y operaciones aritméticas. Si estos temas no son tratados en forma apropiada, los errores de concepción en la aritmética pueden llevar a problemas en el álgebra. Para entender la generalización de las relaciones y procedimientos de la aritmética, se necesita primero que tales relaciones y procedimientos se aprendan dentro del contexto aritmético. En este sentido, las dificultades del estudiante en el estudio del álgebra no son puramente «dificultades en álgebra», sino también «dificultades en aritmética» que no se trabajaron o no se corrigieron. Por ejemplo, los errores en la suma de fracciones se ven reflejados directamente en errores al sumar expresiones racionales.

  Por otro lado, diferentes reglas de representación, o las mismas expresiones usadas en álgebra y en aritmética, se contradicen o representan elementos diferentes. Por ejemplo, el signo «=» se usa en contextos aritméticos para denotar la equivalencia en el valor numérico de dos expresiones (3 + 6 = 9); mientras que en álgebra se emplea para denotar equivalencias entre identidades, igualdades limitadas a ciertos valores de las variables, definiciones, etc. Igualmente, dos números juntos en aritmética representan sumas (17 = 10 + 7, o $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$), a diferencia del álgebra, en que «ab» representa a x b, o la expresión 3 m en aritmética representa 3 metros y en álgebra 3m representa 3 x m. Se sugiere no abandonar muy pronto la notación del tipo 2 x m y postergar la notación 2m, lo que ayudaría no solo a disminuir la tendencia de los estudiantes a escribir números o letras contiguas para expresar adiciones, sino que podría favorecer la comprensión del papel de las letras como variables que representan números.

- Se debe elegir situaciones en las que se haga explícito para el estudiante que en el álgebra, a diferencia de la aritmética escolar, la naturaleza de las soluciones puede ser variada, es decir, las respuestas pueden ser tanto numéricas como expresiones; por ejemplo: x + y, x = y + 2, etc.

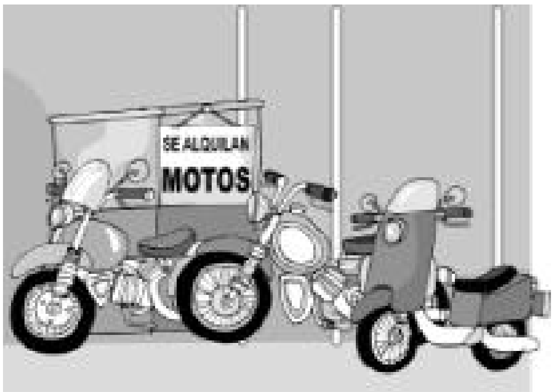
- Se debe poner atención no solo a la representación algebraica sino, sobre todo, a desarrollar en los estudiantes las nociones de igualdad, variable, función, representación y modelación de situaciones y fenómenos mediante el uso del lenguaje algebraico y de la representación gráfica.

- Se deben hacer explícitas las diferencias entre los usos de las «letras»: en algunos casos son usadas como incógnitas y en otros, por ejemplo, como unidades de medida (metros, centímetros, etc.) Por otro lado, se debe explicitar que las variables no solo representan incógnitas de un único valor numérico sino que, además, representan números generalizados y/o argumentos, o sirven para describir algunas características o propiedades (por ejemplo, $x \in [a, b]$).

- Para introducir la noción de variabilidad y de dependencia entre variables (nociones de relaciones o funciones), se sugiere el empleo de situaciones cotidianas como, por ejemplo, establecer la relación entre el costo de una llamada y su duración, o entre la cantidad de combustible necesaria para hacer un recorrido y la distancia que se debe recorrer. También se puede realizar la representación gráfica de estas situaciones por medio de puntos en el plano cartesiano.

La siguiente situación puede contribuir a comprender esta noción.

En una ciudad, el alquiler de motos cuesta S/. 20 el día más S/. 0,50 por kilómetro recorrido.



a) Completa la siguiente tabla:

Distancia recorrida en un día de alquiler (en km)	10	20	37	45	55
Costo de alquiler (en S/.)					

b) Si x representa la distancia recorrida en un día de alquiler (en km). ¿Qué otros valores puede tomar x? Completa la tabla:

x: Distancia recorrida en un día de alquiler (en km)					
Costo de alquiler (en S/.)					

c) Grafica en un plano cartesiano los puntos obtenidos en las tablas.

d) Halla la expresión que representa el costo de alquilar una moto durante un día para un recorrido de x kilómetros.

- Cuando el docente trabaja con gráficas de funciones o relaciones, se suele poner el énfasis en que los estudiantes desarrollen habilidades técnicas, por ejemplo, uso de pares ordenados, escalas, máximos, mínimos, etc. Sin embargo, se descuida el aspecto de la comprensión e interpretación del significado de las gráficas y de la interrelación existente entre las variables. Para contribuir a que docentes y estudiantes se alejen de ese tipo de problemas, se pueden presentar gráficas sin escalas en los ejes e interpretar su significado y sus elementos. Si se incluyen las escalas, los estudiantes tienden a leer los valores y tratan de resolver el problema sin considerar aspectos como las posiciones relativas entre los puntos, la ubicación, comparación de máximos y mínimos relativos o absolutos, pendientes, etc.

5.3. Pensamiento geométrico

Se ha encontrado que los estudiantes de quinto grado presentan dificultades en el manejo de las nociones de la geometría y de la trigonometría al:

- Resolver situaciones problemáticas rutinarias de pocas etapas que involucran el uso de figuras geométricas planas elementales, sólidos geométricos básicos y algunas de sus propiedades más elementales.
- Resolver situaciones problemáticas rutinarias de pocas etapas referidas a triángulos que se abordan mediante el uso de razones trigonométricas, pues no relacionan adecuadamente ángulos y lados en triángulos rectángulos ni al usar las relaciones de los triángulos notables más usuales ni al usar razones trigonométricas. Del bajo porcentaje de estudiantes que sí emplea estas definiciones, la mayoría evidencia en sus respuestas que lo hace en forma mecánica y repetitiva.
- Relacionar las propiedades o atributos de una misma o de diferentes figuras o sólidos geométricos entre sí y al realizar conexiones entre los diversos contenidos de este campo conceptual. Por ejemplo, no pueden calcular el área de un cuadrado a partir de su perímetro.
- Calcular áreas de figuras geométricas elementales en los casos en los que se requiere aplicar directamente la fórmula, pues no tienen incorporada la noción de área ni recuerdan la fórmula correspondiente.
- Interpretar el Teorema de Pitágoras, pues no identifican los elementos de los triángulos rectángulos correctamente, sobre todo en triángulos rectángulos que no presentan uno de sus catetos paralelo a la horizontal. La mayoría de estudiantes que usa correctamente este teorema evidencia aplicarlo en forma mecánica para calcular un lado a partir de los otros dos.

Las capacidades relacionadas con estos contenidos se desarrollan, sobre todo, en cuarto grado de secundaria de acuerdo con el DCB;[39] sin embargo, al llegar a quinto grado, un gran porcentaje de los estudiantes no ha adquirido las habilidades ni ha interiorizado las nociones de este eje temático. Estas dificultades pueden deberse a que se prioriza la enseñanza de contenidos y de algoritmos para calcular distancias, medidas de lados o segmentos, áreas y volúmenes y la resolución de problemas tipo desconectados de situaciones que sean cotidianas para el estudiante. Se fomenta así el aprendizaje de recetas y procedimientos mecánicos y no la comprensión de los conceptos, lo que trae como consecuencia el «olvido» de lo aprendido en un plazo breve. Otra causa, que se añade a la anterior, es que la enseñanza tiende a ser compartimentalizada, pues no demanda que los estudiantes realicen conexiones entre los contenidos del área, entre las distintas áreas, y entre lo aprendido en el aula y la realidad.

Por otro lado, se da más importancia a lo semiótico que a lo semántico, es decir, se trabaja sobre todo terminología, notación y definiciones formales, y se deja de lado el trabajo y la manipulación de material concreto. Precisamente es este tipo de trabajo el que puede conseguir que el estudiante logre visualizar y comprender las definiciones, las propiedades y las principales nociones involucradas en este eje temático, para después enunciarlas formalmente.

39. DCB vigente hasta el año 2004.

De acuerdo con el cuestionario *Oportunidades de aprendizaje de quinto grado* (ODA5SM), el 85% de los estudiantes cuenta con docentes que trabajan en profundidad actividades relacionadas con la identificación y el cálculo de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Asimismo, el 49% de los estudiantes tiene docentes que promueven con frecuencia la resolución de problemas que involucran el cálculo de estas razones y solo un 5% señala no hacerlo. Por otro lado, el 58% de los estudiantes tiene docentes que consideran que ejercicios similares a los propuestos en la EN 2004 (que demandan el cálculo de una razón trigonométrica de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo) son fáciles de resolver por los estudiantes. Sin embargo, el trabajo con ejercicios y problemas que los docentes indican que desarrollan con sus estudiantes y las expectativas que tienen acerca de su desempeño en este contenido no se ven reflejados en los resultados de esta evaluación. Una vez más, esta situación da cuenta del tipo de enseñanza y del tipo de conocimiento que el docente transmite a sus estudiantes: una enseñanza basada en la repetición algorítmica y mecanizada de recetas y en la resolución de problemas tipo, descontextualizados de una realidad cercana para el estudiante; y una enseñanza compartimentalizada que no plantea establecer relaciones ni conexiones entre las diversas redes conceptuales. Además, la contradicción entre lo que los docentes manifiestan y las dificultades de sus estudiantes podría reflejar una de las estrategias de enseñanza más usadas: las clases expositivas en las que los docentes desarrollan los contenidos y los estudiantes son solo receptores de los nuevos conocimientos. En clases como estas, es esperable que los docentes consideren que sí han enfrentado a sus estudiantes con situaciones problemáticas; sin embargo, estos no han participado de manera activa en la resolución de las situaciones, ni han recorrido las fases de resolución de los problemas, ni han logrado desarrollar las capacidades que sí se desarrollarían si el estudiante se enfrentara por sí solo a verdaderas situaciones problemáticas.

Es usual que, cuando se les presenta a los estudiantes una verdadera situación problemática, los docentes comenten que, a pesar de lo mucho que explicaron, la mayoría de estudiantes no logró comprender nada o casi nada. Esta situación se explica por la existencia en una misma aula de diferentes niveles de desarrollo del pensamiento matemático. El Modelo de Van Hiele, que se presenta a continuación, trata de identificar estos diferentes niveles de razonamiento geométrico en los estudiantes.

Modelo de Van Hiele

Este modelo, desarrollado por Marie van Hiele y Dina van Hiele-Geldof (Jaime y Gutiérrez 1990), busca identificar y explicar los diferentes niveles de pensamiento o de razonamiento, en particular para la geometría. A continuación se exponen sus ideas centrales:

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de desarrollo en el pensamiento matemático de un grupo de estudiantes.
- Un estudiante solo puede comprender realmente aquellas nociones o partes de la matemática que son adecuadas para su nivel de razonamiento.
- Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento del estudiante, se tiene que esperar a que este alcance el nivel de pensamiento adecuado para comprender tal noción o concepto.
- No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de la matemática, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

A continuación, se presenta la clasificación de los niveles de razonamiento propuestos en el Modelo de Van Hiele y su descripción.

Niveles de razonamiento

Nivel 1: Visualización o reconocimiento

Este es el nivel más elemental de razonamiento. En esta etapa los estudiantes perciben las figuras geométricas globalmente, como un todo, como unidades: se limitan a describir los objetos por su aspecto o apariencia física o por su posición y no por sus partes o propiedades. Las clasificaciones o diferenciaciones de figuras que realizan se basan principalmente en semejanzas o diferencias físicas globales entre ellas, por ejemplo, formas, colores o tamaños. En este nivel no debemos esperar respuestas formales en las descripciones referidas, por ejemplo, al paralelismo o a los ángulos o al número de vértices en una figura.

Nivel 2: Análisis

En este nivel empieza el análisis de los conceptos geométricos, es decir, los estudiantes ya conocen los elementos, propiedades y características de los objetos geométricos estudiados; sin embargo, no son capaces de relacionar una propiedad con otra. Por ejemplo, para describir figuras dan respuestas referidas a ángulos rectos, paralelismos, etc., es decir, una lista de propiedades inconexas. En este nivel de desempeño, los estudiantes son capaces de descubrir algunas propiedades básicas (a partir de la observación y manipulación) y de generalizar estas propiedades a objetos geométricos del mismo tipo. El no relacionar las propiedades entre sí hace que aún no clasifiquen adecuadamente las familias de polígonos; por ejemplo, siguen considerando que los cuadrados no son rectángulos (no pueden realizar inclusiones de clases de polígonos).

Nivel 3: Deducción informal o de clasificación

En este nivel de desempeño comienza a desarrollarse la capacidad de razonamiento formal matemático. Los estudiantes ya pueden establecer relaciones entre propiedades y características de los objetos geométricos y pueden deducir algunas propiedades a partir de otras (implicaciones sencillas). Pueden comprender una demostración del docente o pueden entenderla en un texto, pero no son capaces de realizar una demostración por ellos mismos, pues perciben estos pasos sucesivos en forma aislada, es decir, no comprenden la estructura de la demostración por lo que no ven la necesidad de relacionar estos diferentes pasos. En este nivel de razonamiento los estudiantes están en la capacidad de dar definiciones exactas y formales sin necesidad de redundar en las propiedades o características de los objetos, como sucedía en el nivel anterior.

Nivel 4: Deducción formal

En este nivel de razonamiento los estudiantes pueden comprender y construir una prueba o una demostración matemática mediante axiomas, teoremas, etc. En este nivel se logra la plena capacidad del razonamiento lógico matemático.

Estos niveles de desempeño no pueden ser atados a algún grado escolar, pues cada vez que se presenten nuevos conceptos o contenidos el estudiante tendrá que pasar por cada uno de estos niveles. Algunas veces este paso será muy rápido y otras tomará un poco más de tiempo; sin embargo, a pesar de que el paso por estos niveles es independiente del método empleado, es el docente quien debe brindar oportunidades para que un estudiante pase de un nivel a otro. Podemos agregar que existen algunas formas de enseñanza que no permiten que los estudiantes alcancen niveles superiores de razonamiento. Por otro lado, el que una persona se encuentre en el nivel 2 implica necesariamente que ha pasado por el nivel 1 y lo mismo ocurre con los otros niveles de razonamiento; aunque un estudiante que memorice o haya aprendido de manera mecánica los procedimientos propios de un determinado nivel puede brindar la falsa impresión de que su razonamiento pertenece a ese nivel cuando, en realidad, pertenece a un nivel inferior, pues no comprende realmente los procesos implicados.

Mediante el análisis de las preguntas que los estudiantes contestan y de sus estrategias, se ha podido identificar las habilidades desarrolladas y los conocimientos incorporados por los estudiantes de quinto grado de secundaria en varios ejes temáticos, particularmente en geometría. Observamos que un alto porcentaje de los estudiantes de quinto grado se encuentra aún en el nivel de razonamiento 2, es decir el nivel de análisis, lo que implica que la mayoría de nuestros estudiantes no puede realizar conexiones entre las propiedades o atributos de un mismo o de diferentes objetos geométricos.

SUGERENCIAS

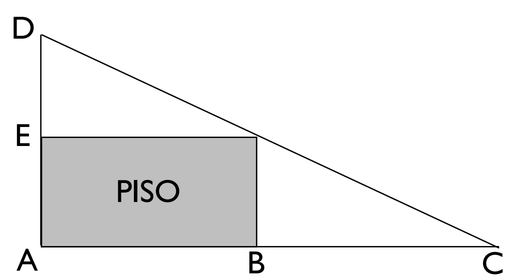
- El docente debe emplear todas las herramientas necesarias para identificar el nivel de razonamiento de cada uno de los estudiantes con los que trabaja en el aula (véase Jaime y Gutiérrez 1990). Una vez identificado el nivel, puede desarrollar secuencias de actividades estructuradas para que los estudiantes progresen de un nivel de razonamiento a otro y para que puedan superar sus deficiencias y dificultades.
- Se debe cambiar el enfoque de enseñanza de la geometría ligado sobre todo al cálculo de distancias, longitudes, áreas, volúmenes, etc. por un enfoque que priorice el desarrollo de habilidades y destrezas, es decir, la comprensión de las principales nociones geométricas. Este enfoque debe orientarse al establecimiento de relaciones entre las distintas nociones, a la visualización de elementos y propiedades, a la construcción de modelos, etc. que permitan a los estudiantes partir de diversas experiencias para complementar, ampliar y reacomodar sus redes conceptuales, de tal forma que puedan enfrentar con éxito situaciones problemáticas novedosas y reales.
- Se debe trabajar situaciones problemáticas significativas y actividades con material concreto o gráfico, realizar pruebas o demostraciones sencillas con papel; por ejemplo, demostrar, a partir de un papel de forma triangular, que la suma de ángulos internos de un triángulo es 180º, o que la suma de dos ángulos internos adyacentes en un triángulo es igual a la medida del ángulo externo no adyacente, o buscar los ejes de simetría de diversas figuras geométricas. Asimismo, se debe promover la construcción de figuras geométricas a partir del uso de lápiz, papel, compás, transportador, etc. para que los estudiantes refuercen la comprensión y el manejo de conceptos y propiedades de los objetos geométricos con el fin de resolver problemas.
- A partir del trabajo con material concreto se pueden introducir nuevas nociones. Por ejemplo, para introducir las nociones de proporcionalidad de segmentos y semejanza de figuras se puede desarrollar actividades como la siguiente:

- Pedir a los estudiantes que construyan un triángulo rectángulo con catetos de igual longitud y que comparen sus triángulos.
- Preguntar a los estudiantes: ¿Se puede construir más de un triángulo con esas propiedades?
- En caso de que la respuesta sea afirmativa (de hecho lo es), preguntar cómo se relacionan unos triángulos con otros.

También se puede realizar esta actividad, por ejemplo, con triángulos isósceles con un determinado ángulo. Se debe diseñar actividades que se ajusten a las necesidades del aula y del tema que se va a desarrollar.

- Los gráficos de las figuras no se deben presentar solo en posición estándar (la mayoría de textos y de ejemplos de los docentes en el aula suelen utilizar las figuras en estas posiciones). Por ejemplo: los triángulos son presentados con una base paralela a la horizontal; los cuadrados, con un lado paralelo a la horizontal; los triángulos rectángulos, con un cateto paralelo a la horizontal, etc. Este hecho introduce una dificultad, pues, de acuerdo con el primer nivel de razonamiento, un estudiante empieza a construir sus conceptos de manera global a partir de la imagen visual de objetos concretos, sin realizar un análisis de las definiciones matemáticas o formales que los describen. Por esta razón, se debería incluir ejemplos y contraejemplos para evitar crear una característica particular e innecesaria en las imágenes conceptuales de los objetos en estudio.
- Se deben trabajar situaciones problemáticas significativas que demanden que los estudiantes realicen conexiones entre los diversos contenidos del área. Por ejemplo:

Se tiene un terreno triangular cuyos lados miden 12 m, 16 m y 20 m. Se desea colocar en su interior un piso rectangular como se muestra en la figura.



1) ¿Cuál será el área si el lado AB del rectángulo mide 4 m?
2) ¿Cuál será el área si el lado AE del rectángulo mide 6 m?
3) Si se quiere que el área de dicho piso sea la mayor posible, ¿qué dimensiones debería tener el piso?

La pregunta 3 se puede abordar mediante el empleo de tablas de doble entrada (longitud de un lado vs. área del piso) y se puede realizar una gráfica de dichos puntos en el plano cartesiano. Este tipo de problemas permite que los estudiantes realicen conexiones entre los diversos contenidos del área. En este caso, se usan nociones de área de figuras geométricas básicas, de triángulos notables o de proporcionalidad entre segmentos, se emplean tablas, la noción de función y su representación gráfica en el plano cartesiano, etc. Las preguntas 1 y 2 permiten que el estudiante comprenda la situación y vaya elaborando una estrategia acerca de las longitudes del rectángulo a partir de casos particulares.

- Se debe brindar a los estudiantes oportunidades para relacionar los objetos geométricos con objetos reales de su entorno, es decir, para que puedan modelar situaciones reales haciendo uso de objetos geométricos.

- La trigonometría debe ser entendida en su contexto como una parte que guarda estrecha relación con los otros ejes de la matemática presentados en este informe. Es decir, no debe ser entendida como una subárea de la matemática, independiente y aislada de las otras. Tampoco debe ser reducida solo al cálculo de la medida de los lados de un triángulo a partir de sus ángulos. Para la etapa escolar, la trigonometría debe ser el estudio de las relaciones entre lados y ángulos de figuras, particularmente de triángulos, pero desde una perspectiva que nos permita contextualizarla y presentarla en situaciones cercanas y significativas para los estudiantes. Existe una serie de prerrequisitos para poder acceder a las nociones que demanda la trigonometría. Estos se relacionan con número y cantidad, con álgebra y funciones, y con espacio y forma. Así, la trigonometría es una excelente oportunidad para que los estudiantes puedan reforzar, subsanar deficiencias o aprender las nociones matemáticas de los contenidos mencionados desde una nueva mirada que no solo los hace más motivadores y novedosos para los estudiantes, sino que puede llevarlos a realizar conexiones entre las distintas subáreas de la matemática.

  De acuerdo con la presente evaluación, solo los estudiantes pertenecientes al nivel suficiente poseen los requisitos para poder interiorizar adecuadamente los contenidos relacionados con la trigonometría (es decir, solo el 2,9% de la población). Esto es coherente con el hecho de que solo los estudiantes de este nivel evidencian tener un manejo de las razones trigonométricas que les permite enfrentarse con éxito a situaciones problemáticas relacionadas con este contenido. Entonces, para que todos los estudiantes puedan incorporar adecuadamente las nociones y conceptos relacionados con la trigonometría, el docente deberá asegurarse de que sus estudiantes hayan logrado:

  — Un manejo adecuado de los procedimientos para representar y operar utilizando expresiones algebraicas y para resolver ecuaciones de primer y segundo grados.

  — Incorporar las nociones de función, de variable y de proporcionalidad.

  — Desarrollar habilidades para poder recodificar números reales usando diversas representaciones.

  — Un adecuado manejo del plano cartesiano.

  — Un manejo de estrategias para usar la semejanza de triángulos, el círculo y sus propiedades, el Teorema de Pitágoras, ángulos, ángulos entre rectas paralelas cortadas por una secante, etc.

En el aspecto metodológico se puede afirmar, de manera general, que para incorporar las nuevas nociones y contenidos trigonométricos se debe iniciar el trabajo con situaciones concretas y cercanas al entorno de los estudiantes. A continuación se desarrolla un ejemplo que utiliza material concreto, se trata de la construcción y el uso del clinómetro: un aparato que mide el ángulo de inclinación (elevación o depresión) con respecto de la vertical.

Construcción de un clinómetro

Materiales

- Un transportador
- Hilo y un tornillo o clavo
- Un tubo de PVC delgado o una carga de lapicero

Procedimiento

El tubo de PVC o la carga de lapicero se pega al transportador por el lado de la regleta. Luego se toma un trozo de hilo con el tornillo o clavo amarrado en un extremo (a manera de peso) y se pega el otro extremo en el orificio en cruz que tiene todo transportador en el centro.

La idea es que el estudiante mire por el tubo o que apunte con la carga del lapicero hacia la punta de un árbol, edificio, poste, etc. Cuando apunta, el hilo con su pesita, por efecto de la gravedad, se mueve a través de la graduación del transportador indicando el grado de inclinación entre la persona y el objeto que está apuntado (tal como se ve en la fotografía).

Justificación

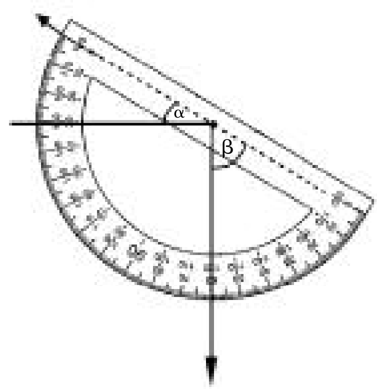
Al usar el clinómetro, el hilo con el peso señala un ángulo β que representa el ángulo de inclinación de la altura del objeto señalado respecto de la vertical. Sin embargo, como se observa en el gráfico, con simples cálculos geométricos podemos deducir el ángulo de elevación α respecto de la horizontal.

De la gráfica obtenemos que:

$\alpha + \beta + 90° = 180°$, despejando

$\alpha = 90° - \beta$

Es decir, en este caso, si $\beta = 60°$, y reemplazamos la medida del ángulo β en la expresión anterior, obtenemos que $\alpha = 30°$.

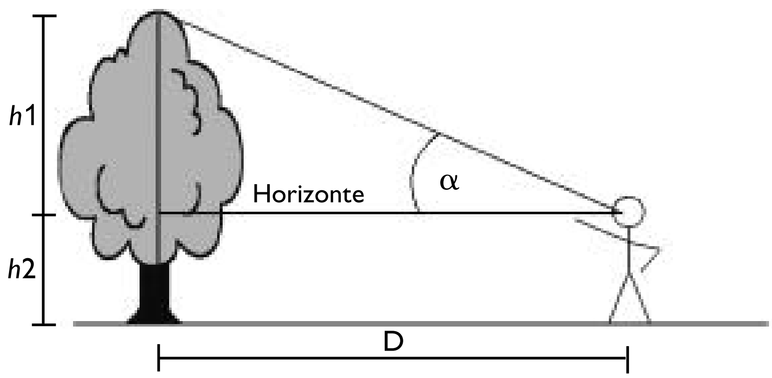


Actividades propuestas con el clinómetro

1) En primer lugar, la construcción del clinómetro deberá enfocarse en reforzar nociones básicas, como las mencionadas en las páginas anteriores.

2) En seguida, se pueden desarrollar muchas actividades utilizándolo, tales como calcular la medida de la altura del asta de la bandera de la IE o del árbol del patio, entre otras.

   La idea es que, con ayuda del clinómetro, se calcule la medida del ángulo β, para así obtener la medida de α. Luego se debe medir la distancia (D) entre el árbol y la persona que está usando el clinómetro. Posteriormente, y con ayuda de una calculadora, se calcula la razón trigonométrica tangente (o cotangente) del ángulo α, para plantear una proporción y hallar la altura $h1$.



Por ejemplo, si se halla que el ángulo α mide 30°, con ayuda de una calculadora hallamos la tangente de 30° que es 0,58. Además, si la medida de D es 15 m, entonces tenemos que:

$$\tan \alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}} = \frac{h1}{D} = \frac{h1}{15}$$

Por otro lado, sabemos que tan α = 0,58. Por lo tanto, igualando las expresiones obtenemos:

$$\frac{h1}{15} = 0{,}58, \text{ de donde tenemos que } h1 = 8{,}7\text{m}$$

Así, para hallar la altura del árbol, solo faltaría sumar la medida de la distancia de la altura de los ojos del estudiante al nivel del piso ($h2$).

Con respecto del uso de la calculadora, se debe tener en cuenta que, si se desea trabajar en grados sexagesimales, previamente se debe hacer la conversión en el sistema angular de la calculadora a dichos grados (DEG). Si se desea trabajar en radianes, se debe llevar la medida del ángulo α a radianes (RAD).

5.4. Gestión y administración de la información y probabilidades

Se ha encontrado que los estudiantes de quinto grado presentan dificultades en el manejo de la gestión y administración de la información al:

- Resolver problemas elementales referidos a diagramas estadísticos y frecuencias, pues no interpretan información estadística presentada en cuadros de doble entrada, en diagramas de barra o en diagramas circulares.
- Representar e interpretar información en tablas o diagramas estadísticos, pues no han interiorizado las principales nociones estadísticas. Al recodificar o graficar diagramas de barra de información estadística de datos cuantitativos discretos presentados en cuadros de doble entrada y situados en contextos cotidianos, omiten las escalas en los ejes o usan escalas inadecuadas, no especifican el origen de las coordenadas, ni colocan las denominaciones de las categorías, etc.
- Resolver problemas elementales que involucren el uso de medidas de tendencia central, pues no calculan ni interpretan dichas medidas (media aritmética, moda y mediana) ni siquiera en un conjunto de datos presentados como listados ordenados. La mayoría de los estudiantes calcula la media aritmética de manera mecánica y algorítmica sin poder identificar cuándo es conveniente usarla para describir conjuntos de datos.
- Resolver problemas que involucran el uso o el cálculo de probabilidades de eventos sencillos o eventos imposibles, ya que no tienen incorporadas las nociones de probabilidad y no identifican experimentos aleatorios ni espacios muestrales (por ejemplo, en experimentos aleatorios con una moneda).
- Identificar la diferencia entre variables cuantitativas y cualitativas, pues no interpretan terminología estadística apropiada para el grado, como por ejemplo: cuantitativo, cualitativo, frecuencias relativas, variables, continuas, discretas, espacios muestrales, eventos, sucesos, aleatorio, equiprobables, etc.

Los DCB vigentes[40] establecen que el trabajo con la gestión y organización de datos se debe realizar en todo el nivel primario y en casi todos los grados del nivel secundario, excepto en quinto. Sin embargo, en el nivel primario, los estudiantes están iniciando su pensamiento proporcional y todavía presentan algunas dificultades respecto de sus nociones de número y en el manejo de operaciones elementales en el conjunto de los números enteros, por lo que los docentes tienden a reducir los problemas estadísticos a tareas de baja demanda cognitiva como la lectura de gráficos. En el nivel secundario, los estudiantes tienen todavía dificultades respecto del razonamiento proporcional y de la noción de números enteros y racionales, elementos necesarios para el uso de frecuencias absolutas, relativas y porcentajes, y para el cálculo e interpretación de probabilidades, etc. Así, la tendencia predominante sigue siendo enfrentar a los estudiantes con tareas estadísticas o probabilísticas de poca demanda cognitiva y con situaciones problemáticas que no requieren realizar conexiones, ni fomentan la elaboración de procedimientos ni el desarrollo de habilidades más complejas. Otra tendencia que se observa es la de ejercitar o entrenar a los estudiantes en la resolución de problemas tipo que demandan de ellos la memorización de enunciados, definiciones, conceptos, estrategias de

40. Vigentes en el periodo de diseño y aplicación de la EN 2004.

resolución etc. Ante esta situación, los estudiantes no incorporan la comprensión de las nociones de estadística y probabilidad, lo que tiene como consecuencia que no realicen conexiones entre sus redes conceptuales y que olviden pronto lo aprendido.

La lectura de datos y la comprensión de gráficos es una destreza que muestra tres niveles de desarrollo diferentes (Batanero y otros s. f.):

1. *Leer datos*: En este nivel de comprensión se requiere la lectura directa de los gráficos; por ejemplo, identificar frecuencias en diagramas de barras o frecuencias relativas en diagramas circulares, identificar coordenadas de puntos, escalas, etc.
2. *Leer dentro de los datos*: Este nivel de comprensión incluye la interpretación e integración de los datos en el gráfico y requiere de diversas habilidades y destrezas; por ejemplo, comparar cantidades y realizar conexiones con otros conceptos y destrezas matemáticos.
3. *Leer más allá de los datos*: Este nivel requiere que el lector realice, a partir de los datos, predicciones e inferencias sobre información que no se refleja directamente en los gráficos.

A partir de los resultados obtenidos en la prueba, se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes se ubica en el primer nivel de razonamiento («lectura de datos») y es por ello que no logra comprender las situaciones problemáticas que involucran la interpretación global de datos estadísticos y la comparación o interrelación de estos.

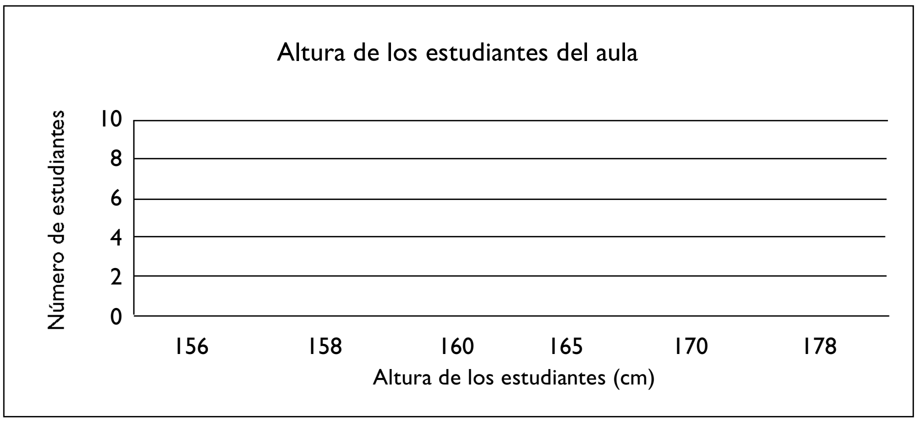
SUGERENCIAS

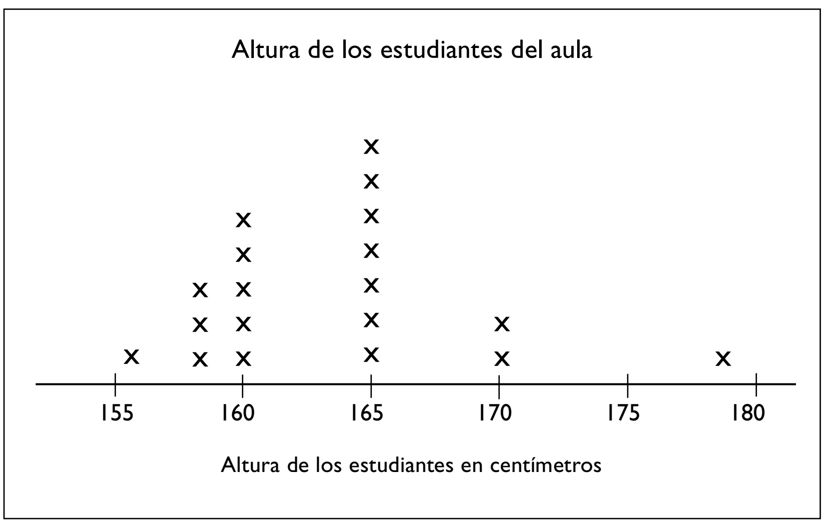
- Introducir los contenidos estadísticos por medio de actividades y manipulaciones concretas y cercanas al estudiante (su escuela o su comunidad) y no mediante situaciones abstractas, de tal forma que el estudiante desarrolle habilidades para obtener información y para organizar los datos obtenidos. Se pueden realizar censos o encuestas para recolectar información específica, como número de estudiantes mujeres y hombres en la IE, edades de los estudiantes de quinto grado de secundaria, preferencias musicales, etc. Además, se debe fomentar la utilización de la información recolectada para tomar decisiones. Por ejemplo, se les puede pedir a los estudiantes que recolecten información para estimar la cantidad de buzos que se deben adquirir para la IE y cuántos de cada talla, o para conocer cuál es la bebida más consumida en el colegio. Para resolver estas situaciones, los estudiantes tienen que idear un plan de recolección de información (pueden reunir datos propios mediante censos o encuestas, utilizar los datos recogidos por la escuela, etc.) y, luego, buscar la forma de organizar la información para presentarla de manera clara y ordenada y responder en forma adecuada a la situación problemática. Conforme los estudiantes desarrollen estas actividades, se deben introducir los conceptos y las nociones de estadística que se vayan necesitando como, por ejemplo, frecuencia, media, mediana, moda, etc.
- Se debe utilizar con los estudiantes métodos estadísticos apropiados para analizar los datos como un conjunto, como un todo que puede describirse y compararse con otro conjunto de datos. Cuando se examina un grupo de datos, el docente debe resaltar sus principales características. Por ejemplo: en qué valores se concentran (medidas de tendencia central), para qué valores no existen datos, qué datos parecen tener valores inusuales, cuál es el rango de valores, etc.

Se deben buscar diferentes formas de representar la información para que dichas características sean fácilmente identificables. A continuación se incluye un mismo conjunto de datos representado mediante distintos formatos:

Altura de los estudiantes del aula

Altura (en cm)	Número de estudiantes
156	I
158	III
160	~~IIII~~
165	~~IIII~~ II
170	II
178	I





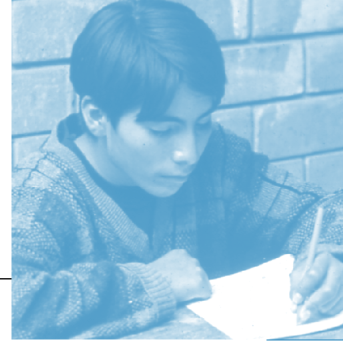
Como se observa, se puede presentar la información de diversas maneras y cada una de las representaciones ofrece determinadas ventajas. A partir de la información presentada, se pueden destacar algunas características como el rango de las alturas de los estudiantes, la altura que tiene la mayor frecuencia, el tamaño del estudiante más pequeño y el del más alto, que la mayoría de los datos se concentra entre 160 y 165 cm, que aquel que mide 179 cm está muy lejos del resto de los estudiantes (un dato «fuera del rango»). Además, se pueden ir introduciendo ideas de cómo se centran estos datos (medidas de tendencia central) y cómo se dispersan a lo largo del rango (medidas de dispersión).

- Diversas investigaciones han establecido que se encuentran cuatro concepciones de media: el valor más frecuente (la moda), el valor razonable, el punto medio y una fórmula algorítmica. Estas concepciones pueden ser ciertas en algunos casos o en casos particulares, sin embargo, es probable que los estudiantes cometan errores predecibles al tratar de generalizar sus concepciones para todos los casos. Es recomendable explicitar estas concepciones y presentar situaciones en las que no necesariamente sean verdaderas.
- Para afianzar las nociones de estadística, se deben presentar situaciones problemáticas que requieran que el estudiante realice conexiones entre la estadística y otros ejes temáticos. La estadística es un excelente medio para afianzar los conocimientos previos; por ejemplo, se pueden usar las nociones de proporcionalidad o de números racionales, entre otras, por medio de actividades que involucren el empleo de escalas, de frecuencias relativas, de porcentajes, etc.
- Se debe mostrar a los estudiantes los posibles usos engañosos de la estadística, por ejemplo, en publicidad: 20% + 20% de descuento, aumentos o descuentos absolutos y relativos, etc.
- La estadística es una parte importante de la alfabetización matemática, pues se considera que toda persona debe ser capaz de interpretar y representar información haciendo uso de cuadros, tablas, diagramas estadísticos, etc. Además, debe ser capaz de otorgar sentido a esta información relacionándola con su entorno y evaluando su pertinencia. También se necesita tomar decisiones respaldadas en dicha información considerando los riesgos.
- El concepto de experimento aleatorio es el punto de partida para comenzar a comprender las nociones de probabilidad y poder calcularlas. Dos aspectos que se tienen que identificar sin lugar a dudas para calcular probabilidades son la formulación clara del experimento y el espacio muestral (que es la determinación de todos los posibles resultados del experimento). Cuando se describen experimentos sencillos es fácil listar todos los diferentes resultados del espacio muestral; sin embargo, hay experimentos en los que el espacio muestral es un conjunto numeroso por lo que el proceso de enumeración puede ser complejo. En casos como estos, es preferible calcular el número de sucesos en lugar de enumerar o hacer un listado; por esto es usual que se recomiende trabajar primero con experimentos aleatorios cuyo espacio muestral tenga un número pequeño de elementos.
- Una de las formas más sencillas de comenzar el contacto de los estudiantes con situaciones aleatorias es mediante los juegos de azar. En ellos se crea la duda sobre la variabilidad de opciones que se pueden obtener (impredecibilidad) y se crea la necesidad de realizar estimaciones probabilísticas, incluso antes de introducir estos conceptos. Por ejemplo, se puede hacer un sorteo con un grupo de

estudiantes y preguntarles sobre qué se podría hacer para dar el doble de opciones de ganar a uno de ellos, o sobre qué opciones de ganar tiene alguien con 10 cupones e incentivar a que den respuestas del tipo: «10 veces más que Jesús que tiene solo un cupón», etc.

- Se debe aprovechar juegos como ludo, monopolio, naipes, etc. para que los estudiantes adquieran conocimientos de tipo probabilístico. Mediante estos contextos, que son parte de la cultura de los estudiantes, se puede introducir estas nociones o hacer explícitas concepciones erróneas. Por ejemplo: los estudiantes creen que cuando lanzan un dado tienen menos posibilidades de obtener 6 puntos o 1 punto, o que se tiene mayor posibilidad de obtener 2 o 3 puntos, es decir, creen que algunos números tienen mayor posibilidad que otros de ser seleccionados o creen que la probabilidad de ganar el premio de una lotería es menor después de haber obtenido ya una vez el premio mayor.

6 ¿Cómo usar las preguntas mostradas en este informe?



En esta sección se presentan algunas de las posibilidades de uso de las preguntas mostradas en este informe. No se pretende detallar todas estas posibilidades, sino señalar algunas que se consideran importantes y podrían ser útiles para el trabajo en el aula.

Tal como se ha explicado a lo largo de este informe, la EN 2004 evalúa la eficacia del sistema educativo peruano con el propósito de recoger y difundir información relevante para propiciar la reflexión sobre el funcionamiento de dicho sistema y, específicamente, para aportar a la toma de decisiones que ayuden a mejorar los niveles de aprendizaje de los estudiantes. Para ello, se desarrolló un marco de evaluación del área de Matemática que refleja el espíritu de las actuales propuestas curriculares del Ministerio de Educación. A partir de ese marco se elaboraron las pruebas con preguntas que responden a esta concepción del área y que buscan recoger información de las principales capacidades matemáticas de los estudiantes.

Algunas de las preguntas de la prueba de quinto de secundaria se presentan en este documento en el capítulo 4 de la Parte III. Las preguntas comentadas en ese capítulo pueden dar luces acerca de lo que los estudiantes conocen, sus esquemas de razonamiento, sus patrones de error y sus creencias acerca de la matemática. Además, el análisis de las respuestas de los estudiantes a estas preguntas nos muestra sus principales dificultades en el aprendizaje de la matemática.

Las preguntas que aparecen en este informe no deben utilizarse para elaborar pruebas que intenten reproducir el trabajo realizado por la UMC, pues la evaluación elaborada desde esta unidad, al ser una evaluación de sistema, tiene objetivos y características particulares que la hacen diferente a la evaluación que usted busca realizar en el aula. Por esta razón, se propone que los ejemplos de preguntas presentados y comentados en secciones anteriores sean utilizados para ayudarlo en su práctica pedagógica de una manera más amplia. Entre otros usos, usted puede utilizar estas preguntas para la evaluación diagnóstica (o de entrada) del desempeño de sus estudiantes en una determinada capacidad o para explorar su nivel de desarrollo en una determinada noción matemática. Asimismo, sobre la base del modelo de evaluación propuesto, usted puede elaborar preguntas similares para complementar la información que desea recoger de sus estudiantes, o para diseñar actividades de aprendizaje que incorporen estas preguntas al quehacer cotidiano del aula.

A continuación, se ofrecen algunas sugerencias para utilizar de manera adecuada la información presentada. Para hacerlo de manera más provechosa, se sugiere que el docente realice previamente los siguientes pasos:

1) Estudiar el marco de evaluación del área.
2) Interpretar el significado de la escala de dificultad de las preguntas.
3) Comprender los niveles de desempeño.
4) Analizar las dificultades encontradas en los estudiantes (Parte III, cap. 5).

1. Estudio del marco de trabajo de la evaluación del área

Se propone que el docente (o el equipo docente, según el caso) lea e identifique las ideas principales del marco de evaluación del área que orientaron la elaboración de las pruebas. Luego de la lectura, usted debería poder contestar algunas preguntas tales como:

- ¿En qué consiste el enfoque centrado en la resolución de problemas?
- ¿Por qué se sostiene que la resolución de problemas es el centro de la actividad matemática?
- ¿Qué se evaluó en la EN 2004?
- ¿Qué capacidades matemáticas se han seleccionado para esta evaluación?
- ¿Cuál es la relación entre las capacidades curriculares y lo evaluado?
- ¿Qué diferencias existen entre los contenidos curriculares y las capacidades propuestas en la EN 2004?
- ¿Cuál es el papel que desempeñan los contextos en el modelo de evaluación?

Es importante establecer relaciones entre el marco de evaluación del área y la forma de construcción de las preguntas. Para ello, usted debe comprender por qué cada pregunta mostrada evalúa una determinada capacidad, contenido y contexto. Asimismo, usted debería analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver cada una de dichas preguntas y qué habilidades se encuentran involucradas al responderlas, profundizando lo comentado en el capítulo 4 de la Parte III.

2. Interpretación del significado de la escala de dificultad de las preguntas

Luego de la aplicación de la prueba, el análisis estadístico determinó un índice de dificultad para cada pregunta. Así, las preguntas fueron ordenadas en una escala creciente con respecto de la dificultad que tuvieron los estudiantes para responderlas, es decir, se ordenaron las preguntas desde la más fácil hasta la más difícil. En el diagrama que se muestra en la página siguiente, se presenta la ubicación en la escala de cada una de las preguntas que aparecen en el informe. Se puede observar, en la parte inferior de la escala, las preguntas con menor dificultad y, en la parte superior, las de mayor dificultad.

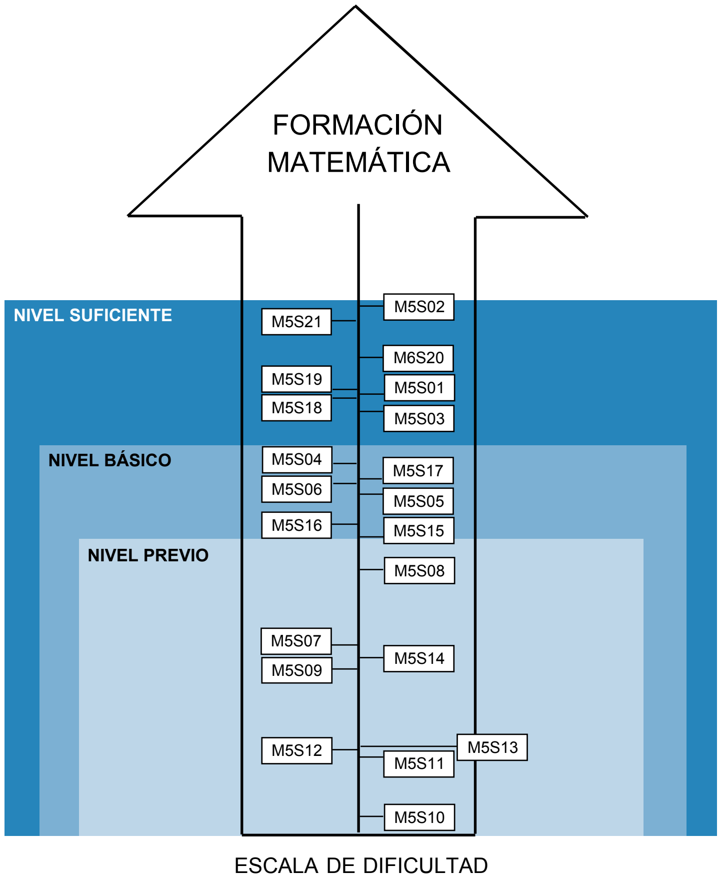
Es importante que usted analice dichas preguntas, trate de establecer por qué se ubican en ese lugar de la escala, por qué existen diferencias en los puntajes entre las preguntas y cuáles son los posibles criterios que otorgan dificultad a las diversas nociones matemáticas contenidas en cada una de estas.

3. Comprensión de los niveles de desempeño

Como se puede apreciar en el diagrama, las preguntas están distribuidas de acuerdo con el nivel de desempeño al que pertenecen: suficiente, básico, previo.

No debe olvidarse que los estudiantes que se encuentran en determinado nivel no solo demuestran poseer el conocimiento y las habilidades que les permiten responder las preguntas de dicho nivel, sino también son capaces de resolver las preguntas asociadas con los niveles inferiores.

Ubicación de las preguntas de
quinto grado de secundaria mostradas en este informe



Usted debería leer, en el capítulo 2 de la Parte I, la definición general de estos niveles y, luego, en el capítulo 2 de la Parte III, la descripción de dichos niveles para quinto grado de secundaria. A partir de esta descripción debería identificar, en el capítulo 4 de la Parte III, aquellas preguntas correspondientes a cada nivel de desempeño y hacer un análisis crítico referido a en qué medida la pregunta comentada refleja realmente las habilidades descritas.

4. Analizar las dificultades encontradas en los estudiantes

El capítulo 5 contiene una detallada descripción de las limitaciones y problemas que muestran los estudiantes en las capacidades evaluadas. Será útil tener en cuenta esta información para reforzar aquellas nociones en las que sus estudiantes tienen más dificultades. Las sugerencias que ofrece ese capítulo presentan algunas alternativas de solución; sin embargo, usted debe adecuarlas y complementarlas de acuerdo con la realidad particular de sus estudiantes.

Se puede apreciar la relación de orden respecto de la dificultad. Algunos ejemplos pueden aclarar esta idea:

- La pregunta M5S09 pertenece al nivel previo y es de menor dificultad que la M5S16 que pertenece al nivel básico.

- Si bien las preguntas M5S20 y M5S01 pertenecen al nivel suficiente, la primera resultó más difícil para los estudiantes que la segunda.

Si un estudiante ha demostrado la habilidad necesaria para enfrentarse con éxito a la pregunta M5S09 (ubicada en el nivel previo), tendrá entonces una mayor probabilidad de responder correctamente preguntas ubicadas por debajo de esta en la escala de preguntas. Tal como se ha señalado líneas arriba, para responder correctamente las preguntas ubicadas en la parte inferior de la escala se demanda un menor desarrollo de las habilidades que el necesario para responder las preguntas ubicadas en la parte superior. En ese sentido, lo que la escala muestra es cómo las distintas preguntas demandan de los estudiantes habilidades o estrategias implicadas en la resolución de las preguntas que evalúan la formación matemática. Dichas habilidades y estrategias permiten ir construyendo un conocimiento que se va complejizando paulatinamente.

Luego de este análisis introductorio al modelo de evaluación del área, el docente puede utilizar las preguntas mostradas de diversas formas, entre las que se pueden mencionar el diagnóstico de sus estudiantes y las actividades en el aula.

Diagnóstico de sus estudiantes

Las preguntas pueden utilizarse en forma individual para explorar el estado de las nociones matemáticas de sus estudiantes. Para ello puede usted seleccionar una pregunta referida a un concepto matemático. En el capítulo 4 de la Parte III se muestran ejemplos de preguntas que cuentan con una descripción sobre algunos aspectos de estas:

- A qué capacidad se refiere.
- Qué habilidades y contenidos relacionados se ponen en juego.
- Qué caminos puede utilizar el estudiante al responderla.

Proponga esta pregunta a sus estudiantes, analice sus respuestas y podrá tener una idea del grado de desarrollo de dicha noción en ellos. Debe tomar en cuenta que, si la mayoría de sus estudiantes ha respondido adecuadamente la pregunta, entonces estarán en capacidad de responder las preguntas asociadas con esta noción que se ubiquen en niveles relativos inferiores de la escala de dificultad. Esto le indicará en qué medida sus estudiantes han incorporado dicha noción matemática. A partir de lo anterior, usted podrá proponer actividades para que sus estudiantes sigan desarrollando las nociones referidas.

Si, en cambio, la pregunta es respondida por pocos estudiantes, entonces utilice una pregunta de menor nivel y, si esta última es respondida por la mayoría, proceda como en el párrafo anterior. Sin embargo, es recomendable hacer un análisis de los procedimientos y estrategias utilizados por sus estudiantes para identificar sus errores y cuán lejano está su desempeño al requerido por la pregunta aplicada.

Actividades de aula

Se debe recordar que la labor docente en las clases de matemática debe estar centrada en desarrollar las capacidades matemáticas de los estudiantes y que las actividades que se realicen en las clases deben caracterizarse por generar en ellos una alta demanda cognitiva. Dichas actividades deben demandar al estudiante explicar, justificar, inferir, tomar decisiones, modelar, resolver problemas, entre otras capacidades. En este sentido, las preguntas de la prueba pueden utilizarse de distintas maneras. Estas son algunas de ellas.

Como elementos problematizadores para una sesión de aprendizaje

Por ejemplo:

- Seleccione una pregunta de la escala de dificultad y aplíquela a sus estudiantes.
- Recoja las respuestas, revíselas y agrúpelas en términos de sus estrategias, procedimientos y resultados.
- En plenaria, trabaje con ellos su solución, explorando los métodos utilizados, los razonamientos novedosos y analizando los errores que se han producido al resolverla.
- Aliente a sus estudiantes a explicar sus procesos de solución y a defender sus puntos de vista.

Para elaborar actividades de aprendizaje

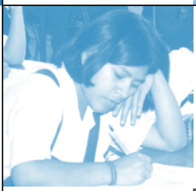
Es posible utilizar las preguntas de un determinado nivel o un grupo de ellas, que esté referido a un concepto o capacidad, para diseñar las clases de matemática y plantear actividades de aprendizaje cooperativo (de trabajo en grupo organizado). Para ello, deberá convertir la pregunta en una actividad didáctica. Se sugiere este camino:

- Elija una pregunta que será el centro de una ficha de trabajo.
- Formule preguntas introductorias a la elegida para explorar los conocimientos previos de los estudiantes y para facilitar la comprensión de la situación problemática.
- Formule otras preguntas que profundicen lo que se va a trabajar.
- Elabore preguntas que sirvan como instrumento de evaluación referido a lo trabajado en la pregunta seleccionada.
- Propóngasela a sus estudiantes en una sesión de trabajo activo. En esta sesión, le recomendamos alternar momentos de trabajo individual con momentos de trabajo en grupos.

Para generar nuevas situaciones problemáticas a partir de las preguntas

Se puede presentar a los estudiantes una pregunta de la escala de dificultad y trabajar en plenaria su solución. El docente solo debe actuar como facilitador, planteando preguntas orientadoras o desencadenantes y no dando respuestas. Como esquema que organice la secuencia de trabajo, se pueden utilizar las fases de resolución de problemas propuestas por George Polya en 1945, presentadas en la página 22 de este informe.

Al resolver problemas, el docente debe poner el mayor énfasis en la visión retrospectiva del estudiante sobre su proceso de resolución, pues lo ayuda a evaluar el significado de sus acciones y su utilidad para otras situaciones problemáticas, es decir, aporta al metaaprendizaje. En esta fase, debe promover en los estudiantes la actitud de explorar más allá de la respuesta hallada y el hábito de reflexionar sobre lo realizado, identificar los bloqueos mentales que ocurrieron, las estrategias que permitieron salir de dichos bloqueos, el método utilizado, las heurísticas que afloraron en la fase inicial, etc. También se debe promover que los estudiantes modifiquen las preguntas, cambien los datos, modifiquen su estructura y planteen nuevos problemas relacionados. El docente, en el papel de facilitador, debe estimular en los estudiantes la necesidad de hacer generalizaciones, reflexionar sobre los métodos utilizados, hacer extensiones, etc.



PARTE IV

Conclusiones

A partir del análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de tercer y quinto grados de secundaria en las capacidades evaluadas, se puede formular las siguientes conclusiones:

Tercer grado

- El 6,0% de los estudiantes de tercer grado de secundaria se ubica en el nivel suficiente. Esto significa que solo este pequeño porcentaje muestra un desarrollo de sus capacidades matemáticas aceptable para el grado. Lo preocupante de estos resultados radica en que el resto de estudiantes (94,0%) muestra no haber desarrollado adecuadamente las habilidades matemáticas requeridas para el grado que están culminando. Esto implica que un gran porcentaje de los estudiantes no ha logrado incorporar importantes nociones matemáticas ni desarrollar esenciales habilidades necesarias para enfrentarse con éxito a diversas situaciones problemáticas tanto dentro como fuera de la escuela.
- El 74,1%[41] de los estudiantes que culminan tercer grado de secundaria no ha desarrollado adecuadamente sus habilidades matemáticas, ni ha incorporado los contenidos matemáticos necesarios para iniciar el tercer grado de secundaria. Este gran grupo de estudiantes muestra no haber incorporado ni el manejo de las propiedades y operaciones aritméticas en los diversos conjuntos numéricos (N, Z, Q, R) ni el álgebra como herramientas funcionales para enfrentarse a situaciones problemáticas.

Quinto grado

- Solo el 2,9% de los estudiantes de quinto grado de secundaria pertenece al nivel suficiente, nivel considerado como el esperado para todos los estudiantes del grado. Lo preocupante de esta situación es que el resto de estudiantes (97,1%) muestra no haber desarrollado las capacidades matemáticas requeridas para terminar su escolaridad. Esto implica que este gran grupo de estudiantes presenta limitaciones para responder adecuadamente a las demandas que la sociedad les plantea al egresar de la educación básica. Esto significa que dichos estudiantes muestran limitaciones para reflexionar, realizar inferencias y para comprender y resolver las situaciones de contenido matemático elemental que se les presentan.

41. Este porcentaje es la suma de los porcentajes de estudiantes ubicados en el nivel previo y debajo del nivel previo en tercer grado de secundaria.

- El 86,1%[42] de los estudiantes que culminan quinto grado de secundaria muestra no haber desarrollado adecuadamente sus habilidades matemáticas, ni haber incorporado los contenidos necesarios para iniciar el quinto grado de secundaria. Este gran porcentaje de estudiantes que está por egresar del sistema educativo presenta grandes dificultades para comprender, organizar, representar y generalizar información básica; para realizar estimaciones sencillas y calcular porcentajes simples en situaciones de compra y venta; para interpretar dibujos, mapas o croquis a escala; para apreciar los efectos de la inflación sobre las tarifas y precios; para tomar decisiones acerca de sus finanzas personales evaluando el riesgo y para participar o no en juegos de azar según las condiciones que se les propongan. Esto implica que no son capaces de emplear la aritmética básica, el álgebra, la estadística ni la geometría como herramientas funcionales.
- Los contenidos que han sido más trabajados en las aulas durante el año escolar[43] son principalmente los relacionados con la trigonometría,[44] lo que debería reflejarse en los resultados de los estudiantes en la prueba. Sin embargo, este hecho no se confirma, pues solo un pequeño porcentaje de los estudiantes es capaz de manejar las nociones referidas a este contenido. De lo anterior se puede deducir que las dificultades encontradas en los estudiantes respecto de este contenido no se deben a falta de oportunidades de aprendizaje, sino que es probable que estén asociadas al tipo de oportunidades de aprendizaje, es decir, al enfoque o a la didáctica de la matemática a la que hayan estado expuestos los estudiantes.
- En quinto grado de secundaria no se llega a desarrollar todo lo propuesto por el diseño curricular. Los contenidos menos desarrollados[45] son los relacionados con las funciones. La principal razón señalada por los docentes para no haber trabajado las capacidades relacionadas con este contenido está referida a que estas ya habrían sido desarrolladas en grados anteriores; sin embargo, los estudiantes no son capaces de enfrentarse con éxito a las situaciones relacionadas con esta importantísima noción matemática.

Educación secundaria

- Los resultados obtenidos en las pruebas de matemática, tanto de primaria como de secundaria, muestran que, a medida que van transcurriendo los grados de escolaridad, el nivel de desarrollo de las capacidades matemáticas de la gran mayoría de los estudiantes está cada vez más distante de lo que se debería haber alcanzado. Posiblemente, esta situación se deba a que se van acumulando déficits en los aprendizajes de los estudiantes, grado tras grado; a que no existen estándares de desempeño para ninguno de los grados, es decir, no existe una propuesta o un acuerdo que contenga los desempeños y habilidades que los estudiantes

---

42. Este porcentaje es la suma de los porcentajes de estudiantes ubicados en el nivel previo y por debajo del nivel previo en quinto grado de secundaria.
43. Información recogida mediante el cuestionario *Oportunidades de aprendizaje de quinto grado* (ODA5SM) aplicado a los docentes de los estudiantes evaluados en quinto de secundaria, en la tercera semana de noviembre de 2004.
44. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo e identidades trigonométricas.
45. Según el documento ODA5SM.

deberían haber desarrollado para decir que se encuentran en un determinado nivel de conocimiento; y a que, por lo general, para la enseñanza de los temas no se trabaja a partir del recojo de información acerca del grado de desarrollo de las capacidades matemáticas de los estudiantes del aula.

- Se ha observado que los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas muestran, en cada uno de los grados evaluados, una gran heterogeneidad, es decir, grandes diferencias en el desarrollo de sus capacidades matemáticas. Esta tendencia se verifica no solo al interior de la muestra, sino también al interior de las aulas evaluadas.[46] Este hecho debe ser tomado en cuenta por el docente para la planificación y desarrollo de cualquier trabajo pedagógico con los estudiantes.

- El grado de alfabetización matemática[47] de los estudiantes que egresan del sistema educativo es muy deficiente, pues las preguntas asociadas con esta son enfrentadas con éxito por porcentajes muy reducidos de estudiantes. Esto implica que la gran mayoría de estudiantes no está adecuadamente preparada para enfrentar situaciones problemáticas reales que demanden resolver, interpretar, inferir, justificar o tomar decisiones fundamentadas, entre otras capacidades del área.

- El enfoque del área de Matemática propuesto en el Diseño Curricular Nacional se inscribe en una óptica contemporánea de resolución de problemas, y señala que aprender a resolver y formular problemas es aspiración de una buena educación matemática. Sin embargo, los resultados de la EN 2004 permiten inferir que la didáctica de la matemática de nuestro país responde a un enfoque centrado en la enseñanza de reglas y algoritmos.[48] Esta afirmación se basa en la constatación de que las preguntas en las que los estudiantes tuvieron mayor éxito fueron, precisamente, aquellas que solo demandaban un aprendizaje reproductivo relacionado con la aplicación de algoritmos convencionales o con ejercicios típicos. Son claras las consecuencias que este enfoque podría tener en nuestra educación: estudiantes poco reflexivos y que presentan dificultades para establecer conexiones entre conceptos, resolver problemas novedosos o «matematizar» situaciones reales, entre otras capacidades de mediana y alta demanda cognitiva que son necesarias para la inserción de los ciudadanos en nuestra sociedad, que cada vez está más influenciada por el desarrollo científico y tecnológico.

---

46. El análisis de los resultados ha incluido la elaboración de reportes por escuela en los que se verifica esta diversidad de rendimientos.
47. Es entendida como «la capacidad de los alumnos de aplicar los conocimientos y destrezas matemáticas incorporados en los años de estudio en el sistema educativo para resolver adecuadamente situaciones problemáticas reales» y está constituida por «lo mínimo indispensable para desempeñarse en situaciones matemáticas o susceptibles de ser matematizadas, para poder seguir asimilando nuevos contenidos o conceptos matemáticos que presente el mundo futuro.» (Asmad y otros 2004:12).
48. Muy similar al movimiento Regreso a lo Básico, que se desarrolló en el mundo a comienzos de la década de 1980. Después de este movimiento, se desarrollaron otros enfoques de la enseñanza de la matemática más acordes con las necesidades socioeconómicas del mundo actual.

Bibliografía

ASMAD, Úrsula, David PALOMINO, Mary TAM y Gloria ZAMBRANO

2004 *Una aproximación a la alfabetización matemática y científica de los estudiantes peruanos de 15 años. Resultados del Perú en la Evaluación Internacional* PISA. Documento de Trabajo 10. Lima: MED / UMC.

BARROSO CAMPOS, Ricardo

s. f. «El proceso de definir en matemáticas. Un caso: el triángulo». En <http://www.bib.uab.es/pub/ ensenanzadelasciencias/02124521v18n2p285.pdf>.

BATANERO, Carmen

s.f. a *«¿Hacia dónde va la educación estadística?».* En <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/BLAIX.htm>.

s.f. b «Los retos de la cultura estadística». Universidad de Granada. En <http://www.indec.mecon.ar/proyectos/sae/losretos.pdf>.

BATANERO, Carmen, J. D. GODINO, D. R. GREEN, P. HOLMES y A. VALLECILLOS

s.f. «Errores y dificultades en la comprensión de los conceptos estadísticos elementales». En <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/erroresestadis.doc>.

BERNARDO GÓMEZ, Alfonso

s.f. «Componentes de la investigación en pensamiento numérico y algebraico (PNA)». En <http://www.uv.es/gomezb/Componentes>.

BLOQUE 3

s.f. «Lenguaje gráfico y algebraico». En <http://www.educ.ar/educar/docentes/cbc/final.jsp?url=CBC_EGB117314%2F203.HTML&area=-1&nivel=-1&id=119766&tipo=>.

CAPUTO, Liliana, N. SOTO y A. NORMA

2002 «Proporcionalidad directa e inversa: Dificultades en su aprendizaje». Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), Resistencia. En: <http://www.unne.edu.ar/cyt/2002/09-Educacion/D-008.pdf>.

CID CASTRO, Eva

2001 «Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos». En: <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2001/preprint-31.pdf>.

2003 «La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión». En: <http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003/preprint25.pdf>.

CLEMENTE GARDUÑO, Domingo, Fernando AYALA GARCÍA, José Luis FAVILA JARDÓN y Efraín LÓPEZ ESTRADA

2001 «Las fracciones». En: <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2001/enero/2nosotros56.htm>.

CORIAT, Moisés y Sara SCAGLIA

1999 «Representación de los números reales en la recta». Grupo de Pensamiento Numérico. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. En: <http://www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelasciencias/02124521v18n1p25.pdf>.

CUETO, Santiago, Cecilia RAMÍREZ, Juan LEÓN y Óscar PAIN

2003 *Oportunidades de aprendizaje y rendimiento en matemática en una muestra de estudiantes de sexto grado de primaria de Lima*. Documento de Trabajo 43. Lima: Grupo de Análisis para el Desarrollo (GRADE).

DELGADO, Raúl

1995 «Dificultades en el aprendizaje de conceptos básicos de probabilidad y estadística. Implicaciones para la investigación». Traducción de Enrique Salazar. Universidad de Almería. En: <http://ued.uniandes.edu.co/servidor/em/recinf/traducciones/Garfield/garfield.html>.

1998 «Los procedimientos generales matemáticos», pp. 69-86. En H. Hernández y otros, *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior*. Rosario: Homo Sapiens.

GODINO, Juan D.

2003 «Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros». Manual para el Estudiante (febrero). Proyecto Edumat – Maestros. En: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>.

GUILLÉN SOLER, Gregoria

s.f. «Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas». En: <http//:www.bib.uab.es/pub/ ensenanzadelasciencias/02124521v18n1p35.pdf>.

HAETINGER, C. y M. T. KETTERMANN

2002 «Una propuesta para la utilización de los esquemas previos operativos de los alumnos en la enseñanza del álgebra del 7º curso a partir de un estudio de caso». En: <http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/Colombia_2002.pdf>.

HAMBLETON, Ronald K.

2001 «Setting performance standards on educational assessments and criteria for evaluating the process» (cap. IV). En Gregory J. Cizek (ed.), *Setting Performance Standards: Concepts, Methods and Perspectives*. Mahway, N. J.: Lawrence Erlbaum.

HERNÁNDEZ, H., R. DELGADO y B. FERNÁNDEZ

1998 *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior*. Rosario: Homo Sapiens.

JAIME PASTOR, Adela y Ángel GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ

1990 «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El Modelo de Van Hiele». En Salvador Llinares y María Victoria Sánchez (ed.), *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla: Alfar.

JOYCE, David E.

1996 «Dave's Short Trig Course». Department of Mathematics and Computer Science. Clark University. Worcester, MA 01610. En <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/trig/>.

MALISANI, Elsa
s.f. «Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico». *Visión histórica*. En <http://math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf>.

MARKARIÁN, Roberto
2004 «Rompiendo unidades. IV». En <http://www.correodelmaestro.com/anteriores/2004/agosto/1anteaula99.htm>.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (MED)
2000a *Estructura Curricular Básica de Educación Primaria de Menores Primer Ciclo*. Lima: MED.
2000b *Estructura Curricular Básica de Educación Primaria de Menores Tercer Ciclo*. Lima: MED.

MORELL PÉREZ, Leobel
s.f. «División de problemas escolares que conducen a ecuaciones lineales». En <http://www.mfc.uclv.edu.cu/scmc/Boletin/N2/textos/Ens.Matem.GeneralLeobelMorelFcfisicSS.doc>.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM)
1989 *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM. [Existe versión en español: *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales, 1991.]
2000 *Principios y estándares para la educación matemática*. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. Sevilla: Thales. [Versión en español de *Currículum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Nueva York: NCTM, 2000.]

PANIZZA, Mabel, Patricia SADOVSKY y Carmen SESSA
s.f. «La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito». En <www.bib.uab.es/pub/ ensenanzadelasciencias/02124521v17n3p453.pdf>.

POLYA, George
1965 *Cómo plantear y resolver problemas.* México, D. F.: Trillas [Versión en español de *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press, 1945.]

PORCEL, Eduardo y María Gloria RAMÍREZ ARBALLO
2002 «Determinación y análisis de las principales deficiencias en la identificación de números pertenecientes a los distintos conjuntos numéricos: N, Z, Q, I o R, en alumnos ingresantes a FACENA en 2001. III. Análisis por fila. Primera Parte». En <http://www.unne.edu.ar/cyt/2002/09-Educacion/D-012.pdf>.

ROMERO, Isabel y Luis RICO
1998 «Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales». En <http://www.bib.uab.es/pub/ ensenanzadelasciencias/02124521v17n2p259.pdf>.

QUINTERO, Roy, Deyse RUIZ y Ruperto TERÁN
s.f. «El enigmático símbolo "x" en los polinomios». En <http://www.saber.ula.ve/db/ssaber/Edocs/pubelectronicas/equisangulo/num1vol1/articulo21.htm>.

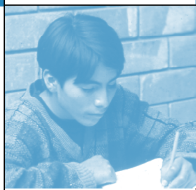
SAMPER DE CAICEDO, Carmen, Leonor CAMARGO y Cecilia LEGUIZAMÓN
2002 «Una experiencia en el aula en la básica secundaria: conceptualización del KUID», pp. 391-427. Memorias del XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética. Santa Fe

de Bogotá. En <http://www.usergioarboleda.edu.co/matematicas/ memorias/ memorias13/Conceptualización%20del%20KUID.pdf>.

STEEN, Lynn Arthur

1990 «Numeracy». St. Olaf College. En <http://www.stolaf.edu/people/steen/Papers/ numeracy.html>.

1998 *La enseñanza agradable de la Matemática*. México, D. F.: MSEB / LIMUSA.


ANEXOS

Anexo 1

Definición de los procedimientos generales matemáticos[49]

ALGORITMIZAR

Es formular una sucesión estricta y finita de operaciones matemáticas que describan un procedimiento conducente a la solución de un problema.

CALCULAR

Es aplicar un algoritmo que puede realizarse en forma manual, mental, con tablas, calculadora, etc.

COMPARAR

Es establecer una relación entre lo cuantitativo o cualitativo que existe entre dos entes matemáticos de un mismo conjunto o clase.

DEFINIR

Es establecer las características necesarias y suficientes del objeto de estudio.

DEMOSTRAR

Abarca desde la justificación o fundamentación de un resultado o proposición utilizando argumentos lógicos o matemáticos, hasta establecer una sucesión finita de pasos para fundamentar la veracidad de una proposición o su refutación (la demostración matemática es una cadena de justificaciones).

ESTIMAR

Es tanto pronosticar el orden de magnitud de un valor o de un resultado numérico como cuantificar, aproximadamente, alguna característica medible de un objeto o suceso.

GRAFICAR

Es representar objetos matemáticos y sus relaciones en forma geométrica, mediante diagramas, tablas, etc. que presentan visualmente ciertos conceptos o relaciones.

IDENTIFICAR

Es diferenciar los rasgos distintivos del objeto de estudio matemático. Es determinar si el objeto pertenece a una determinada clase que presenta ciertas características comunes.

---

49. Adaptado por la UMC a partir de Raúl Delgado, «Los procedimientos generales matemáticos», pp. 69-87. En H. Hernández y otros, *Cuestiones de didáctica de la matemática. Conceptos y procedimientos en la educación polimodal y superior*. Rosario: Homo Sapiens, 1998.

INTERPRETAR

Es atribuir significado a las expresiones matemáticas, de modo que estas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate. Implica tanto codificar como decodificar una situación problemática.

MODELAR

Es asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características considerados relevantes para la solución del problema.

OPTIMIZAR

Es encontrar el objeto (valor numérico, función, conjunto, etc.) que maximiza o minimiza la clase de objetos a la que pertenece, o bien el método óptimo de resolución de determinado problema, cuando existe más de una forma posible y de acuerdo con los conocimientos disponibles.

RECODIFICAR

Es transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. Es expresar el mismo tipo de objeto de distinta forma, lo que implica la utilización de signos diferentes para un mismo modelo.

RESOLVER

Es encontrar un método que conduzca a la solución de un problema matemático.

Anexo 2

Glosario

ALGORITMO

Conjunto ordenado y finito de pasos para ejecutar determinadas actividades con un objetivo conocido; por ejemplo, calcular una suma, resolver una ecuación, trazar la bisectriz de un ángulo, preparar una receta de cocina, etc.

CONJETURA MATEMÁTICA

Afirmación de tipo matemático que propone un principio, patrones o resultados a partir de indicios y observaciones. Una conjetura matemática puede ser verdadera, falsa o indeterminada: para establecer su valor de verdad se deben construir cadenas lógicas deductivas sobre la base de axiomas.

DEFINICIÓN CONCEPTUAL

Es una forma verbal utilizada para caracterizar un objeto matemático que puede ser informal o formal.

DEMANDA COGNITIVA

Nivel de complejidad que demanda una tarea a partir del tipo de habilidad cognitiva que se exige al estudiante. Puede ubicarse en el nivel inferior en el caso de tareas de baja demanda cognitiva asociadas a las actividades reproductivas (copiar, repetir, evocar una definición, aplicar un algoritmo, etc.); o en un nivel de demanda cognitiva media con actividades que requieren realizar conexiones (establecer la relación entre dos nociones, aplicar procedimientos o estrategias adaptándolas a problemas rutinarios de acuerdo con la situación planteada); o tratarse de actividades de alta demanda cognitiva (de reflexión) tales como resolver un problema no rutinario, diseñar o elaborar una propuesta, argumentar para sustentar una afirmación a partir de premisas lógicas, etc.

HEURÍSTICA

Es el arte y la ciencia del descubrimiento y de la invención. Según Polya, es resolver problemas mediante la creatividad y el pensamiento lateral o pensamiento divergente. La heurística matemática se encarga de estudiar los procesos típicamente útiles en la resolución de problemas; usualmente, propone estrategias heurísticas que son vías que guían el descubrimiento.

IMAGEN CONCEPTUAL

Es la estructura cognitiva total que está asociada con el concepto, la cual incluye representaciones mentales y propiedades asociadas.

Metacognición

Es la reflexión acerca de nuestros propios procesos de pensamiento. Designa la serie de operaciones, actividades y funciones cognoscitivas llevadas a cabo por una persona mediante un conjunto interiorizado de mecanismos intelectuales que le permiten recabar, producir y evaluar información.

Pensamiento variacional

Tipo de pensamiento matemático referido a los cambios y relaciones que se producen entre variables dependientes. Está asociado al estudio de las funciones matemáticas.