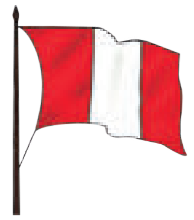
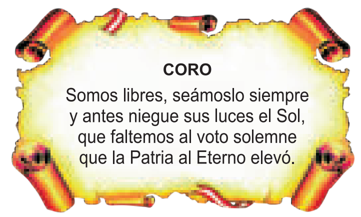
SÍMBOLOS DE LA PATRIA



Bandera Nacional



Himno Nacional

Escudo Nacional

DECLARACIÓN UNIVERSAL DE LOS DERECHOS HUMANOS

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1
Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2
Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3
Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4
Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5
Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6
Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7
Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8
Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9
Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10
Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11
1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12
Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13
1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14
1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15
1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16
1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17
1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18
Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19
Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20
1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21
1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22
Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23
1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24
Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25
1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26
1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27
1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28
Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29
1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad(...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30
Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.

DISTRIBUIDO GRATUITAMENTE POR EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN - PROHIBIDA SU VENTA

SECUNDARIA

RESOLVAMOS PROBLEMAS- Cuaderno de trabajo de Matemática

3

Resolvamos problemas

Cuaderno de trabajo de Matemática

Secundaria 3

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. Democracia y Estado de Derecho
La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. Equidad y Justicia Social
Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

3. Competitividad del País
Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado
Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

Resolvamos problemas

Cuaderno de trabajo de Matemática

Secundaria 3

REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Resolvamos problemas 3
Cuaderno de trabajo de Matemática

Editado por:
Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.° 193, San Borja
Lima 41, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Propuesta de contenidos:
Hubner Luque Cristóbal Jave
Marco Antonio Meza Huaylinos
Olber Muñoz Solís

Revisión pedagógica:
Olber Muñoz Solís

Diseño y diagramación:
Mery Luz Quirita Quispe
Patricia Noemí Maguiña Flores

Corrección de estilo:
Lérida Giuliana Fernández Toscano

Primera edición: noviembre de 2017
Tiraje: 195 530 ejemplares

Impreso por:
Consorcio Corporación Gráfica Navarrete S.A., Amauta Impresiones Comerciales S.A.C., Metrocolor S.A. Se terminó de imprimir en diciembre de 2017, en los talleres gráficos de Metrocolor S. A., sito en Jr. Los Gorriones N.° 350, Urb. La Campiña, Chorrillos, Lima.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2017-12614
Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Querido(a) estudiante:

Es de sumo agrado para nosotros poner en tus manos el cuaderno de trabajo *Resolvamos problemas 3*, que estamos seguros te ayudará a descubrir la presencia de la matemática en la vida cotidiana y a utilizarla de manera adecuada y creativa en la resolución de problemas vinculados a la realidad.

Este cuaderno ha sido elaborado para ti. En él encontrarás diversas estrategias heurísticas, como diagramas tabulares, diagramas de árbol, diagramas lineales, particularizar, plantear ecuaciones, utilizar ensayo y error, entre otras, que te serán útiles en el proceso de resolución de problemas.

En su estructura, el cuaderno te propone una diversidad de fichas de trabajo, cada una de las cuales se encuentra organizada en tres secciones: Aprendemos, Analizamos y Practicamos.

En la primera sección, te presentamos una situación relacionada con la vida cotidiana, que será abordada a través de interrogantes que pretenden movilizar tus capacidades y conocimientos, que te ayudarán a comprender el problema, diseñar o seleccionar una estrategia o plan, ejecutar la estrategia y reflexionar sobre lo desarrollado.

En la segunda sección, te planteamos tres situaciones, en cuyo desarrollo podrás explicar el proceso de resolución, identificando estrategias y describiendo procedimientos utilizados. Este análisis te permitirá plantear otros caminos de resolución, así como identificar errores y realizar tu propia corrección.

En la tercera sección, te presentamos situaciones de contexto de diverso grado de complejidad en contextos variados y apoyados en gráficos. Al desarrollar las actividades que contienen, tú mismo te darás cuenta de tus progresos.

Esperamos que con esta experiencia sientas que hacer matemática es un reto posible de alcanzar. Disfrútalo.

Contenido

Conociendo algunas estrategias

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

1. Estrategias de comprensión

Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y establecer, luego, cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuántos estados se perciben en el texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que el estudiante se familiarice y le pierda temor a la situación.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del texto que da origen a un problema, pero no garantiza el camino a su solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar *tips* para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema). En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo para aclarar este enfoque:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde. Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que el docente tome todos los problemas del cuaderno y realice una lectura analítica de ellos, que produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado. Esos ejercicios le ayudarán a mejorar su desempeño en la conducción de las tareas en el aula.

Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida laboral adulta. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones, los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

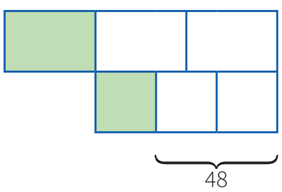
Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y 1/3 del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.
Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	x	18
Felipe	x	8	$x + 5$	
TOTAL		8		

Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

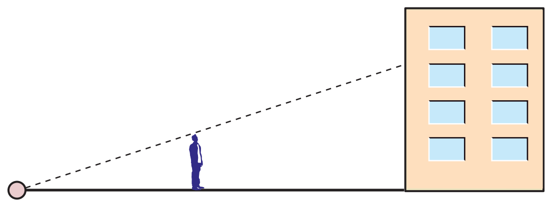
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una lámpara sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

Solución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



Diagramas de flujo

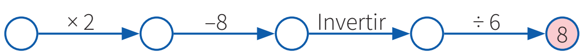
Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

Solución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.



Diagramas conjuntistas

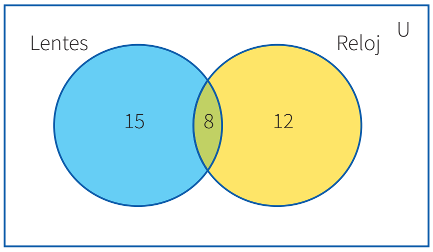
Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes, y 20, reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

Solución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.
Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



Diagramas cartesianos

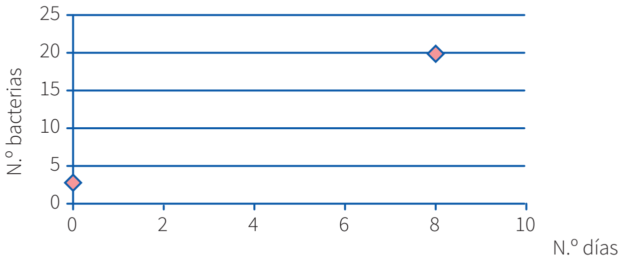
Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

Ejemplo:

El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

Solución:

Cantidad:
Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.
Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

Solución:

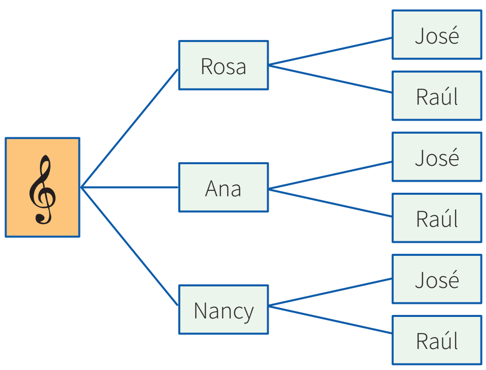
Tomás, Alfredo, Alberto y Roberto.

Tomás Alfredo Alberto Roberto +

Diagramas de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

Ejemplo: Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



3. Otras estrategias

Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

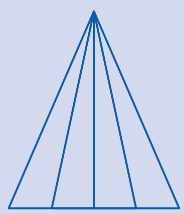
Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número veinte?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

Haz una lista sistemática

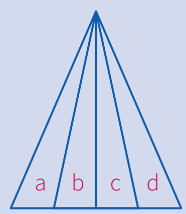
En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor.



Solución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:

  Triángulos con una letra: a-b-c-d

  Triángulos con dos letras: ab-bc-cd

  Triángulos con tres letras: abc-bcd

  Triángulos con cuatro letras: abcd

- En total tenemos: 4 + 3 + 2 + 1 = 10 triángulos.

Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce como *la paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

Ejemplo:

Halla el valor de $(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2$.

Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

  $(n + 1)^2 - n^2$, cuando n vale 234 756 473

- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

  $(n + 1 + n)\ (n + 1 - n) = (n + 1) + n$

- Luego, podemos afirmar que, para cualquier n entero positivo, se cumple:

  $(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$

- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

  Entonces:

  $(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2 = 469\,512\,947$

Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

Solución:

- Particularicemos para algunos casos: Si el artículo vale S/100 y elijo primero el descuento, termino pagando S/106. Pero si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.
- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

Solución:

- Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 3 centímetros por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

Solución:

- "3 cm debajo de su mitad" se interpreta como $\div 2, -3$.
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:

  $x \rightarrow (\div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3) \rightarrow 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos: $x = 90$

Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poderla aplicar con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas, y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

  Tiene que verificarse; por tanto:

  $L - (1/4)Lx = 2\,[L - (1/3)Lx]$; simplificando:

  $1 - (1/4)\,x = 2 - (2/3)x$; de donde $x = 2{,}4$ horas
- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.

Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 22 millones de habitantes y se sabe que la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?

©Shutterstock

Solución:

- La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población, y solo después de formada se igualará a 44 millones. Si bien, aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?

Solución:

- Primero se observa que $50 \times 50 = 2500$, número que no llega; y que $60 \times 60 = 3600$, el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- 55×56 no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar $53 \times 54 = 2862$, el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con $56 \times 57 = 3192$, se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

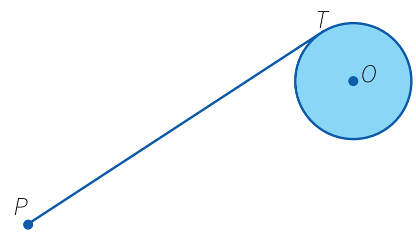
Supón el problema resuelto

Ejemplo:

Usando solo regla y compás construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto *T* es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos *O* con *T*, tendremos que *OT* es perpendicular a *PT*.
- Además, como tenemos tres puntos involucrados, *P*, *T* y *O*, es posible hacer un triángulo uniendo el punto *P* con el punto *O*. Se observa que el triángulo es rectángulo.

Ficha 1

Conozcamos sobre la presión arterial

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad	Traduce cantidades a expresiones numéricas.	Establece relaciones entre datos y acciones de comparar, igualar cantidades y las transforma a expresiones numéricas (modelos) que incluyen operaciones con intervalos.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, combina y adapta estrategias de cálculo, estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con intervalos, y para simplificar procesos usando las propiedades de los números y las operaciones, según se adecúe a las condiciones de la situación.

Aprendemos

La presión arterial es la fuerza que ejerce la sangre al circular por las arterias. Las arterias son vasos sanguíneos que llevan sangre desde el corazón hacia el resto del cuerpo.

La presión arterial se mide con dos cifras. A continuación se brinda un ejemplo.

$$\frac{120}{80}$$

120 — La cifra superior mide la fuerza de la sangre en las arterias cuando el corazón se contrae (late). Se la denomina presión sistólica.

80 — La cifra inferior mide la fuerza de la sangre en las arterias mientras el corazón está relajado (llenándose con sangre entre cada latido). Se la denomina presión diastólica.

Fuente: *https://goo.gl/iHRNJE*

Fuente: *https://goo.gl/gnoJGa*

La siguiente tabla muestra la clasificación de la presión arterial en adultos de 18 años a más:

Categoría	Presión sistólica (mmHg)	Presión diastólica (mmHg)
Óptima	Menor que 120	Menor que 80
Normal	De 120 a menos de 130	De 80 a menos de 85
Normal alta	De 130 a menos de 140	De 85 a menos de 90
Hipertensión:	De más de 140	De más de 90
Estadio 1	De 140 a menos de 160	De 90 a menos de 100
Estadio 2	De 160 a más	De 100 a más

Fuente: *https://goo.gl/KqDb81*

Responde:

1. Si una persona adulta tiene 115 mmHg / 78 mmHg de presión arterial, ¿en qué categoría se encuentra?
2. Expresa en un solo intervalo y como conjunto la presión sistólica, y en otro intervalo la presión diastólica de las categorías que ponen en riesgo la vida de una persona adulta.

Comprendemos el problema

1. ¿Sabes cómo se mide la presión arterial?
2. Según los datos brindados, ¿en qué categorías está en riesgo la vida de una persona?
3. ¿Qué clases de intervalos conoces?
4. ¿Qué te piden realizar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. Para tener un solo intervalo de las categorías que ponen en riesgo la vida de una persona, ¿qué operación se puede realizar con los intervalos?

   a) Intersección

   b) Unión

   c) Diferencia

   d) Complemento

2. ¿Qué estrategia te sirve para resolver el problema?

   a) Diagrama tabular

   b) Diagrama en la recta numérica

   c) Diagrama de tiras

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Iniciamos el plan elegido. En una tabla escribimos como intervalo y como conjunto todas las categorías:

Categoría	Intervalo Presión sistólica (mmHg)	Como conjunto	Intervalo Presión diastólica (mmHg)	Como conjunto
Óptima	$A = [0; 120[$	$A = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 120\}$	$A = [0; 80[$	$A = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 80\}$
Normal				
Normal alta				
Hipertensión:				
Estadio 1				
Estadio 2				

2. ¿En qué categoría está la medida de la presión arterial de 115 mmHg / 78 mmHg en una persona adulta?

3. ¿Cuál es el intervalo de la presión sistólica y diastólica de las categorías que ponen en riesgo la vida de una persona?

4. En un diagrama de la recta numérica, determinamos gráficamente la unión de los intervalos de las categorías que ponen en riesgo la vida de una persona.

5. Escribe como conjunto la expresión de los intervalos de la presión sistólica y diastólica que ponen en riesgo la vida de una persona:

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Por qué este tipo de medidas se expresa con intervalos?

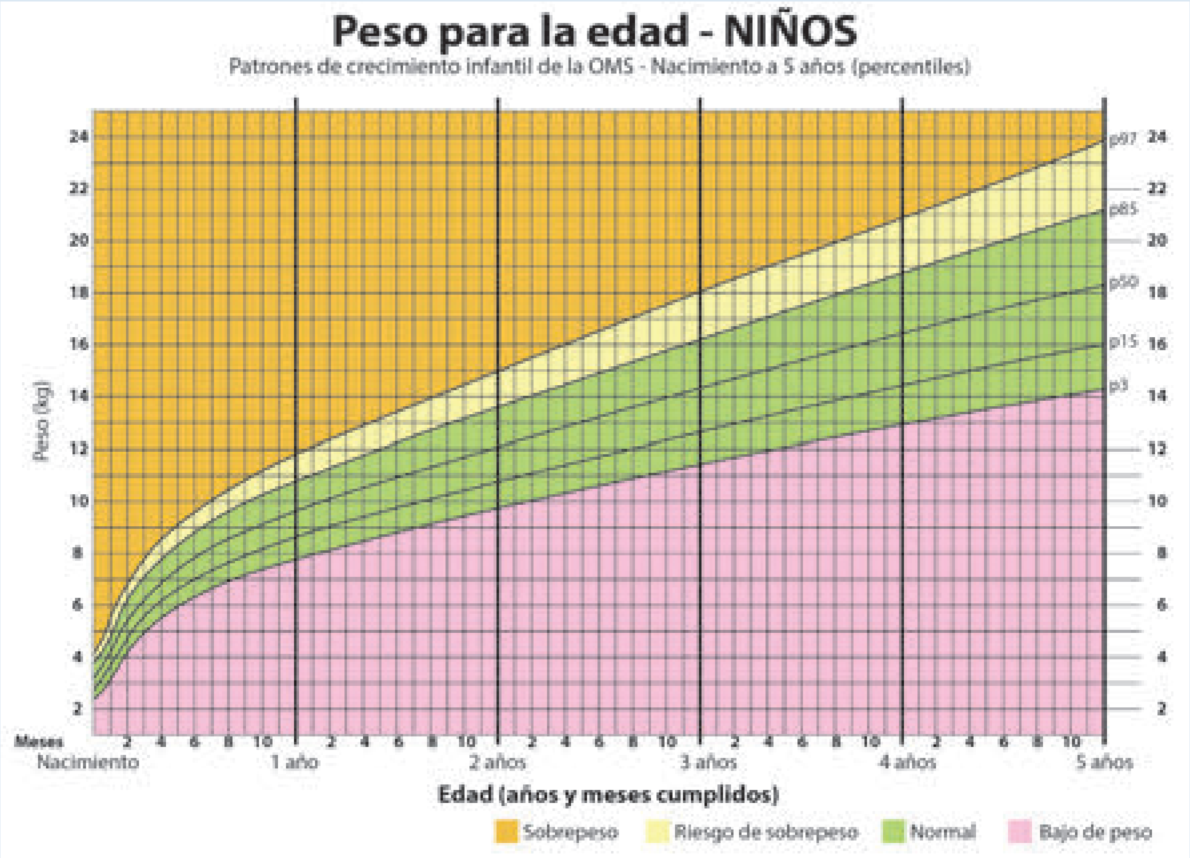
2. ¿En qué otras situaciones de la vida se pueden usar intervalos?

3. Describe y explica las estrategias que seleccionaste para responder las interrogantes.

Analizamos

Situación A

Controlar el peso de los niños durante los primeros años de su vida es muy importante porque se previenen enfermedades y problemas nutricionales. El siguiente gráfico representa la relación entre la edad y el peso (kg) de niños menores de 5 años. ¿De qué otra forma se pueden presentar algunos valores de las categorías existentes?



Fuente: *https://goo.gl/FiCosA*

Resolución

Organizamos la información en una tabla:

Edad	Sobrepeso (kg)	Riesgo de sobrepeso (kg)	Normal (kg)	Bajo de peso (kg)
2 años	[15; 25[	[13,5; 15[	[9,8; 13,5[	[0; 9,8[
3 años	[18; 25[	[16,2; 18[	[11,5; 16,2[	[0; 11,5[
4 años	[21; 25[	[18,8; 21[	[13; 18,8[	[0; 13[

Respuesta: Observando el gráfico mostrado, concluimos que algunos valores de las categorías existentes se pueden presentar en una tabla.

1. ¿Qué estrategia se utilizó para dar respuesta a la situación A?

2. ¿Qué aspectos del procedimiento realizado son semejantes al procedimiento utilizado en la situación inicial?

Situación B

Del problema anterior, escribe intervalos que pertenezcan a cada una de las categorías para un niño de 2 años 6 meses.

Resolución

Mediante la observación y la lectura del gráfico del problema anterior, determinamos valores (mínimos y máximos) que pertenecen a las categorías, sin ser necesariamente los valores extremos, porque solo se indica que estos "pertenezcan" a cada una de las categorías.

Respuesta:

- Sobrepeso: [16,5; 25]
- Riesgo de sobrepeso: [15; 16,5[
- Normal: [10,5; 15[
- Bajo de peso: [0; 10,5[

1. ¿Qué tipos de intervalos se han escrito?

2. ¿Qué estrategias se emplearon para encontrar los intervalos?

Situación C

El supervisor de una panadería expresó mediante intervalos el tiempo que tarda la producción (en horas) de dos lotes de bocaditos (dulces y salados).

Lote 1: [3,5;5[

Lote 2: [2,5;4,5[

¿Cómo expresarías mediante un solo intervalo el tiempo que tardaría la producción de los lotes?

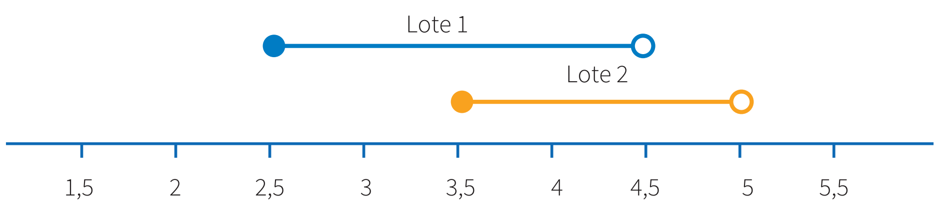
Resolución

(Encuentra el error)

Observamos que el tiempo mínimo de producción es de 2,5 horas (lote 2) y el tiempo máximo, de 5 horas (lote 1). Entonces los bocaditos tanto del lote 1 como del lote 2 serán producidos en ese rango de tiempo. Esto equivale a la unión de ambos intervalos:

[3,5;5[U [2,5;4,5[

Resolvemos esta operación representando los intervalos en la recta numérica:



Respuesta: El tiempo que tardaría la producción de los lotes 1 y 2 es de [4,5;5[horas.

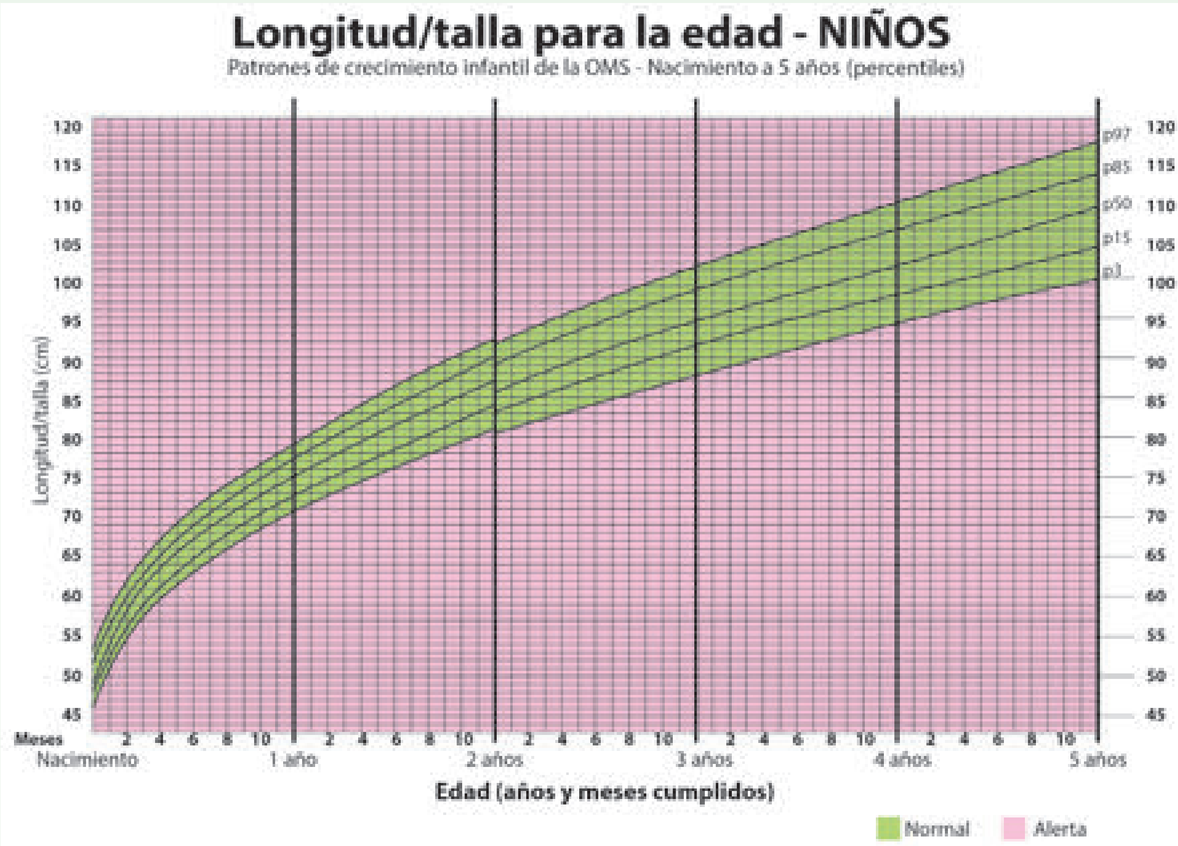
1. ¿Qué tipos de intervalos son los que representan los tiempos de producción de los lotes 1 y 2?

2. ¿Con qué tipo de intervalo se ha representado el tiempo de producción del lote 2 en la recta numérica y cuál es la respuesta correcta?

Practicamos

Edad y talla de niños menores de 5 años

La siguiente gráfica muestra la relación entre la edad y la estatura para niños de 0 a 5 años de edad.



Fuente: *https://goo.gl/26bmN2*

Con esta información, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿Qué talla podría tener un niño de 4 años 8 meses de edad para que su estatura sea considerada como "normal"?

a) 70 cm **b)** 95 cm **c)** 110 cm **d)** 120 cm

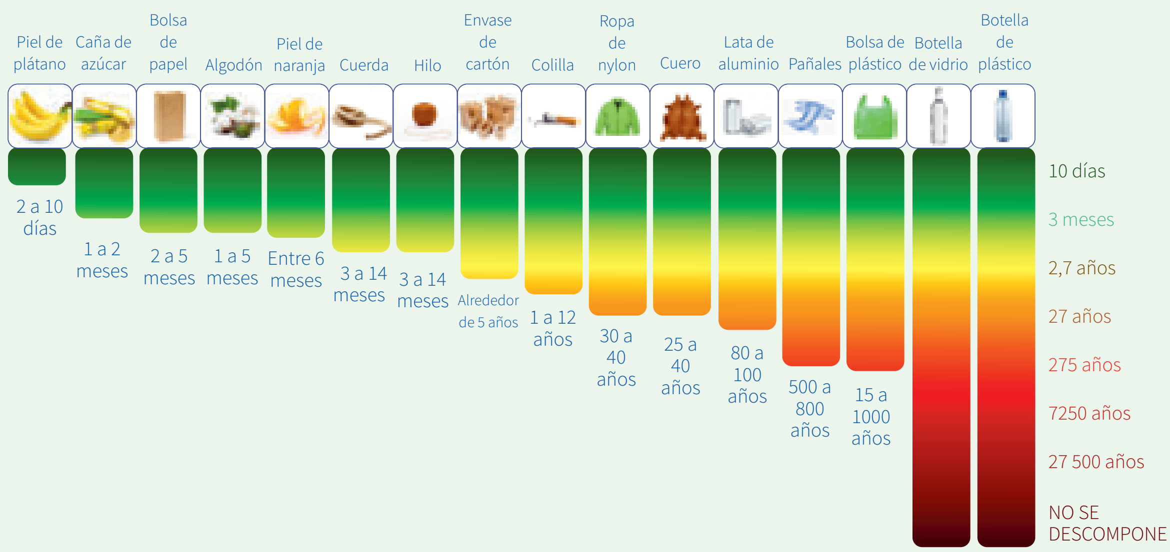
2. ¿Qué intervalo corresponde a un niño de 3 años cuya talla se encuentra en alerta?

a) $[70;100[$ **b)** $[90;102]$ **c)** $]100;115]$ **d)** $[105;120]$

¿Cuánto tarda en degradarse?

Los desechos sólidos se denominan comúnmente “basura” y representan una amenaza debido a su producción excesiva e incontrolada, ya que contaminan las aguas, la tierra y el aire. Además, ponen en peligro la salud humana y la naturaleza en general. Algunos de estos desechos pueden tardar mucho tiempo en descomponerse o degradarse, como se muestra en el gráfico.

Adaptado de *https://goo.gl/oLcl6d*



Adaptado de *https://goo.gl/RJDQZJ*

Con esta información, responde las preguntas 3 y 4.

3. Expresa, mediante una representación simbólica de un intervalo, el tiempo que tarda en degradarse una bolsa de plástico.

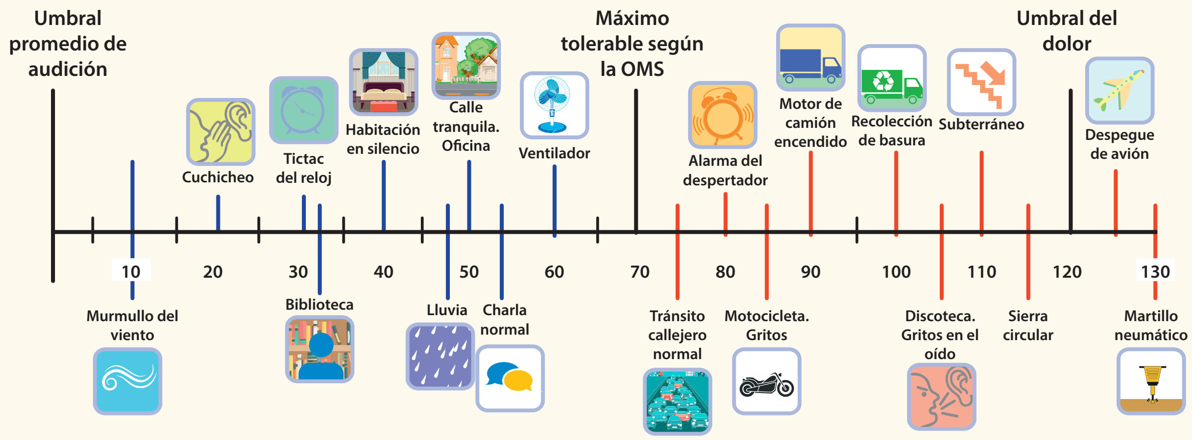
a) $]15;1000[$ **b)** $[15;1000[$ **c)** $[15;1000]$ **d)** $]15;1000]$

4. Representa, haciendo uso de intervalos, la diferencia del tiempo que tarda en degradarse una cuerda menos el tiempo que tarda en degradarse una bolsa de papel.

5. Cuidado con los ruidos

La contaminación debido al ruido provocado por las actividades industriales, sociales y de transporte puede causar malestar, irritabilidad, insomnio, sordera parcial, etc.; afecta a la sociedad en general y produce daños a la salud, no solo auditivos, sino también nerviosos, pues puede provocar hipertensión.

El sonido en exceso es considerado un contaminante porque puede producir efectos fisiológicos y psicológicos nocivos para una persona o un grupo de ellas. El ruido se mide en decibelios (dB), los equipos más utilizados para medirlo son los sonómetros. La OMS considera los 70 dB como el límite superior deseable. Los ruidos mayores de 90 dB provocan daños auditivos permanentes y un alto grado de estrés y nerviosismo. El umbral de molestia comienza a los 120 dB, pero el simple hecho de estar expuesto por mucho tiempo a sonidos superiores a 90 dB puede producir daños.



Representa mediante intervalos la siguiente frase "ruido mayores de 90 dB". Luego determina la diferencia del intervalo del sonido producido por un motor de camión encendido menos el intervalo del sonido producido por un ventilador. Representa esta diferencia mediante intervalos.

a) [90 ; +∞[; [60 ; 90] **b)**]90 ; 120[;]60 ; 90[**c)** [90 ; 120] ;]60 ; 90[**d)**]90 ; +∞[;]60 ; 90]

6. Teresa resuelve el siguiente problema matemático sobre operaciones con intervalos:
Si A = [0;5[y B = [2;7], determina A ∩ B.
Ella obtiene como respuesta [2;5]. Sin embargo, Dante le dice que esa respuesta es equivocada.
¿Con cuál de los dos estás de acuerdo?

a) Con Teresa. **b)** Con Dante. **c)** Con ninguno. **d)** Con los dos.

7. Escribe en forma de intervalo y representa gráficamente los enunciados de cada caso:

- Todos los números reales comprendidos entre –2 y 5, ambos incluidos.
- Todos los números reales menores que 3.
- Todos los números reales comprendidos entre –1 y 2, incluyendo el –1 y no el 2.
- Todos los números mayores o iguales que –4.

8. Sabiendo que $|a| < b$ es equivalente a "$-b < a < b$", ¿cuál es el intervalo que contiene los valores reales de "x" si $|2x + 3| < 15$?

a)]–18;12[**b)**]–15;15[**c)**]–3;3,6[**d)**]–9;6[

9. **Índice de masa corporal (IMC)**

Una buena forma de determinar si el peso de una persona es saludable para su estatura es calcular su índice de masa corporal (IMC). Para calcularlo se divide el peso de la persona (en kg) entre el cuadrado de su estatura (en m).

IMC	Categoría
Menos de 18,6	Delgado
Desde 18,6 hasta 24,9	Normal
Más de 24,9 y menos de 30	Sobrepeso
Desde 30 hasta menos de 35	Obesidad grado 1
Desde 35 hasta menos de 40	Obesidad grado 2

Abel pesa 68,5 kg y tiene una estatura de 1,45 m. Tomando en cuenta el valor de su IMC, ¿en qué categoría se ubica según la tabla?

a) Normal. **b)** Delgado. **c)** Obesidad grado 1. **d)** Obesidad grado 2.

10. Relaciona cada intervalo con su respectiva notación por comprensión.

$]-\infty;4]$	$\{x \in \mathbb{R} / x < 4\}$
$[4;+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \leq 4\}$
$]4;+\infty[$	$\{x \in \mathbb{R} / x > 4\}$
$]-\infty;4[$	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 4\}$

Ficha 2

Optimizamos las ganancias

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Representa las características de una población en estudio mediante variables cualitativas o cuantitativas, y el comportamiento de los datos de una muestra de la población a través de histogramas, polígonos de frecuencia y medidas de tendencia central.
	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Lee tablas y gráficos de barras, histogramas, polígonos de frecuencia o circulares, así como diversos textos que contengan valores sobre las medidas de tendencia central.

Aprendemos

Ana, con mucho esfuerzo, pudo abrir un restaurante. Ahora desea hacer un estudio sobre la ocupación de sus clientes, los platos de comida que prefieren y sus edades.

El primer día tomó los siguientes datos de las primeras 20 personas:

OCUPACIÓN	Cantidad
Estudiante	9
Trabajador	8
Casa	3
TOTAL	20

COMIDA	Cantidad
Tallarines	6
Arroz con pollo	7
Cebiche	3
Pescado frito	4
TOTAL	20

EDADES	Cantidad
De 18 a menos de 24	6
De 24 a menos de 30	4
De 30 a menos de 36	2
De 36 a menos de 42	3
De 42 a 48	5
TOTAL	20

Responde:

1. ¿Qué variables estadísticas ha tenido en cuenta para su estudio?
2. ¿Qué porcentaje de las personas prefieren arroz con pollo o cebiche?
3. ¿Por qué crees que agrupó las edades de 6 en 6 para su estudio?

Comprendemos el problema

1. ¿De qué manera crees que le servirá a Ana realizar este estudio?

2. ¿Qué es una variable estadística?

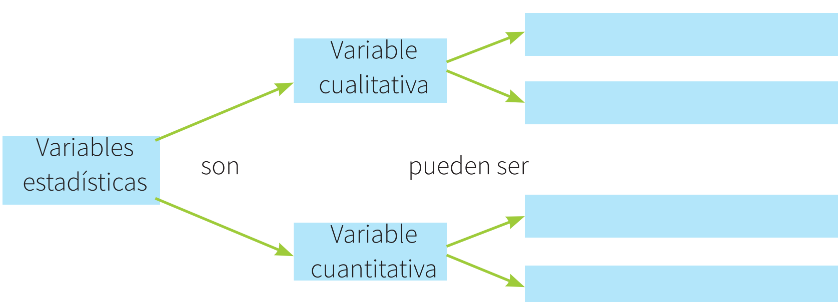
3. ¿Cómo se está presentando la información de las edades?

4. ¿Qué conocimiento matemático puede ayudarnos a responder las interrogantes?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te ayudará a responder las interrogantes?
   - **a)** Tabla de frecuencias y aplicación de fórmulas.
   - **b)** Diagrama analógico y aplicación de fórmulas.
   - **c)** Tabla de frecuencias y diagrama cartesiano.

2. Recordamos los tipos de variables:



Ejemplos:

Ejecutamos la estrategia o plan

1. ¿Qué variables estadísticas ha considerado Ana en su estudio?

2. Elaboramos una tabla de frecuencia para la variable "platos de comida":

Platos de comida	f_i	F_i	h_i	H_i	h_i %
Tallarines	6	6	0,30	0,30	30 %
Arroz con pollo	7				
Cebiche	3				
Pescado frito	4				
Total	20		1,00		100 %

3. ¿Qué porcentaje de las personas prefiere arroz con pollo o cebiche?

4. La variable "edades" está dada por datos agrupados. Aplicando fórmulas, recordemos cómo se forman estos grupos:

a) Como hay ______ datos, el número de intervalos (I) se determina con:

$I = \sqrt{20} =$ ______ ≈ 5

b) La edad mayor es: $X_{máx.} =$ ______

La edad menor es: $X_{mín.} =$ ______

El rango (R) es: $R = X_{máx.} - X_{mín.} =$ ______

c) La amplitud del intervalo (A) es el cociente de dividir el rango por la cantidad de intervalos.

$A = \frac{R}{I}$

$A = \frac{R}{I} = \frac{30}{5} =$ ______

5. ¿Por qué agrupó las edades de 6 en 6 para su estudio?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿De qué otra forma se puede presentar la información estadística?

2. ¿Cómo crees que hizo Ana para recoger la información registrada en su tabla?

Analizamos

Situación A

Se solicita presentar la siguiente información de forma atractiva mediante un diagrama circular:

Platos de comida	f_i
Tallarines	6
Arroz con pollo	7
Cebiche	3
Pescado frito	4
Total	20

Resolución

Aplicamos proporcionalidad con regla de tres simple para determinar los ángulos:

Para los tallarines

20 —— 360°

6 —— x

Donde:

$$x = \frac{360° \cdot 6}{20} = 108°$$

Para el arroz con pollo

20 —— 360°

7 —— x

Donde:

$$x = \frac{360° \cdot 7}{20} = 126°$$

Para el cebiche

20 —— 360°

3 —— x

Donde:

$$x = \frac{360° \cdot 3}{20} = 54°$$

Para el pescado frito

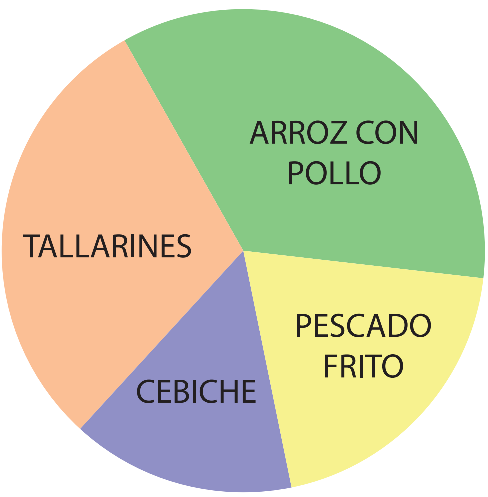
20 —— 360°

4 —— x

Donde:

$$x = \frac{360° \cdot 4}{20} = 72°$$

Respuesta: El gráfico circular o de sectores será:



1. ¿Qué diferencia hay entre ver la información en una tabla y verla en un gráfico?

2. ¿Qué estrategia se utilizó para realizar el gráfico circular?

3. ¿Con qué instrumento se miden los ángulos de los sectores?

Situación B

¿Qué elementos estadísticos se deben tener en cuenta para realizar un estudio sobre los platos de comida preferidos en el Perú y que brinde algunas opciones?

Resolución

Población
Habitantes del Perú

↓

Muestra
Algunas personas entrevistadas en plazas de cada lugar del Perú.

→

Tipo de variable
Cualitativa nominal

↓

Variable
Platos de comida

1. ¿En qué casos se trabaja solo con una muestra de la población?

2. ¿Qué estrategia se ha empleado para presentar los elementos estadísticos?

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 29 25/11/17 01:24

Situación C

Los siguientes datos corresponden a las estaturas (en centímetros) de turistas extranjeros en el Perú:

163	144	190	158	138	180	164	193	195	159
178	196	189	152	174	168	170	167	146	198
147	174	190	165	134	175	168	172	165	180
194	199	136	169	169	151	198	184	202	176
196	178	154	180	153	174	170	166	183	152

Si se quiere tratar la información como datos agrupados, ¿de qué manera se pueden formar los grupos o intervalos?

Resolución

(Encuentra el error)

Como estrategia usaremos fórmulas:

- Se calcula el rango de los datos:

  $R = 202 - 138 = 64$

- Se calcula la cantidad de intervalos que se pueden formar:

  $I = \sqrt{50} \approx 7{,}07 \approx 7$

- Ahora hallamos la amplitud de cada intervalo:

  $A = \dfrac{64}{7} \approx 9{,}1 \approx 9$

Respuesta: Los intervalos son:

[138;147[	[165;174[	[201;210[
[147;156[	[174;183[	
[156;165[	[192;201[	

1. ¿El proceso realizado para la resolución de la situación C es correcto? Explica.

2. ¿Qué parte de la resolución cambiarías?

3. ¿Qué estrategia se utilizó en la resolución de la situación C?

Practicamos

Temperatura en Lima

Las temperaturas registradas durante el mes de noviembre fueron:

22 °C, 22 °C, 23 °C, 23 °C, 22 °C, 23 °C, 22 °C, 21 °C, 23 °C, 24 °C, 21 °C, 23 °C, 22 °C, 21 °C, 22 °C, 22 °C, 23 °C, 23 °C, 23 °C, 22 °C, 23 °C, 21 °C, 23 °C, 24 °C, 24 °C, 24 °C, 22 °C, 24 °C, 24 °C, 22 °C.

Con esta información, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

1. ¿Cuál de los siguientes gráficos estadísticos no es recomendable para presentar esta información?

a) Histograma. **b)** Pictograma.

c) Diagrama de barras. **d)** Diagrama circular.

2. Completa la siguiente tabla de frecuencias.

Temperatura °C	f_i	h_i	h_i %
TOTAL			

¿Qué temperatura presenta menor frecuencia?

a) 21 °C **b)** 22 °C **c)** 23 °C **d)** 24 °C

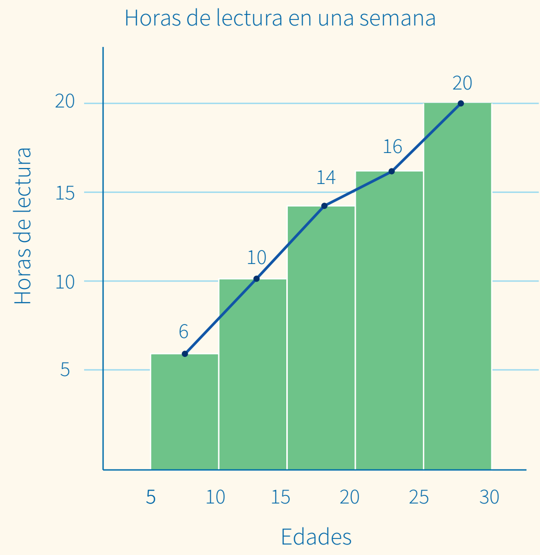
3. La temperatura que se ha repetido el 20 % de las veces durante todo ese mes es:

a) 21 °C **b)** 22 °C **c)** 23 °C **d)** 24 °C

4. Explica qué tipo de variable se está usando.

Horas de lectura

Se presenta un polígono de frecuencia acumulada que representa el tiempo en horas que se dedican a leer personas de 5 a 30 años.



Con esta información, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. ¿Qué variables estadísticas se identifican?

a) Edades y lectura. **b)** Tiempo y semanas.

c) Edades y horas de lectura. **d)** Libros leídos.

6. ¿Qué porcentaje de horas de lectura tienen los menores de 20 años?

a) 20 % **b)** 30 % **c)** 50 % **d)** 70 %

7. ¿Para qué tipo de datos recomiendas el uso de polígonos de frecuencia?

8. Para realizar un trabajo sobre el medioambiente, unos estudiantes recogieron información sobre el tiempo de descomposición de varios tipos de materiales que podrían reciclarse, pero que la gente desecha como basura.

Objetos	Tiempo de descomposición
Papel	2 a 5 meses
Hilo	3 a 14 meses
Envase de cartón	5 años
Ropa de nylon	30 a 40 años
Latas de aluminio	80 a 100 años
Bolsas de plástico	15 a 1000 años

¿Qué tipo de gráfico estadístico recomiendas para presentar la información?

a) Gráfico circular.

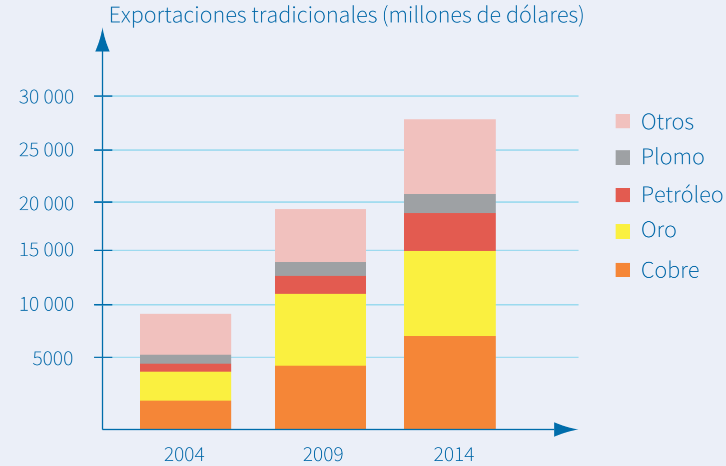
b) Gráfico de barras.

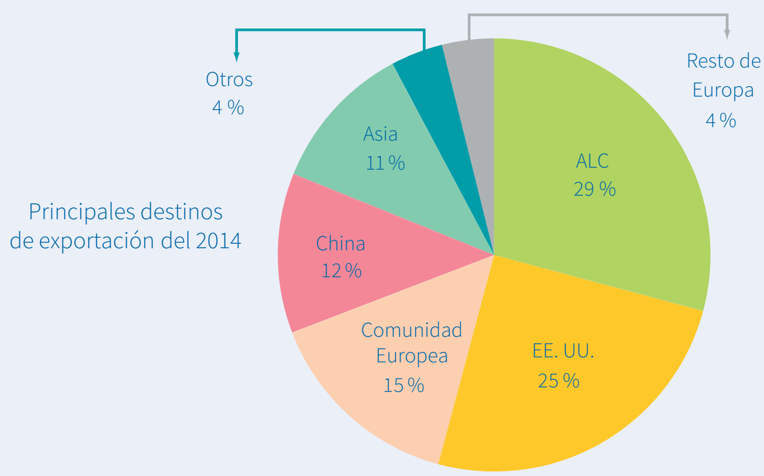
c) Histograma.

d) Pictograma.

Exportaciones

Los siguientes diagramas muestran información sobre las exportaciones de materiales tradicionales en el Perú a distintas partes del mundo.





Con esta información, responde las preguntas 9 y 10.

9. ¿Cuál fue aproximadamente el valor total en millones de dólares de las exportaciones de oro en el 2014?

a) 8 000 millones de dólares. **b)** 7000 millones de dólares.

c) 12 000 millones de dólares. **d)** 16 000 millones de dólares.

10. ¿Cuál fue el valor de las exportaciones en millones de dólares a Estados Unidos en el 2014?

Ficha 3 El censo nacional

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Lee, interpreta e infiere tablas y gráficos, así como diversos textos que contengan valores sobre las medidas de tendencia central, para deducir nuevos datos y predecirlos según la tendencia observada.
	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Selecciona y emplea procedimientos para determinar la media, la mediana y la moda de datos discretos y continuos.

Aprendemos

En el 2007, en nuestro país se llevó a cabo el XI Censo Nacional de Población y VI de Vivienda, a cargo del INEI (Instituto Nacional de Estadística e Informática). Esta información es muy importante porque permite tomar decisiones políticas a favor de la población.

El siguiente cuadro corresponde a la cantidad de pobladores en el Perú hasta los 90 años, según edad y sexo, en ese año:

Fuente: *https://goo.gl/JT6Tj6*

Población total del Perú según edad y sexo de 0 a 90 años, en el 2007

Edades	Varones	Mujeres
[0;10[	2 756 259	2 652 289
[10;20[	2 876 709	2 803 061
[20;30[	2 383 378	2 440 041
[30;40[	1 921 716	2 024 827
[40;50[	1 479 675	1 533 769
[50;60[	999 795	1 044 995
[60;70[	644 750	665 508
[70;80[	387 911	409 086
[80;90]	152 632	185 160
TOTAL	13 602 825	13 758 736

Fuente: *https://goo.gl/Yduq9u*

Responde:

1. ¿Cuál es el promedio de la edad de los varones hasta los 90 años, según la información brindada en el cuadro?

2. ¿Cuál es la mediana de la edad de los varones peruanos hasta los 90 años, en el 2007?

Comprendemos el problema

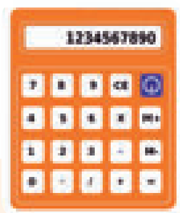
1. ¿Sabes en qué consiste un censo nacional de población y vivienda?

2. ¿Qué se busca conocer en la situación planteada?

3. ¿Cómo se presentan las edades en la tabla?

4. ¿Qué representan el promedio y la mediana de un conjunto de datos?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan



1. ¿Con qué estrategia podemos hallar el promedio y la mediana de datos agrupados?

a) Diagrama lineal.

b) Buscando patrones.

c) Usando fórmulas.

d) Resolviendo un problema más simple.

Se sugiere el uso de la calculadora o programa de *software*.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Recordamos las fórmulas para hallar el promedio y la mediana de las edades agrupadas:

2. Hallamos el promedio de la edad de los varones hasta los 90 años.

Edades	x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$
[0;10[		2 756 259		
[10;20[		2 876 709		
[20;30[		2 383 378		
[30;40[		1 921 716		
[40;50[		1 479 675		
[50;60[		999 795		
[60;70[		644 750		
[70;80[		387 911		
[80;90]		152 632		
TOTAL		13 602 825		

3. Hallamos la mediana de la edad de los varones peruanos hasta los 90 años.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué opinas del uso de la calculadora o de un *software*?

2. ¿De qué otra forma se hubiesen hallado los resultados del promedio y la mediana?

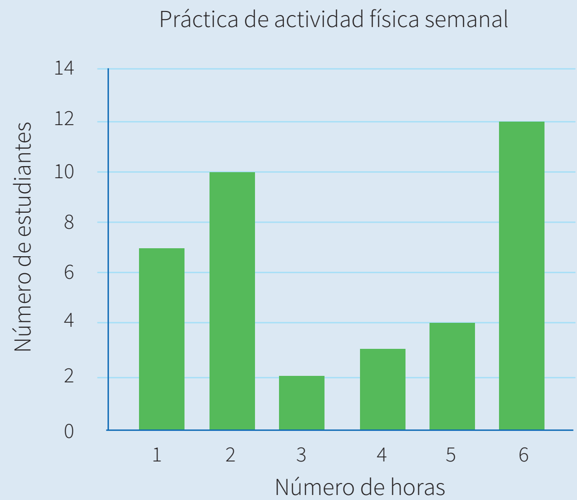
3. ¿Qué indica el valor del promedio y la mediana que hallaste?

Analizamos

Situación A

El siguiente gráfico de barras corresponde al número de horas semanales que realiza actividades físicas un grupo de estudiantes de tercero de secundaria.

Calcula la media y la mediana de este conjunto de datos y haz una comparación entre ellas.



Resolución

Aplicando las fórmulas para datos sin agrupar, hallamos la media y la mediana.

La media es:

$$\bar{x} = \frac{7(1) + 10(2) + 2(3) + 3(4) + 4(5) + 12\,(6)}{38}$$

$$\bar{x} = \frac{137}{38} \approx 3{,}6 \text{ horas}$$

La mediana es:

Como hay 38 datos en total, los de la posición 19 y 20 serán los valores centrales. Luego la mediana es la semisuma de ambos.

$$Me = \frac{3 + 4}{2} = 3{,}5 \text{ horas}$$

Respuesta: Por tanto, la media es ligeramente mayor que la mediana: $3{,}6 > 3{,}5$

1. ¿Por qué las fórmulas aplicadas son distintas a las que se dieron anteriormente?

2. ¿Qué estrategia se aplica en la solución?

Situación B

El siguiente cuadro muestra la cantidad de personas, según edad, afiliadas a una asociación del adulto mayor.

Determina la media de los datos proporcionados en la tabla.

Edad	f_i
[50;60[	10
[60;70[	18
[70;80[	14
[80;90[	6
[90;100[	2

Resolución

Con ayuda de la fórmula para datos agrupados, hallamos la media. Pero antes organizamos en una tabla lo que vamos a necesitar:

Edad	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[50;60[	55	10	550
[60;70[	65	18	1170
[70;80[	75	14	1050
[80;90[	85	6	510
[90;100[	95	2	190
Total		50	3470

Respuesta: La media o promedio de la edad de las personas afiliadas es: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i}{n} = \dfrac{3470}{50} = 69{,}4$ años.

1. ¿Cómo se están presentando las edades?

2. ¿Qué indica la columna x_i?

3. ¿Qué estrategias han ayudado a la resolución de esta interrogante?

Situación C

Teniendo la siguiente información, halla la moda de las edades de los varones.

Edades	Varones
[0;10[	2 756 259
[10;20[	2 876 709
[20;30[	2 383 378
[30;40[	1 921 716
[40;50[	1 479 675
[50;60[	999 795
[60;70[	644 750
[70;80[	387 911
[80;90]	152 632
Total	13 602 825

Resolución

(Encuentra el error)

- Como estrategia usamos la fórmula de la moda (Mo) para datos agrupados:

$$Mo = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) A$$

donde:

$$d_i = f_{Mo} - f_{Mo-1}$$

$$d_2 = f_{Mo} - f_{Mo+1}$$

- Además:

L_i : Límite inferior del intervalo modal

f_{Mo} : Frecuencia absoluta del intervalo modal

f_{Mo-1} : Frecuencia absoluta anterior al intervalo modal

f_{Mo+1} : Frecuencia absoluta posterior al intervalo modal

A : Amplitud del intervalo modal

En primer lugar, ubicamos el intervalo modal, que es aquel que tiene la mayor frecuencia absoluta.

Edades	Varones (f_i)	
[0;10[	2 756 259	
[10;20[	2 876 709	← Intervalo modal
[20;30[	2 383 378	
[30;40[	1 921 716	
[40;50[	1 479 675	
[50;60[	999 795	
[60;70[	644 750	
[70;80[	387 911	
[80;90]	152 632	
Total	13 602 825	

- Identificamos lo necesario para calcular la moda de estos datos:

  $L_i = 20$

  $f_{Mo} = 2\,876\,709$

  $f_{Mo-1} = 2\,756\,259$

  $f_{Mo+1} = 2\,383\,378$

  $A = 10$

- Con estos datos calculamos d_1 y d_2.

  $d_1 = f_{Mo} - f_{Mo-1} = 2\,876\,709 - 2\,756\,259 = 120\,450$

  $d_2 = f_{Mo} - f_{Mo+1} = 2\,876\,709 - 2\,383\,378 = 493\,331$

Luego:

$$Mo = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) A = 20 + \left(\frac{120\,450}{120\,450 + 493\,331}\right) \cdot 10$$

$$Mo = 20 + \left(\frac{120\,450}{613\,781}\right) \cdot 10 = 20 + 0{,}196 \cdot (10) = 21{,}96$$

Respuesta: Concluimos que la moda de este conjunto de datos es 21,96 años, es decir, 22 años aproximadamente.

1. ¿Qué indica el valor de la moda de este conjunto de edades?

2. Se ha ubicado el intervalo modal en el intervalo [10;20[que corresponde a las edades. ¿Será correcto que la moda resulte 22 años aproximadamente?, ¿por qué?

3. ¿Qué cambiarías en la resolución y qué resultado tienes ahora?

Practicamos

1. Dados los pesos de 10 niños: 42 kg, 38 kg, 46 kg, 40 kg, 43 kg, 48 kg, 45 kg, 43 kg, 41 kg y 39 kg, ¿cuál o cuáles de las afirmaciones siguientes son verdaderas?

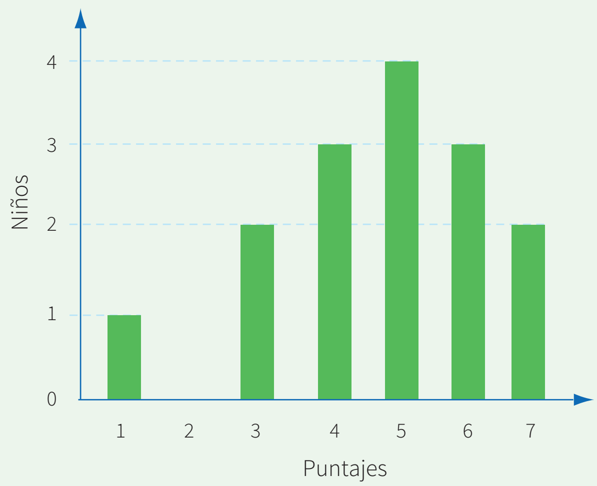
I) La moda de la distribución es 43 kg.

II) El promedio es menor que 43 kg.

III) La mediana coincide con la moda.

a) Solo I **b)** Solo I y III **c)** Solo I y II **d)** Solo II y III

2. El gráfico representa los puntajes obtenidos por 15 niños en una prueba. ¿Cuál o cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?



I) La mediana es 5.

II) La moda es 5.

III) La media aritmética (promedio) es 4,7.

a) Solo II

b) Solo III

c) Solo II y III

d) I, II y III

Empresa de transporte interprovincial

Se clasificaron las horas de manejo mensuales de los conductores de dos empresas de transporte interprovincial. Se obtuvieron las siguientes tablas:

Empresa A

Horas	N.º de conductores
[110;120[	20
[120;130[	30
[130;140[	20
[140;150[	10

Empresa B

Horas	N.º de conductores
[105;115[	30
[115;125[	50
[125;135[	30
[135;145[	10

Con esta información, responde las preguntas 3 y 4.

3. Determina la media de horas de las dos empresas y señala la afirmación correcta con respecto a dicha media.

a) La media de la empresa A es igual que la media de la empresa B.

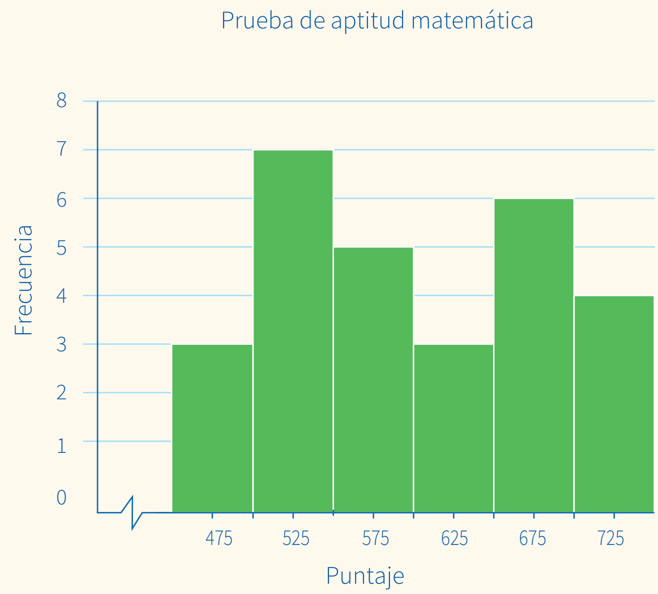
b) La media de la empresa A es menor que la media de la empresa B.

c) La media de la empresa A es mayor que la media de la empresa B.

4. Elabora histogramas para representar las horas de manejo de los conductores de cada empresa de transporte interprovincial.

Prueba de aptitud matemática

El siguiente gráfico corresponde a los puntajes obtenidos por un grupo de estudiantes en un simulacro de una prueba de ingreso a la universidad.



Con esta información, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. Calcula la mediana de los puntajes obtenidos en esta prueba de aptitud matemática.

a) 475 puntos **b)** 590 puntos **c)** 600 puntos **d)** 550 puntos

6. Sabiendo que para aprobar la prueba de aptitud matemática se requiere superar los 500 puntos, ¿para qué será importante calcular la mediana de este conjunto de datos?

a) Para saber cuál es el puntaje que permite aprobar en esta prueba.

b) Para saber si la mitad del salón superó el puntaje mínimo aprobatorio.

c) Para saber si coincide con el puntaje necesario para aprobar.

d) Para saber cuál es el puntaje que más se repite.

7. Construye una tabla de frecuencias que incluya los intervalos de clase, la frecuencia absoluta de cada clase y las frecuencias absolutas acumuladas.

8. Veinte números tienen un promedio de 20; doce de los números tienen un promedio de 8. ¿Cuál es el promedio de los otros ocho números?

a) 12 **b)** 28 **c)** 62 **d)** 38

9. Tiempo de carreras

Se han realizado dos cronometrajes (en s) en una carrera de 200 metros planos a un grupo de 18 atletas, uno antes y otro después de una serie de entrenamientos. Los resultados son los siguientes:

Antes del entrenamiento

21,6	25,5	26,9	26,8	28,7	27,8
23,9	21,1	23,9	21,6	25,5	23,9
25,7	28,9	24,3	27,7	25,3	21,9

Después del entrenamiento

21,6	24,1	25,3	24,4	26,1	24,9
23,4	21,4	23,5	22,5	23,7	22,9
25,1	27,2	24,1	27,2	23,4	21,5

¿Cuánto debería correr un atleta después del entrenamiento para que la mitad de los atletas tengan un tiempo menor que él (o como mucho lo mismo) y la otra mitad, un tiempo mayor que él?

a) 23,9 s **b)** 23,0 s **c)** 23,5 s **d)** 24,2 s

10. La siguiente tabla muestra la distribución del ingreso familiar correspondiente a 80 familias.

f_i: Frecuencia absoluta simple

F_i: Frecuencia absoluta acumulada

h_i: Frecuencia relativa simple

Intervalo de los ingresos (S/)	f_i	F_i	h_i
[160;170[			
[170;180[	48	60	
[180;190[			0,125
[190;200[			0,075
[200;210]			

Determina el número de familias que ganan menos de 200 soles.

Ficha 4

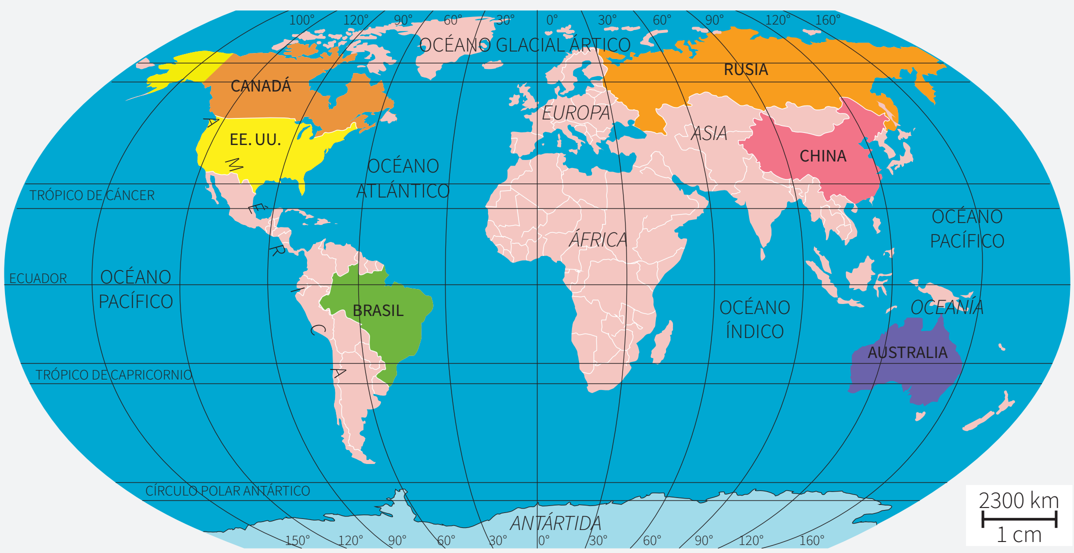
El mapamundi

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o el recorrido de un objeto real o imaginario, y los representa utilizando coordenadas cartesianas, planos o mapas a escala.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee textos o gráficos que describen formas geométricas y sus propiedades, y relaciones de semejanza y congruencia entre triángulos. Lee mapas a diferente escala y compara su información para ubicar lugares o determinar rutas.

Aprendemos

Una representación cartográfica de nuestro planeta es el conocido "mapamundi", palabra proveniente del latín que significa "mapa del mundo", y se representa sobre un papel, aunque también en un globo terráqueo. Esta representación cartográfica facilita información de gran utilidad para comprender el planeta Tierra en su totalidad: la división en dos hemisferios, su radio y diámetro, la superficie terrestre y acuática, así como los husos horarios.

La historia cuenta que el primer mapamundi fue realizado por los babilonios hace 2500 años sobre unas tablillas de arcilla. En el siglo II a. C., la cultura china también elaboraba mapas. La evolución del mapamundi como representación geográfica se dio a finales del siglo XVI, gracias al matemático, geógrafo y cartógrafo belga Gerard Kremer, conocido como Gerardo Mercator. Él ideó el mapamundi actual, que con el transcurso del tiempo se ha ido perfeccionando.



Adaptado de *https://goo.gl/sSFsyd*

Responde:

1. ¿Cuál es la escala del mapamundi mostrado?

2. Según el mapamundi, ¿cuál es la mayor longitud de este a oeste en Sudamérica en la realidad?

Comprendemos el problema

1. ¿En qué se diferencia un mapa de un plano?

2. ¿Qué información se observa en la esquina inferior derecha del mapa?

3. ¿Qué conocimiento matemático se emplea para obtener información de las distancias en un mapa?

4. ¿Qué te piden hallar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué tipos de escalas hay?

2. ¿Qué estrategia utilizamos para hallar, a partir del mapamundi, la mayor longitud de este a oeste en Sudamérica en la realidad?

a) Realizar diagramas analógicos.

b) Realizar medidas con instrumentos y cálculos de longitudes haciendo uso de escalas.

c) Realizar un diagrama más grande de lo que se da con apoyo de la escala.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Dibuja y describe la escala que se encuentra en la parte inferior derecha del mapa.

2. Mide con una regla la mayor longitud de este a oeste del mapa geográfico de Sudamérica (considera el mapamundi de la situación inicial) e indica su valor en centímetros (cm).

3. Plantea la ecuación de proporcionalidad (regla de tres simple) entre la equivalencia de la escala gráfica y la medida obtenida del mapamundi.

4. ¿Cuál es la mayor longitud de este a oeste en Sudamérica en la realidad?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué conocimientos matemáticos se han aplicado para responder la interrogante?

2. ¿Qué lectura tendría una escala numérica 1 : 2000?

3. Para representar la plaza del Cusco, ¿usarías un mapa o un plano?, ¿por qué?

Analizamos

Situación A

En el siguiente mapa se muestra un local ubicado en la avenida Militar, entre los jirones Manuel Candamo y Bartolomé Herrera. Un empresario muestra interés en comprarlo y solo tiene conocimiento de que el costo por metro cuadrado es de 500 dólares. ¿Cuál es el costo del local?

Resolución

- Se ubica la escala del mapa (está en la parte inferior derecha) y se calcula que ese segmento mide 2 cm, lo que equivale a 20 m en la realidad.
- Se aplican estratégicamente proporcionalidades:

  2 cm (del mapa) $\equiv$ 20 m (de la realidad)

  1 cm (del mapa) $\equiv$ 10 m (de la realidad)

  1 cm (del mapa) $\equiv$ 1000 cm (de la realidad)
- Entonces, 1 cm en el mapa equivale a 1000 cm en la realidad, por lo que la escala es 1 : 1000.
- Midiendo el ancho y el largo del local en el mapa, resulta 1 cm y 3 cm, por lo que en la realidad serán 1000 cm y 3000 cm, respectivamente. Ahora bien, para convertir estas medidas a metros, se divide por 100:

  Ancho: 10 m

  Largo: 30 m
- Luego se aplica la fórmula del área de un rectángulo. Por ello, estos valores se multiplican:

  $A = 10 \times 30 = 300\ m^2$
- Como piden el costo del local, se multiplica el área por el precio:

  Costo: $300 \times 500 = 150\,000$ dólares

  Respuesta: El costo del local será 150 000 dólares.

1. ¿Cómo has obtenido el dato de la escala?

2. ¿Qué estrategia se utilizó para la resolución de la situación A?

3. ¿A cuántos soles equivale el costo del local?

4. ¿En qué otras situaciones son útiles los conocimientos de escalas?

Situación B

En un mapa de América del Sur a escala de 1 : 84 000 000, la mayor distancia de norte a sur corresponde a 120 mm, y la mayor distancia de este a oeste, a 100 mm aproximadamente. ¿Cuántos kilómetros suman estas distancias?

Resolución

Se aplican estratégicamente razones de proporcionalidad:

- Haciendo uso de la escala, se calcula la distancia real que existe entre el norte y el sur:

$$E = \frac{D}{R}$$

Donde

E: escala

D: medida lineal del dibujo del objeto (medida en el plano o mapa)

R: medida lineal del objeto real (medida en la realidad)

$$E = \frac{1}{84\,000\,000} = \frac{120 \text{ mm}}{d_1}$$

$$d_1 = 120 \times 84\,000\,000 \text{ mm} = 10\,080\,000\,000 \text{ mm}$$

$$d_1 = 10\,080 \text{ km}$$

- Ahora se calcula la distancia real que existe de este a oeste:

$$E = \frac{1}{84\,000\,000} = \frac{100 \text{ mm}}{d_2}$$

$$d_2 = 100 \times 84\,000\,000 \text{ mm} = 8\,400\,000\,000 \text{ mm}$$

$$d_2 = 8400 \text{ km}$$

Respuesta: La suma de las distancias reales es

10 080 km + 8400 km = 18 480 km

1. ¿Qué es una razón de proporcionalidad?

2. ¿Cómo se han obtenido las siguientes equivalencias?

$$10\,080\,000\,000 \text{ mm} \equiv 10\,080 \text{ km}$$

$$8\,400\,000\,000 \text{ mm} \equiv 8400 \text{ km}$$

Situación C

La distancia que hay entre una iglesia y un colegio es de 2,4 km. Se tiene un mapa a escala 1 : 10 000. ¿Cuál será esta distancia en centímetros (cm) en dicho mapa?

Resolución

(Encuentra el error)

- Según el dato de la escala, se tiene que 1 cm del mapa equivale a 10 000 cm en la realidad.
- Aplicando estratégicamente las equivalencias:

  2,4 km ≡ 2400 m

  2,4 km ≡ 24 000 cm
- Ahora se aplica la fórmula para hallar la escala:

$$E = \frac{D}{R}$$

$$\frac{1}{10\,000} = \frac{x}{24\,000}$$

$$x = 2{,}4 \text{ cm}$$

Respuesta: En el mapa, la distancia de la iglesia al colegio estará representada por 2,4 cm.

1. ¿Cómo se halla la equivalencia de 2400 m en cm?

2. ¿La respuesta obtenida es correcta? Si no lo fuera, ¿qué corrección harías?

3. ¿Qué estrategias se aplicaron para resolver la interrogante?

Practicamos

1. En un plano a escala 1 : 75, una torre de electrificación rural tiene una altura de 24 cm. ¿Cuál será la altura de la torre en la realidad?

a) 12 m **b)** 15 m **c)** 18 m **d)** 24 m

2. En un mapa construido a escala de 1 : 90 000 000, la mayor distancia de norte a sur corresponde a dos puntos situados a 170 mm, y la mayor distancia de este a oeste corresponde a 110 mm aproximadamente. ¿Cuántos kilómetros representan estas distancias?

a) 15 300 km y 9900 km **b)** 16 300 km y 99 900 km
c) 17 300 km y 8900 km **d)** 21 300 km y 7900 km

3. El diámetro de la Luna es de 3,5 km; sin embargo, en el visor de un telescopio se ve con un diámetro de 1,6 cm. ¿Qué escala se ha empleado?

a) 1 : 218 750 **b)** 1 : 220 750
c) 1 : 284 750 **d)** 1 : 218 850

4. En el Callao se quiere llegar desde La Punta hasta el lugar señalado en la isla San Lorenzo. ¿Cuántos metros será el recorrido siguiendo la ruta señalada?

5. Las avenidas Precursores y Próceres forman entre sí un ángulo de 37°.

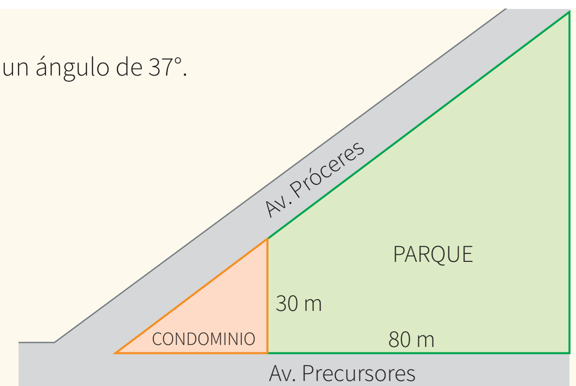
¿Cuál es el perímetro del parque?

a) 250 m

b) 280 m

c) 300 m

d) 320 m



6. En el plano de la pregunta anterior, ¿qué escala se está usando?

a) 1 : 20 **b)** 1 : 200 **c)** 1 : 2000 **d)** 1 : 20 000

7. En el siguiente plano, ¿qué herramientas debes usar para conocer la escala empleada?

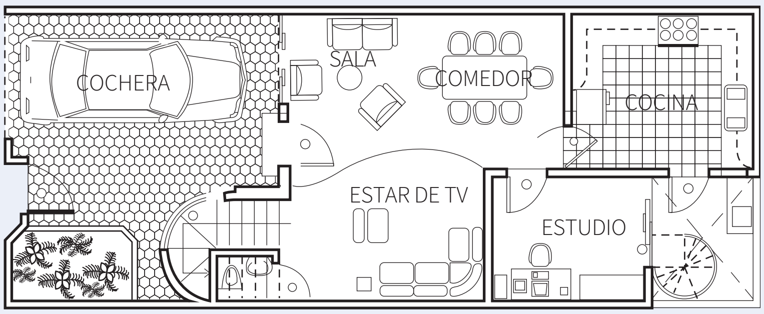
Fuente *https://goo.gl/D1xhpT*

8. En el plano de la pregunta anterior, ¿cuál es la escala que se está usando? (Sugerencia, realizar la medición con una regla sobre el dibujo del plano).

a) 1 : 50 **b)** 1 : 20 **c)** 1 : 150 **d)** 1 : 250

9. La longitud del automóvil mostrado en el siguiente plano es de 4,5 m. ¿Cuál es el área aproximada de la vivienda?

a) 120 m^2 **b)** 90 m^2 **c)** 150 m^2 **d)** 180 m^2



Fuente *https://goo.gl/D1xhpT*

10. Si en el plano de un tanque elevado de 4 m de diámetro y 3 m de alto, el diámetro del tanque mide 10 cm, ¿cuánto es la escala que se está usando?, ¿y cuánto medirá el alto en centímetros (cm)?

Ficha 5

El recorrido de una esfera

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficos.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos, regularidades, condiciones de equivalencia o variación entre magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen funciones cuadráticas $f(x) = x^2$, $f(x) = a\,x^2 + c$, $f(x) = a\,x^2 + bx + c$, para todo *a* diferente de cero, con coeficientes enteros y racionales.
	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el comportamiento gráfico de una función cuadrática, sus valores máximos, mínimos e interceptos, su eje de simetría, vértice y orientación, para interpretar su solución y estableciendo conexiones entre dichas representaciones.

Aprendemos

Manuel es un estudiante muy observador de tercer grado de secundaria. Él realiza el experimento de dejar caer una esfera desde una determinada altura (varias veces). Esta esfera experimenta un movimiento vertical de caída libre.

Un movimiento vertical de caída libre es aquel donde la velocidad inicial es cero y conforme va transcurriendo el tiempo aumenta a razón de 9,8 m/s, porque este cuerpo está afecto a la aceleración de la gravedad, que es 9,8 m/s^2 en el planeta Tierra.

Con ayuda de un cronómetro (para medir el tiempo en segundos) y una “wincha” (cinta métrica para medir la altura en metros), Manuel encuentra la altura desde la cual se deja caer la esfera. Esta altura depende del tiempo que demora la esfera desde que se deja caer hasta que llega al suelo.

Para el experimento de dejar caer libremente una esfera desde una determinada altura, Manuel halló los siguientes resultados:

Tiempo (s)	0	1	2	3	...
Altura (m)	0	5,0	19,8	44,0	...

Responde:

1. ¿Cuál sería la función matemática que permite hallar el recorrido de la esfera?

2. Muestra en el plano cartesiano el recorrido de la esfera.

Comprendemos el problema

1. ¿Cómo describes un movimiento vertical de caída libre?

2. ¿Cómo actúa la gravedad en este movimiento?

3. ¿Qué información se tiene del experimento de Manuel?

4. ¿Qué te piden realizar?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. Sabemos que los físicos ya demostraron una fórmula para caída libre. Entonces, ¿qué estrategia se puede utilizar para encontrar la función del recorrido de la esfera?

a) Utiliza el ensayo y error.

b) Empieza por el final.

c) Usa una fórmula.

d) Resuelve un problema más simple.

2. ¿Qué tipo de gráfico se adecúa para representar el recorrido de la esfera?

a) Diagrama de Venn.

b) Diagrama de árbol.

c) Diagrama cartesiano.

d) Diagrama lineal.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. ¿Cuál es la fórmula de caída libre que han demostrado los físicos?

2. Si hallas algunos valores con la fórmula de caída libre, ¿los resultados obtenidos serán los mismos que Manuel presentó en la tabla?

3. ¿Cuál sería la función matemática que permite hallar el recorrido de la esfera?

4. Grafica en un diagrama cartesiano los resultados obtenidos del recorrido de la esfera, relacionando el tiempo y la altura que alcanza.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué estrategias fueron útiles para resolver la situación inicial?

2. ¿Cómo se llama la función matemática que se ha obtenido?

3. ¿Por qué la gráfica solo muestra la mitad de una parábola?

4. ¿Se pueden hallar los valores máximo y mínimo de una parábola sin graficarla?

5. ¿Qué otras situaciones de la vida cotidiana se representan gráficamente con una parábola?

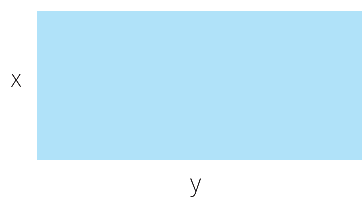
¿? Analizamos

Situación A

Jorge compró en oferta 300 metros de malla y decide cercar parte de sus tierras, pero tendría que ser el mayor terreno rectangular posible. ¿Cuáles tendrían que ser las dimensiones de uno de sus lados y el área de este terreno?

Resolución

Se hace un diagrama analógico del terreno rectangular para plantear una ecuación relacionando los lados del terreno y, así, hallar el perímetro y el área:



Longitud del ancho del terreno: x

Longitud del largo del terreno: y

Como se pide hallar el perímetro, entonces se tiene:

$2x + 2y = 300$

$x + y = 150$

$y = 150 - x$

Para el área: $A = x \cdot y$

$A = x(150 - x)$

$A = -x^2 + 150x$

Lo que se ha obtenido con el área es una función cuadrática donde la variable cuadrática está antecedida por un signo negativo. Entonces la gráfica de esta función será una parábola que se abre hacia abajo.

Lo que se pide es el área máxima. Entonces, como estrategia, se utiliza la fórmula del vértice, ya que este será el valor máximo de la función:

$$V = \left(\frac{-b}{2a} ; \frac{-b^2 + 4\,ac}{4a} \right) = \left(\frac{-(150)}{2 \cdot (-1)} ; \frac{-150^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} \right) = (75 ; 5625)$$

Por tanto, el ancho deberá ser 75 m y el área, 5625 m^2.

Respuesta: Para que Jorge pueda cercar la mayor parte de su terreno con 300 metros de malla, deberá considerar un cuadrado de lado de 75 m y tendría un área de 5625 m^2.

1. ¿Qué estrategias reconoces en la solución?

2. ¿Por qué se toma el valor del vértice como punto o valor máximo? ¿En qué situación el vértice sería el punto o valor mínimo?

3. ¿Qué diferencia hay entre área y perímetro?

4. ¿A qué corresponden los valores a, b y c de la fórmula del vértice?

Situación B

Un vendedor de frutas tiene 100 kg de naranja para la venta del día a S/2 por kilogramo. Además, cada día que pasa se estropea 1 kg, por lo cual el precio aumenta S/0,1 por kilogramo. Si la función que representa el costo de todas las naranjas en relación con el número de días que han transcurrido es:

$$F(x) = (100 - x)(2 + 0,1x)$$

Donde: "x" representa los días.

¿En cuántos días se deben vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será el máximo beneficio obtenido?

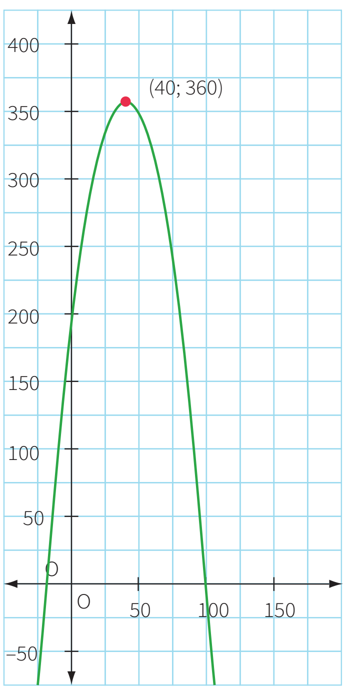
Resolución

Como estrategia de solución, se organizan en una tabla los resultados obtenidos con la función:

$$F(x) = (100 - x)(2 + 0,1x)$$

Tiempo (días)	0	20	40	60	80	100
Valor de venta (S/)	200	320	360	320	200	0

Como estrategia también se puede resolver el problema con ayuda de las TIC, empleando Geogebra, y obtener los valores del vértice, que serán los valores máximos, ya que la parábola se abre hacia abajo:



Respuesta: Las naranjas se deben vender en 40 días para obtener el máximo beneficio, que será S/360.

1. ¿Qué estrategias se encuentran en el desarrollo?

2. ¿De qué otra manera se puede expresar la función $F(x) = (100 - x)(2 + 0,1x)$?

3. ¿Qué sucede con los beneficios si la venta se realiza en 20 días?

4. ¿Qué sucede con los beneficios si la venta excede los 40 días?

Situación C

El pueblo Zeta fue invadido por una plaga de mosquitos. Los enfermeros del centro de salud recibieron la medicina para la cura, con la indicación de administrar a los niños la dosis mínima de la expresión $R(x) = x^2 - 50x + 2500$, donde "x" es la dosis en miligramos. Calcula la dosis mínima de la medicina que los enfermeros deben administrar a los niños para curarlos de la picadura de los mosquitos.

Resolución

(Encuentra el error)

Por las características de la función cuadrática:

$R(x) = x^2 - 50x + 2500$

Se puede deducir que su gráfica será una parábola que se abre hacia arriba ($a > 0$). Por tanto, su vértice representará los valores mínimos de la función.

Como estrategia se aplica la fórmula del vértice:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{-b^2 + 4\,ac}{4a}\right) = \left(\frac{-(50)}{2 \cdot (1)}; \frac{-50^2 + 4 \cdot (1) \cdot 2500}{4 \cdot (1)}\right) = (-25\,;\,1875)$$

Respuesta: Recordemos que "x es la dosis en miligramos". Por lo tanto, el valor mínimo es de –25 mg, dosis que los enfermeros deberán administrar a los niños para curarlos.

1. ¿Puede ser el valor de la dosis un número negativo? ¿Por qué ocurrió esto?

2. ¿Cómo cambiarías el desarrollo?, ¿y qué respuesta obtienes?

3. ¿Qué estuvo mal? ¿La estrategia o el algoritmo? Explica.

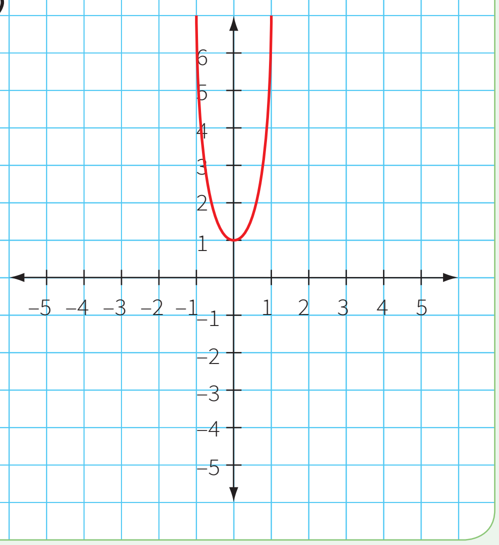
Practicamos

1. A Rubén le gusta jugar tiro al blanco y quiere saber cómo podría calcular el área de cada círculo del tablero. Su profesor le dice: “El área de un círculo es directamente proporcional al cuadrado del radio de la circunferencia y el valor de pi (π) sería la constante”. A partir de esta información, ¿cuál es la representación matemática de la función área del círculo A(c) que Rubén debe emplear para encontrar el área de cada círculo?

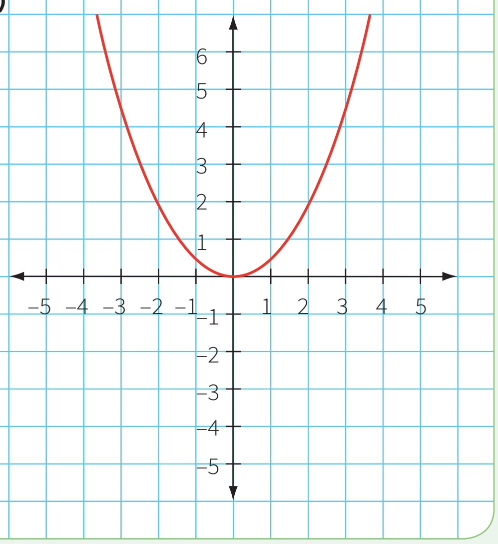
a) $A(r) = \pi r^2$ **b)** $A(r) = \pi r^3$ **c)** $A(x) = 2\pi$ **d)** $A(x) = \pi r^3$

2. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la función cuadrática: $g(x) = \frac{1}{2}x^2$?

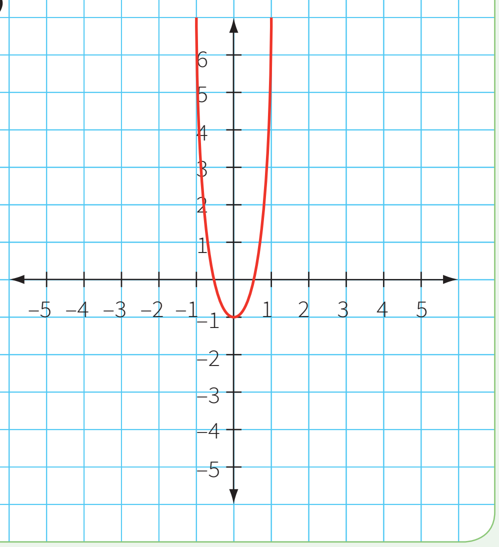
a)



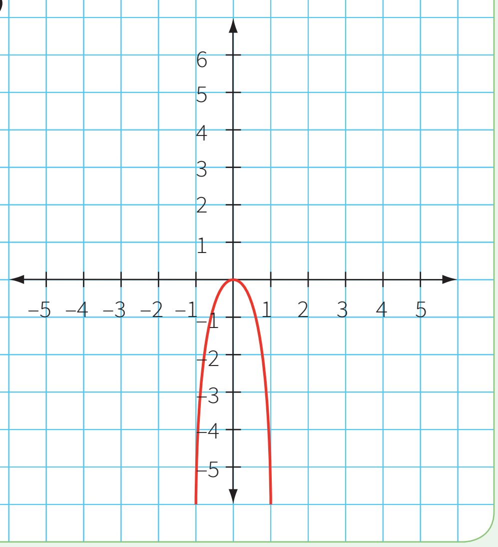
b)



c)



d)



3. Identifica la tabla o tablas de valores que pueden ser funciones cuadráticas.

a)

x	0	1	2	3	4
$f_1(x)$	3	2	5	12	23

b)

x	0	1	2	3	4
$f_2(x)$	1	−3	−7	−11	−15

c)

x	0	1	2	3	4
$f_3(x)$	5	4	1	−4	−11

4. Dada la siguiente función: $f(x) = (ax + m)^2$, donde "a" es un número real mayor que 7/3 pero menor que 100,34, ¿hacia dónde sería la orientación de la parábola?, ¿por qué?

5. ¿Qué sucedería con la gráfica de una función cuadrática $g(x) = (x + 1)^2 + n$, sabiendo que *n* es un número natural, si aumentáramos el valor de *n* en cinco unidades?

a) El vértice de la parábola se desplazaría cinco unidades hacia abajo en el eje de las ordenadas.

b) El vértice de la parábola se desplazaría cinco unidades hacia arriba en el eje de las ordenadas.

c) El vértice de la parábola se desplazaría una unidad hacia la derecha en el eje de las abscisas.

d) El vértice de la parábola se desplazaría una unidad hacia la izquierda en el eje de las abscisas.

6. Con 40 metros de cerca se requiere delimitar, en una finca, un terreno donde se construirá una casa. ¿Cuál es la mayor área que podría tener este terreno?

a) 40 m^2

b) 80 m^2

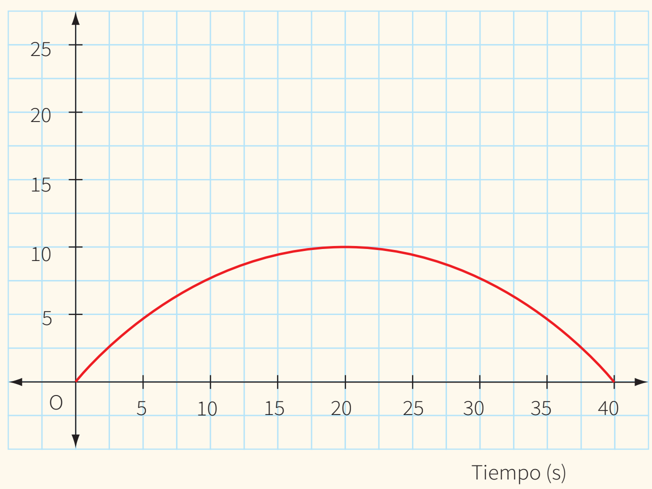
c) 100 m^2

d) 120 m^2

7. **La trayectoria de un balón de fútbol**

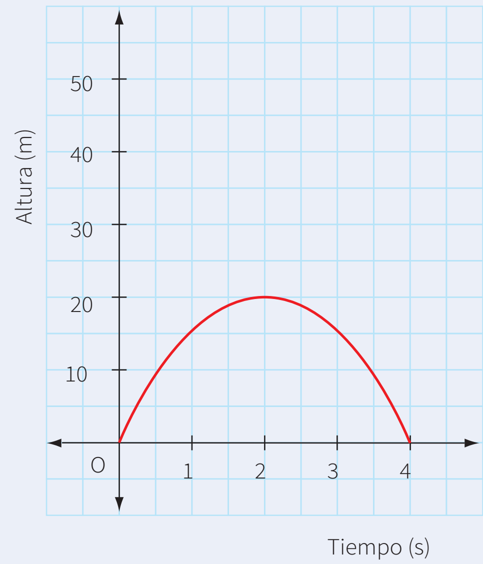
El siguiente gráfico ilustra la trayectoria de un balón de fútbol. La altitud máxima del recorrido del balón respecto al suelo es de 10 m.

Durante su ascenso, ¿a qué distancia horizontal de su punto de partida el balón alcanzó una altura de 6 m?



8. El recorrido de una bengala de socorro

Una bengala es disparada desde una pequeña embarcación hacia el cielo. La altura h(t) (en metros) donde se ubica la bengala en relación con la embarcación en un tiempo t (en segundos) transcurrido desde su lanzamiento puede estar asociada con la regla de $h(t) = -5 (t - 2)^2 + 20$. El siguiente gráfico representa la función h(t).



Por desgracia, este lanzamiento fue un fracaso. Normalmente, la altura máxima que alcanza este tipo de bengala es cuatro veces la altura que alcanzó en la situación descrita y su recorrido tarda el doble del tiempo mostrado en el gráfico. ¿Cuál es la regla de esta función?

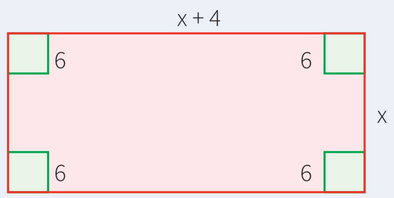
a) $h(t) = -5 (t - 4)^2 + 80$

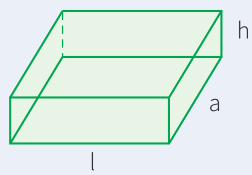
b) $h(t) = -5 (t - 2)^2 + 80$

c) $h(t) = -5 (t - 8)^2 + 80$

d) $h(t) = 5 (t - 2)^2 + 80$

9. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con esta se construye una caja cuyo volumen máximo es de 840 cm^3, cortando un cuadrado de 6 cm en cada esquina y doblando los bordes para formar la caja sin tapa. ¿Cuáles serán las dimensiones de la pieza? (El volumen de la caja está dado por la multiplicación de las longitudes del alto, largo y ancho).





$V = h \times l \times a$

a) Largo 26 cm y ancho 22 cm

b) Largo 14 cm y ancho 10 cm

c) Largo 20 cm y ancho 7 cm

d) Largo 28 cm y ancho 5 cm

10. Un biólogo introdujo en una isla una cantidad de garzas blancas, que en un principio se reprodujeron rápidamente. Pero, debido al cambio climático, los alimentos empezaron a escasear; por tanto, la población decreció. Se pudo registrar que el número de garzas blancas está representado por la siguiente expresión:

$f(x) = -x^2 + 22x + 104$, donde "x" representa los años que transcurrieron desde el momento en que se introdujeron.

Se desea saber cuál fue la cantidad inicial de garzas y en cuántos años se extinguirán por completo, a fin de tomar medidas de protección de esta especie.

Ficha 6

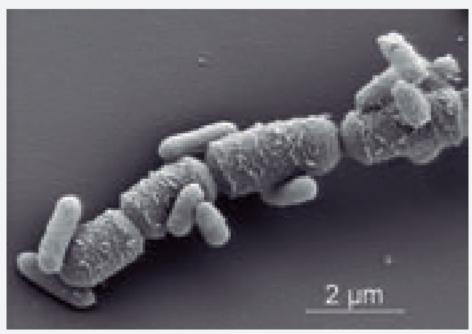
Nuestro macrouniverso y microuniverso

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad	Comunica su comprensión sobre los números y las operaciones.	Expresa con diversas representaciones y lenguaje numérico su comprensión del valor posicional de las cifras de un número hasta los millones, así como comparar y ordenar cantidades expresadas en notación exponencial y científica.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, emplea y combina estrategias de cálculo y estimación, recursos y procedimientos diversos para realizar operaciones con cantidades en notación científica y notación exponencial.

Aprendemos

A veces nos maravillamos con lo inmenso que es nuestro universo. Un cohete espacial tarda de 3,5 a 5 días para recorrer alrededor de 380 000 km; además, sabemos que la distancia de la Tierra al Sol es de 150 000 000 km aproximadamente. Esto nos lleva a pensar en la cantidad de ceros que puede tener un número si habláramos de distancias mayores, ya que nuestro sistema solar es solo un punto en nuestra galaxia. Sucede lo mismo en el microuniverso, donde habitan nuestras células, los microorganismos, etc. Así, por ejemplo, el diámetro de la bacteria llamada *Bacillus megaterium* se encuentra entre 0,000 003 m y 0,000 009 m.

Fuente: *https://goo.gl/gCXQ7i*



Fuente: *https://goo.gl/UcJUr6*

Responde:

1. El diámetro de la bacteria llamada *Bacillus megaterium* se encuentra entre 0,000 003 m y 0,000 009 m. ¿Cuántos números reales están comprendidos en estos dos valores?
2. Si en el universo hay aproximadamente 100 billones de galaxias y cada una tiene alrededor de 400 000 millones de estrellas, y cada estrella, 10 planetas, ¿cuántos planetas aproximadamente habrá en el universo?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te permiten dar solución a la situación planteada?

2. ¿Qué valores numéricos presenta la interrogante de la situación planteada?

3. Escribe la expresión 400 000 millones en su forma numérica.

4. Escribe la expresión 100 billones en su forma numérica.

5. ¿Es lo mismo escribir mil millones que un billón?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Cómo escribirías la cantidad de 1 000 000 000 empleando potencias de 10?

2. ¿Qué estrategia utilizarías para expresar las cantidades grandes o pequeñas de otra forma?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Describe cómo expresarías la cantidad 0,000 003 m en notación científica.

2. Expresa las siguientes cantidades en notación científica.

- 100 billones :
- 400 000 millones :
- Diez :

3. Para hallar la cantidad de planetas que existen en el universo, multiplica las cantidades que se ofrecen como datos (expresadas en notación científica).

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué estrategias fueron útiles para resolver las interrogantes?

2. La expresión $10{,}5 \times 10^9$ está escrita en notación científica. ¿Es correcta? Si no lo es, escribe la expresión adecuada.

Analizamos

Situación A

¿Qué es un año luz?

Un año luz es una medida de distancia y no de tiempo. Mide la distancia que la luz recorre en un año. Para poner en perspectiva esto, digamos que la velocidad de la luz es de 300 000 km por segundo. El resultado de multiplicar este número por 60 (para transformarlo en minutos) es 18 000 000 km por minuto. Luego, nuevamente multiplicado por 60, se transforma en 1 080 000 000 km por hora (mil ochenta millones de kilómetros por hora). Multiplicado por 24 (horas por día), resulta que la luz viajó 25 920 000 000 km (alrededor de veinticinco mil millones de kilómetros en un día). Finalmente, multiplicado por 365 días, un año luz (o sea, la distancia que la luz viaja por año) es, aproximadamente, 9 960 000 000 000 km (casi nueve billones y medio de kilómetros). De ese modo, cada vez que les pregunten cuánto es un año luz, ustedes, convencidos, digan que es una manera de medir una distancia (grande, pero distancia al fin) y que es de casi nueve billones y medio de kilómetros.

(Adaptado de Adrián Paenza. *Matemática… ¿estás ahí?)*

Expresa las operaciones de la velocidad de la luz indicadas en la información. Luego escribe el resultado final en notación científica.

Resolución

Dato: La velocidad de la luz es de 300 000 km por segundo.

- Primero se multiplica la velocidad de la luz por 60 para convertirla en minutos:

  $300\,000 \times 60 = 18\,000\,000 = 1{,}8 \times 10^7$ km por minuto

- Luego se multiplica el resultado por 60 para convertirlo en horas:

  $1{,}8 \times 10^7 \times 60 = 1{,}08 \times 10^9$ km por hora

- Después se multiplica el resultado por 24 para convertirlo en días:

  $1{,}08 \times 10^9 \times 24 = 2{,}592 \times 10^{10}$ km por día

Respuesta: Finalmente, se multiplica el resultado por 365 para convertirlo en años:

$2{,}592 \times 10^{10} \times 365 = 9{,}4608 \times 10^{12}$ km por año

1. ¿Qué procesos se han realizado para la resolución de la situación A?

2. ¿Cómo determinas si el resultado final es la expresión correcta en notación científica?

Situación B

La amapola roja

Es una planta herbácea de tallo recto, flores grandes y semilla negruzca. Es utilizada como símbolo de la memoria de las víctimas de la Primera Guerra Mundial y, con el tiempo, de todas las víctimas militares y de los conflictos armados civiles desde 1914.

Una cabeza de amapola, en la fase final de su desarrollo, está repleta de minúsculas semillas, cada una de las cuales puede originar una nueva planta. La cabeza de una amapola tiene (en números redondos) tres mil semillas. Si el terreno que rodea a la planta fuera suficiente y adecuado para el crecimiento de esta especie, cada semilla daría, al caer al suelo, un nuevo tallo, y en el verano siguiente crecerían en ese sitio tres mil amapolas.

(Adaptado de de Y. Perelman, *Matemáticas recreativas*)

¿Cuántas amapolas se obtendrían si germinaran, sin excepción, todas las semillas en el quinto año? Expresa la cantidad en notación científica.

Resolución

- En el primer año, una amapola daría 3000 nuevos tallos.
- En el segundo año, las 3000 amapolas darían:

  3000 × 3000 = 9 000 000 plantas
- En el tercer año, el número de plantas procedentes de la amapola inicial alcanzaría:

  9 000 000 × 3000 = 27 000 000 000 plantas
- En el cuarto año:

  27 000 000 000 × 3000 = 81 000 000 000 000
- En el quinto año:

  81 000 000 000 000 × 3000 = 243 000 000 000 000 000

Respuesta: La cantidad de plantas en el quinto año, expresada en notación científica, es $2,43 \times 10^{17}$.

1. ¿Todos los pasos del procedimiento son correctos? ¿Por qué?

2. Describe el procedimiento realizado en la resolución de la situación.

Situación C

Calcula el volumen aproximado de la Tierra en metros cúbicos, considerando el radio (6500 km), el valor de $\pi \approx 3{,}14$ y el volumen de una esfera que es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

a) $1{,}15 \times 10^{21}$ m^3 **b)** $1{,}15 \times 10^{24}$ m^3 **c)** $1{,}15 \times 10^{18}$ m^3 **d)** $1{,}15 \times 10^{31}$ m^3

Resolución
(Encuentra el error)

- Se pide hallar el volumen de la Tierra en metros cúbicos. Por lo tanto, el radio debe estar expresado en metros.
- Se usa la fórmula de volumen:

  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

  Sabiendo que:

  $\pi \approx 3{,}14$

  r = 6500 km, que equivale a 6 500 000 m
- Para reducir los números en las operaciones, se usa la notación científica:

  $V = \frac{4}{3}(3{,}14) \times (6{,}5 \times 10^6)^3$

  $V = \frac{12{,}56 \times 274{,}625 \times 10^9}{3}$

  $V = 1149{,}8 \times 10^9$

  $V = 1{,}15 \times 10^9$

Respuesta: El volumen aproximado de la Tierra es $1{,}15 \times 10^{18}$ m^3.

1. ¿Cómo se expresan 6 500 000 m en notación científica?

2. ¿Cómo corregirías esta equivalencia?

$1149{,}8 \times 10^{18} \equiv 1{,}15 \times 10^{18}$

3. ¿Qué estrategias ayudaron a encontrar la respuesta?

4. ¿Por qué el volumen se expresa en unidades cúbicas?

Practicamos

1. Si la masa de una partícula es $5,2 \times 10^{-8}$ g, ¿cuál es la masa de 80 millones de esas partículas?

a) 4,16 g **b)** 41,6 g **c)** 416 g **d)** 4160 g

2. La Vía Láctea es aproximadamente $3,3 \times 10^{34}$ veces el volumen del Sol. ¿Cuántas veces el volumen del Sol equivale a 7 galaxias similares a la Vía Láctea? Escribe en notación científica.

a) $23,1 \times 10^{35}$ **b)** $2,31 \times 10^{35}$ **c)** $23,1 \times 10^{34}$ **d)** $2,31 \times 10^{34}$

3. Si la masa aproximada de un protón es 0,000 000 000 000 000 000 000 167 gramos, ¿cuál será la masa de un millón de protones?

a) $1{,}67 \times 10^{-15}$ g **b)** $1{,}67 \times 10^{-17}$ g **c)** $1{,}67 \times 10^{-16}$ g **d)** $1{,}67 \times 10^{-14}$ g

4. **Cifras astronómicas**

Los exploradores del firmamento manejan sin cesar cantidades formadas por una o dos cifras significativas seguidas de una larga fila de ceros. Sería muy incómodo expresar con los medios ordinarios tales cantidades, llamadas con razón "astronómicas", y sobre todo operar con ellas. Los kilómetros que nos separan de la nebulosa de Andrómeda se representan con la siguiente cifra: 95 000 000 000 000 000 000.

Expresa el valor numérico en centímetros y en notación científica.

5. La superficie terrestre ocupa un total de 135 millones de kilómetros cuadrados. Si una planta de diente de león produce, aproximadamente, 10 semillas cada año y estas, al germinar, producen nuevas plantas, ¿en cuántos años cubriría la superficie terrestre un diente de león si todas sus semillas germinaran y si en cada metro cuadrado hubiera 70 plantas? Expresa en notación científica la cantidad de nuevas plantas de diente de león que crecerían en el periodo que le tomaría cubrir la superficie terrestre.

(Adaptado de Y. Perelman. *Matemática recreativa*)

a) 10^{10} **b)** 10^{12} **c)** 10^{14} **d)** 10^{16}

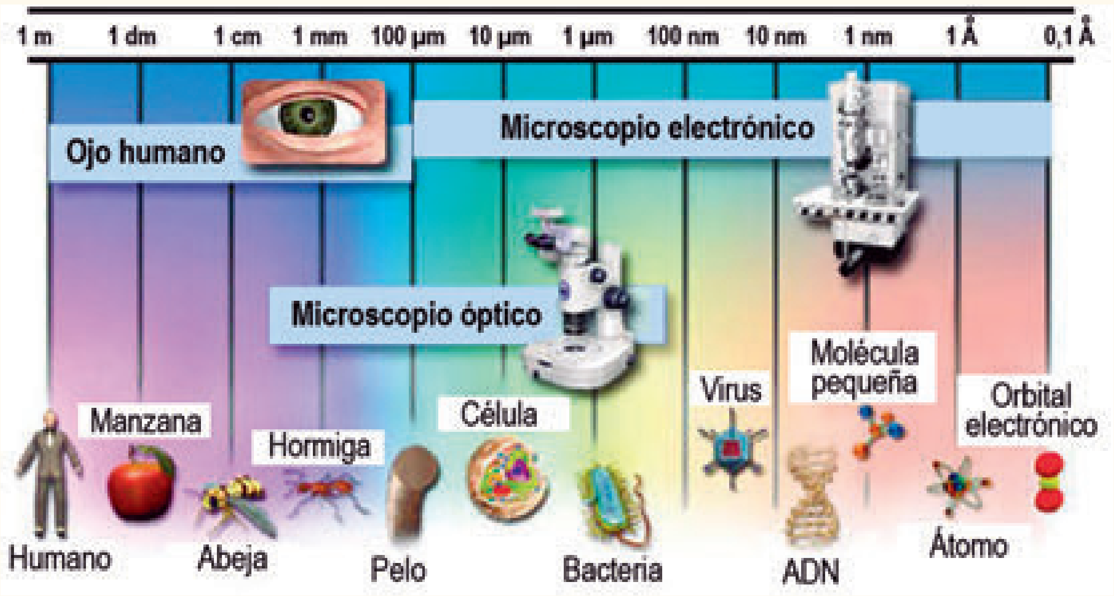
6. Aproximadamente, el 70 % de la superficie de nuestro planeta es agua, y hay alrededor de 1386 millones de km^3 de esta. Escribe en notación científica la cantidad que no es agua en km^3.

a) $5,94 \times 10^5$ **b)** $5,94 \times 10^6$ **c)** $5,94 \times 10^8$ **d)** $5,94 \times 10^9$

El poder de la resolución

La resolución es la capacidad que tiene un sistema óptico de aislar dos puntos que se encuentran muy próximos entre sí, de manera que se puedan ver individualizados uno del otro. Mientras más corta sea la distancia entre esos puntos del objeto, más finos serán los detalles. La distancia entre esos dos puntos se conoce como límite de resolución —el cual es referido también como el poder de la resolución— y puede ser usada como un indicador del rendimiento del microscopio. Esto se puede comparar vagamente con algunos aspectos de la informática; por ejemplo, el tamaño del píxel: mientras más pequeño sea el tamaño, mayor será la cantidad de detalles de la imagen digital. Los límites de resolución aproximados de algunos sistemas ópticos son:

- Ojo humano: Desde 1 m hasta 0,2 mm
- Microscopio óptico: Desde 0,5 cm hasta 0,2 µm
- Microscopio electrónico: Desde 100 µm hasta 0,2 nm



Fuente: *https://goo.gl/prPYut*

Con esta información, responde las preguntas 7 y 8.

7. De acuerdo con la información presentada, identifica el valor de la resolución del microscopio con el que se observa una bacteria; conviértelo en metros y exprésalo en notación científica.

a) 10^{-6} m **b)** $0{,}1 \times 10^{-6}$ m **c)** $0{,}01 \times 10^{-4}$ m **d)** $0{,}001 \times 10^{3}$ m

8. El ojo humano, sin hacer ningún esfuerzo, puede observar objetos del espesor de un pelo, y con el microscopio electrónico se pueden observar objetos del espesor de un átomo. Determina la diferencia que hay entre ambos puntos de resolución, y exprésala en metros y en notación científica.

a) $9{,}999\,99 \times 10^{-5}$ m **b)** $9{,}999\,99 \times 10^{-6}$ m **c)** $9{,}999\,99 \times 10^{-7}$ m **d)** $9{,}999\,99 \times 10^{-8}$ m

Los glóbulos rojos

Si se observa en el microscopio una gota de sangre, se ve que en ella nada una multitud enorme de corpúsculos pequeñísimos de color rojo, que son los que le dan ese color a la sangre. Esos corpúsculos sanguíneos, llamados glóbulos rojos, son de forma circular discoidea, o sea, oval aplanada, hundida en toda su parte central. En todas las personas, los glóbulos rojos son de dimensiones aproximadamente iguales, de 0,007 milímetros de diámetro y de 0,002 mm de grosor. Pero su número es fantástico. Una gotita pequeñísima de sangre, de 1 mm^3 contiene 5 millones de estos corpúsculos. En el cuerpo humano hay un número de litros de sangre 14 veces menor que el número de kilogramos que pesa la persona.

(Adaptado de Y. Perelman. *Matemática recreativa*)

Con esta información, responde las preguntas 9 y 10.

9. Si una persona pesa 40 kilogramos, su cuerpo contiene aproximadamente 3 litros de sangre, que es lo mismo que 3 000 000 de mm^3. ¿Cuál es el número total de glóbulos rojos en dicha persona? Expresa el resultado en notación científica.

(Adaptado de Y. Perelman. *Matemática recreativa*)

a) $1{,}5 \times 10^{13}$ **b)** 15×10^{13} **c)** 13×10^{13} **d)** $1{,}3 \times 10^{13}$

10. Si los glóbulos rojos que hay en 3 litros de sangre se dispusieran en línea recta, uno junto al otro, ¿qué longitud se obtendría en centímetros (cm)? Expresa en notación científica.

Ficha 7 Alimentación saludable

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficas.	Establece relaciones entre datos, regularidades, valores desconocidos, relaciones de equivalencia o variación entre dos magnitudes, y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen proporcionalidad directa e inversa.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Selecciona y emplea recursos, estrategias heurísticas y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos y solucionar situaciones de proporcionalidad directa o inversa usando propiedades de las igualdades.

Aprendemos

En el anexo 1 de la cartilla “Alimentando saludablemente”, elaborada por el Ministerio de Educación, se proponen loncheras nutritivas con diversas alternativas para cada una de las regiones, y en el anexo 2 se ofrece una propuesta de recetas de almuerzos saludables para cuatro raciones, organizadas por regiones. Para la elaboración de estas recetas regionales, se ha tenido como marco de referencia el documento “Procedimiento de diseño y validación de recetas nutricionales”, en el cual se mencionan los alimentos más económicos con mayor aporte de energía y nutrientes (proteínas, hierro, retinol y zinc). A continuación se presenta una receta saludable:

Pescado a la primavera

Ingredientes

1 ¾ de tazas de arroz
½ kg de pescado en filetes
½ taza de zanahoria picada
½ taza de arvejas
1 cebolla
1 tomate
½ taza de choclo
1 cucharadita de ajo
1 cucharada de ají colorado
½ taza de pan molido
1 taza de brócoli
¼ de taza de aceite vegetal, sal yodada, pimienta, hongos, laurel al gusto

Preparación

- Sancochar las arvejas.
- Lavar, filetear el pescado, condimentar con sal yodada y pimienta; apanar con pan molido y freír en aceite vegetal. Reservar.
- Freír en aceite vegetal la cebolla picada en cuadraditos, los ajos, el ají colorado y el tomate picado, rehogar. Condimentar con pimienta y sal yodada. Añadir zanahoria, arvejas, choclo, agua, hongos y laurel. Cocinar.
- Servir el pescado a la primavera acompañado de arroz y ensalada de brócoli.

Fuente: *https://goo.gl/TCMZ2V*


Fuente: *https://goo.gl/ihSXSQ*

Responde:

1. Pablo quiere preparar la receta para un grupo de 3 amigos. ¿Qué ocurrirá con las cantidades de los ingredientes?, ¿cuáles son las cantidades de estos?
2. ¿Qué tipo de variación se produce en esta situación? ¿Por qué?
3. ¿Qué cantidad de ingredientes es necesaria para preparar la receta para 7 personas?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te permiten dar solución a la situación planteada?

2. ¿Qué magnitudes intervienen en la situación inicial?

3. ¿Qué piden las interrogantes de la situación inicial?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué acciones realizarías para determinar la cantidad de ingredientes para 3 y 7 personas?

2. ¿Qué estrategia permitirá organizar la información?

   a) Diagrama cartesiano.

   b) Diagrama analógico.

   c) Diagrama tabular.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Encuentra la cantidad de ingredientes para una ración.

2. Organiza los datos para determinar la cantidad de ingredientes para 3 y 7 raciones.

Ingredientes (4 raciones)	Ingredientes (1 ración)	Ingredientes (3 raciones)	Ingredientes (7 raciones)
1 ¾ de tazas de arroz			
½ kg de pescado en filetes			
½ taza de zanahoria picada			
½ taza de arvejas			
1 cebolla			
1 tomate			
½ taza de choclo			
1 cucharadita de ajo			
1 cucharada de ají colorado			
½ taza de pan molido			
1 taza de brócoli			
¼ de taza de aceite vegetal			

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué estrategias fueron útiles para resolver la situación inicial?

2. ¿Qué ocurre con la cantidad de ingredientes para una persona?

3. Explica qué sucede con los ingredientes para 3 y 7 raciones en relación con los ingredientes para 4 raciones.

4. ¿Cómo se denominan las magnitudes que aumentan en la misma proporción?

5. ¿Con qué otro método puedes encontrar los valores de las cantidades de ingredientes para 3 y 7 raciones?

Analizamos

Situación A

Con 12 kilogramos de alfalfa, 9 conejos comen durante 6 días. ¿Cuántos días tardarán 4 conejos en comerse 8 kilogramos de alfalfa?

Fuente *https://goo.gl/gB9Lke*

Resolución

- Se organiza la información en una tabla de proporcionalidad compuesta:

Proporcionalidad indirecta

Alfalfa (kg)	Conejos	Días
12	9	6
8	4	x

Proporcionalidad directa

- Se aplica la regla de tres compuesta:

$$x = 6 \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{9}{4} = 9$$

Respuesta: Por lo tanto, 4 conejos tardarán 9 días en comer 8 kg de alfalfa.

1. ¿Qué magnitudes intervienen en la situación A?

2. ¿Qué magnitudes son directamente proporcionales y cuáles son inversas o indirectas?

3. ¿Qué estrategia es útil para resolver la situación A?

Situación B

El tutor de los estudiantes de tercer grado planifica un viaje a Canta para el 15 de septiembre por el Día de la Juventud. Para ello, cada estudiante debe juntar S/120. La condición es que cada estudiante aporte la misma cantidad cada día hasta reunir el dinero que le corresponde. Completa la siguiente tabla donde se relaciona el valor del aporte diario y el número necesario de días para que cada estudiante logre reunir todo el dinero.

Aporte de dinero diario	1			4		6		10	12
Número de días	120	60			24	20	15	12	10

Si estamos en la quincena de agosto y solo se da la cuota fija en los días que se va al colegio (de lunes a viernes), ¿cuál será la cuota mínima que se debe aportar para lograr reunir el dinero para el paseo?

Resolución

- Se completa la tabla:

Aporte de dinero diario	1	2	3	4	5	6	8	10	12
Número de días	120	60	40	30	24	20	15	12	10

- Se observa que se trata de una relación de proporcionalidad inversa o indirecta, ya que la razón de proporcionalidad es:

$$(1) \cdot (120) = (2) \cdot (60) = \ \ldots = (12) \cdot (10) = 120$$

- Como desde el 15 de agosto hasta el 15 de septiembre hay 24 días, sin contar sábados ni domingos (tomamos 24 para obtener la cuota fija), entonces hallamos la cuota mínima que debe aportar el estudiante para lograr reunir el dinero para el paseo.

$$120 = (x) \cdot (24), \text{ entonces } x = 5$$

Respuesta: La cuota mínima que se debe aportar para reunir el dinero en 24 días es S/5 por día, sin contar sábados ni domingos, tal como señala la condición del problema.

1. ¿Qué estrategia ayudó en el desarrollo?

2. ¿Por qué se dice que la relación de proporcionalidad es inversa?

3. Si el tiempo aumenta en 6 días más, ¿en cuánto disminuye la cuota por día?

Situación C

Los ingredientes de una receta para un postre casero son los siguientes: 1 taza de mantequilla; 3 huevos; 1,5 tazas de azúcar; y 2 tazas de harina. Si solo tenemos 2 huevos, ¿cómo debemos modificar los ingredientes restantes de la receta para poder preparar el postre?

Resolución

(Encuentra el error)

- Se organiza la información en una tabla de proporcionalidad:

Huevo	Mantequilla	Azúcar	Harina
3	1	1,5	2
2			

- Se observa que la proporcionalidad entre los ingredientes es directa. Por lo tanto, se debe buscar un valor que multiplique a la cantidad de huevos y ese mismo valor será la cantidad que se multiplique a los demás ingredientes:

$\times \frac{2}{3}$

Huevo	Mantequilla	Azúcar	Harina
3	1	1,5	2
2	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$

Respuesta: Las modificaciones al resto de los ingredientes son 2/3 de taza de mantequilla, 3/2 de taza de azúcar y 4/3 de taza de harina.

1. ¿Cómo se explica que la proporcionalidad entre los ingredientes sea directa?

2. ¿Cuánto es la expresión decimal de 3/2?

3. ¿Qué puedes decir de los resultados obtenidos en la tabla? Explica.

4. ¿Se puede resolver con otra estrategia?

Practicamos

1. Seis obreros recubren con losetas 1200 m² de suelo en 4 días. ¿Cuántos metros cuadrados de suelo podrán cubrir con losetas 12 obreros en 5 días?

a) 1500 m² **b)** 1920 m² **c)** 2400 m² **d)** 3000 m²

Taller de confecciones

Por campaña, un taller de confecciones fabrica 720 pantalones trabajando 8 horas diarias durante 15 días. Debido a la gran demanda, recibieron el pedido de confeccionar 1800 pantalones. Por ello, han decidido trabajar 2 horas diarias de sobretiempo.

Fuente: *https://goo.gl/xnFHGn*

Con esta información, responde las preguntas 2; 3 y 4.

2. ¿Cuál de los esquemas se debe usar para resolver el problema?

a)

Proporcionalidad directa

Pantalones	h/d	Tiempo

Proporcionalidad indirecta

b)

Proporcionalidad directa

Pantalones	h/d	Tiempo

Proporcionalidad directa

c)

Proporcionalidad indirecta

Pantalones	h/d	Tiempo

Proporcionalidad indirecta

d)

Proporcionalidad directa

Pantalones	h/d	Tiempo

Proporcionalidad indirecta

3. Según los datos brindados en la situación, ¿en cuánto tiempo entregarán el pedido?

a) 30 días **b)** 12 días **c)** 45 días **d)** 150 días

4. Diego le dice a la maestra que la cantidad de pantalones y las horas diarias trabajadas cumplen una relación proporcional directa. ¿Estás de acuerdo con Diego? ¿Por qué?

Mineros

En una mina, una cuadrilla de 5 mineros abre una galería de 80 metros de longitud en 20 días. Otra cuadrilla tiene 16 mineros dispuestos a trabajar con la misma habilidad que los anteriores.

Fuente: *https://goo.gl/Aah9sQ*

Con esta información, responde las preguntas 5 y 6.

5. Según la información brindada, ¿cuántos metros de galerías abrirá en 25 días la cuadrilla de 16 mineros?

a) 20 metros **b)** 100 metros **c)** 256 metros **d)** 320 metros

6. Una tercera cuadrilla con el doble de mineros que la primera cuadrilla mencionada, ¿cuántos días empleará para abrir 120 metros de galerías?

a) 10 días **b)** 15 días **c)** 40 días **d)** 60 días

7. Con el siguiente modelo escribe una situación que exprese relaciones proporcionales compuestas entre magnitudes.

Proporcionalidad directa

Dato 1	Dato 2	Dato 3

Proporcionalidad indirecta

8. Reservorio de agua

Para construir un reservorio de agua son contratados 24 obreros, que deben acabar la obra en 45 días trabajando 6 horas diarias. Luego de 5 días de trabajo, la empresa constructora tuvo que contratar los servicios de 6 obreros más y se decidió que todos deberían trabajar 8 horas diarias con el respectivo aumento en su remuneración. Determina el tiempo total en el que se entregará la obra.

Fuente *https://goo.gl/NGd2Rb*

a) 24 días **b)** 29 días

c) 30 días **d)** 45 días

9. ¿Cuál de los siguientes esquemas está correctamente relacionado?

a)

Proporcionalidad indirecta

Obrero	h/d	Tiempo	Obra

Proporcionalidad indirecta

Proporcionalidad indirecta

b)

Proporcionalidad directa

Obrero	h/d	Tiempo	Obra

Proporcionalidad directa

Proporcionalidad directa

c)

Proporcionalidad directa

Obrero	h/d	Tiempo	Obra

Proporcionalidad indirecta

Proporcionalidad indirecta

d)

Proporcionalidad directa

Obrero	h/d	Tiempo	Obra

Proporcionalidad indirecta

Proporcionalidad directa

10. Escribe una situación que exprese relaciones proporcionales directas e indirectas entre magnitudes.

Ficha 8 Elegimos un servicio conveniente

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Plantea afirmaciones sobre las posibles soluciones a un sistema de ecuaciones lineales u otras relaciones que descubre. Justifica o descarta la validez de sus afirmaciones mediante un contraejemplo o propiedades matemáticas.

Aprendemos

Matías desea alquilar juegos de Play Station 3. Por eso, va a una tienda y la señorita que atiende a los clientes le explica que hay dos formas de usar el servicio.

Primera forma: "Si se inscribe como socio de la tienda, pagaría una cuota anual de veinte soles y por cada alquiler pagaría cinco soles".

Segunda forma: "Pagar diez soles por cada alquiler sin la necesidad de inscribirse como socio".

Fuente *https://goo.gl/QS4VEq*

Responde:

1. ¿Cuál es la cantidad de juegos que debe alquilar Matías para que cancele el mismo monto para las dos formas de usar el servicio?

2. Soluciona la situación anterior con ecuaciones.

Comprendemos el problema

1. ¿De qué trata la situación inicial?

2. ¿Con qué datos se cuenta?

3. ¿Qué significa “inscribirse como socio”?

4. ¿Qué desea encontrar Matías?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Cómo organizarías las dos formas de usar el servicio para visualizar mejor la situación inicial?

a) En diagramas de Venn. **b)** En tablas. **c)** En planos cartesianos.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Se organizan en tablas las dos opciones:

a) Si es socio de la tienda:

Cantidad de juegos alquilados	0	1	2	3	4	5	6	...
Pago	20							...

b) Si no es socio de la tienda:

Cantidad de juegos alquilados	0	1	2	3	4	5	6	...
Pago								...

2. Luego de organizar la información, responde: ¿cuál es el número de juegos que debe alquilar Matías para cancelar el mismo monto en ambas formas de usar el servicio?

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 98 25/11/17 01:25

3. Ahora se resuelve el problema empleando ecuaciones:

Sea x: el número de juegos que se alquila

Sea y: el monto que se paga

A continuación se plantean ecuaciones para las dos formas de usar el servicio.

Primera forma:

"Si se inscribe como socio de la tienda, pagaría una cuota anual de veinte soles y por cada alquiler pagaría cinco soles".

Segunda forma:

"Pagar diez soles por cada alquiler sin la necesidad de inscribirse como socio".

4. Con ayuda de las TIC, haciendo uso de Geogebra, grafica las dos ecuaciones. Copia los gráficos que obtienes:

$$y = 20 + 5x$$

$$y = 10x$$

5. ¿Qué punto es común a las dos rectas?

6. ¿Cuál es el número de juegos que debe alquilar Matías para pagar el mismo monto en las dos formas? ¿Cuánto es este monto?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cómo se llama el método empleado para la solución del sistema de ecuaciones lineales?

2. ¿Qué estrategias se emplearon para responder la interrogante y ayudar a Matías?

3. ¿Qué forma le conviene a Matías si quiere alquilar más de 4 juegos? ¿Por qué?

4. ¿Cómo se puede comprobar si los resultados son correctos?

5. Resuelve el sistema de ecuaciones con otro método.

$y = 20 + 5x$

$y = 10x$

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 100 25/11/17 01:25

Analizamos

Situación A

Olga desea ponerse en forma y bajar unos kilitos de más. Por ello, va a pedir informes a dos gimnasios ("A" y "B"), donde le brindan los siguientes datos:

GIMNASIO A	
Derecho de inscripción:	S/150,00
Mensualidad:	S/100,00

GIMNASIO B	
Derecho de inscripción:	S/350,00
Mensualidad:	S/50,00

Olga evalúa ambas posibilidades y desea saber cuál es el número de meses por los cuales pagaría lo mismo en cualquiera de las dos opciones.

Resolución

- Se plantean ecuaciones para las dos formas:

  Sea x: el número de meses

  Sea y: el monto que se paga

- Las ecuaciones serán:

  Para el gimnasio "A": $y = 150 + 100x$

  Para el gimnasio "B": $y = 350 + 50x$

- Se ordenan las ecuaciones para resolverlas con el método de igualación:

$$y = y$$
$$150 + 100x = 350 + 50x$$
$$50x = 200$$
$$x = 4$$

- Se halla "y" reemplazando en cualquier ecuación el valor de "x" ($x = 4$):

$$y = 150 + 100 \cdot (4)$$
$$y = 150 + 400$$
$$y = 550$$

Respuesta: El número de meses por los cuales pagaría lo mismo en los dos gimnasios es 4 meses y el pago sería de 550 soles.

1. ¿Qué estrategia se empleó para la resolución de la situación A?

2. ¿De qué otra forma se puede resolver la situación A?

3. ¿Qué gimnasio le conviene a Olga si quiere asistir más de 4 meses? ¿Por qué?

Situación B

José es un estudiante universitario y para pagarse sus estudios trabaja en un restaurante de comida rápida, donde recibe un jornal de 50 soles, pero hay días en que se incrementan sus ingresos con propinas en un promedio de 8 soles. Sabiendo que laboró al mes 21 días y recibió 1098 soles, ¿cuántos días recibió propina?

Resolución

Identificamos los datos del problema:

- Trabajó en total 21 días
- Pago de su jornal: S/50 diarios
- Pago en días con propina: S/50 + S/8 = S/58
- En total recibió S/1098

Se organiza la información en una tabla para probar valores hasta llegar a la respuesta correcta, teniendo la solución con la estrategia conocida como "ensayo y error":

Total de días: 21		Ingresos		Recibió S/1098
Sin propina	Con propina	Sin propina S/50	Con propina S/58	
20	1	(20) · (50) = 1000	(1) · (58) = 58	1058
18	3	(18) · (50) = 900	(3) · (58) = 174	1074
16	5	(16) · (50) = 800	(5) · (58) = 290	1090
15	6	(15) · (50) = 750	(6) · (58) = 348	1098

Respuesta: Recibió propina 6 días.

1. ¿Cómo se llama la estrategia utilizada?

2. ¿De qué otras formas se puede solucionar la situación B?

3. Plantea el sistema de ecuaciones para solucionar la situación B.

Situación C

Por la compra de tres cuadernos más nueve CD, un estudiante de tercero de secundaria paga treinta y tres soles. Asimismo, por nueve cuadernos más tres CD, paga cincuenta y un soles. Sabiendo que se trata del mismo tipo de cuaderno y la misma calidad de CD, ¿cuánto costaron cada cuaderno y cada CD?

Resolución

(Encuentra el error)

- Se definen las variables:

  Sea el precio de cada cuaderno : x

  Sea el precio de cada CD : y

- Se forman las ecuaciones para las dos situaciones:

  $9x + 3y = 33$ ………… Ecuación 1

  $3x + 9y = 51$ ………… Ecuación 2

- Este es un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve con el método de reducción:

$$9x + 3y = 33$$
$$(3x + 9y = 51)\cdot(-3)$$

$$9x + 3y = 33$$
$$-9x - 27y = -153$$

$$-24y = -120$$
$$y = 5$$

- Se halla el valor de "x" reemplazando y = 5 en la ecuación 1:

$$9x + 3y = 33$$
$$9x + 3\cdot(5) = 33$$
$$9x = 18$$
$$x = 2$$

Respuesta: Cada cuaderno cuesta 2 soles y cada CD, 5 soles.

1. ¿Los resultados obtenidos resuelven el problema dado? Comprueba en los siguientes enunciados.

"Por tres cuadernos más nueve CD, se paga treinta y tres soles".

"Por nueve cuadernos más tres CD, se paga cincuenta y un soles".

2. Si las ecuaciones no fueran correctas, ¿dónde se cometió el error?

3. ¿Qué se debe hacer para comprobar que los resultados de un sistema de ecuaciones son correctos?

Practicamos

1. En las olimpiadas de Matemática, participó Rocío en representación de su colegio. La prueba consistía en 60 problemas. Cada respuesta correcta valía 4 puntos y por cada respuesta incorrecta había un punto en contra. Luego del examen, Rocío obtuvo un puntaje de 155. Ella respondió todas las preguntas y desea saber cuántas son correctas y cuántas incorrectas.

a) 40 correctas y 17 incorrectas **b)** 34 correctas y 10 incorrectas

c) 43 correctas y 15 incorrectas **d)** 43 correctas y 17 incorrectas

2. Por el Día de la Juventud, la tutora de tercer grado organizó con sus estudiantes un paseo a Paracas, que incluía la participación de los padres de familia. Si en total fueron 25 personas y el costo del pasaje por adulto fue de 20 soles y por estudiante de 15 soles, y se hizo un pago total de 450 soles, ¿del grupo cuántos fueron estudiantes y cuántos adultos?

a) 15 adultos y 10 estudiantes **b)** 20 adultos y 5 estudiantes

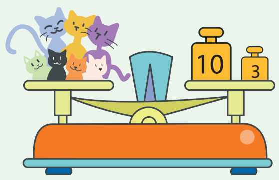
c) 10 adultos y 15 estudiantes **d)** 14 adultos y 11 estudiantes

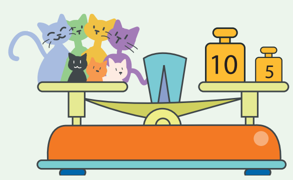
3. Un comerciante de Loreto tiene una tienda de bicicletas y triciclos. Para incrementar el valor de sus productos, decide cambiar los aros de las llantas de todas las bicicletas y triciclos por otros de acero inoxidable. Si utilizó 78 aros de acero inoxidable y, además, se sabe que el triple de la cantidad de bicicletas más el doble de los triciclos es igual a 92, ¿cuántas bicicletas y triciclos tiene?

a) 10 bicicletas y 24 triciclos **b)** 24 bicicletas y 10 triciclos

c) 12 bicicletas y 5 triciclos **d)** 5 bicicletas y 12 triciclos

4. Si los gatos grandes pesan lo mismo y los pequeños también pesan lo mismo, pero los grandes pesan distinto que los pequeños, ¿cuánto pesa cada gato grande y cada gato pequeño?





5. Manuel y Karla, dos estudiantes de segundo grado de secundaria, se presentaron al concurso de admisión del COAR (Colegio de Alto Rendimiento). En la prueba escrita, que constó de veinte preguntas, los dos postulantes respondieron la totalidad de las interrogantes; sin embargo, Karla obtuvo treinta y un puntos, mientras que Manuel, trece puntos. Sabiendo que Karla tuvo diecisiete respuestas correctas y Manuel, nueve respuestas incorrectas, grafica el sistema de ecuaciones y determina cuál es el valor de cada respuesta correcta y de cada respuesta incorrecta.

a) 17 y 3 **b)** 11 y 9 **c)** 2 y -1 **d)** 3 y 0

6. La señora Rosa compró para su hijo una camisa y un pantalón a 175 soles. Si el precio de la camisa aumentara en 15 %, entonces sería el 60 % del precio del pantalón. ¿Cuánto pagó la señora Rosa por la camisa?

a) 115 soles **b)** 60 soles **c)** 105 soles **d)** 80 soles

7. La promoción de estudiantes del quinto grado B está reuniendo fondos para un viaje de estudios. Por eso han decidido presentar la obra *Hamlet*, cuya entrada para adultos tendrá un costo de 25 soles y para niños, el 50 % menos. El día de la presentación recaudaron 1050 soles y asistió un total de 48 personas.

Para que el delegado rinda el balance económico, se necesita conocer cuántos adultos y cuántos niños ingresaron.

Completa la siguiente tabla e indica la respuesta.

48 personas		Recaudaron 1050 soles		Total
Adultos	Niños	Adulto: S/25	Niños: S/12,5	
40	8	(40) · (25) = 1000	(8) · (12,5) = 100	1100
38		(38) · (25) =	(10) · (12,5) =	
	12	(36) · (25) =	(12) · (12,5) =	

¿Cómo se llama esta estrategia de solución?

8. La mitad del valor en soles de una moneda “A” (país “A”) más la tercera parte del valor en soles de una moneda “B” (país “B”) es igual a siete soles. Además, la diferencia entre los valores en soles de las monedas “A” y “B” es cuatro soles.

Representa la situación dada en el sistema de ecuaciones lineales, resuelve aplicando cualquiera de los métodos de resolución y determina el valor en soles de la moneda “A” y el valor en soles de la moneda “B”.

a) A = S/2; B = S/3 **b)** A = S/7; B = S/4 **c)** A = S/6; B = S/10 **d)** A = S/10; B = S/6

9. Roberto compró un radio y un televisor por S/1500 y los vendió a S/1710. ¿Cuánto le costó cada artefacto si se sabe que ganó por el televisor el 15 % y por el radio el 10 %?

a) Radio: S/500; televisor: S/1000 **b)** Radio: S/200; televisor: S/1300

c) Radio: S/300; televisor: S/1200 **d)** Radio: S/100; televisor: S/1400

10. Encuentra una ecuación de modo que junto con la siguiente ecuación $7x + 5y = 20$ formen un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y la solución sea $(5; -3)$.

Ficha 9

Ordenamos la habitación

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario y lo representa utilizando el plano cartesiano. Describe las transformaciones de objetos mediante la combinación de ampliaciones, traslaciones, rotaciones o reflexiones.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre la equivalencia entre dos secuencias de transformaciones geométricas a una figura, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.

Aprendemos

Teresa quería cambiar la ubicación de los muebles en su dormitorio y resultó del siguiente modo:

Imagen inicial

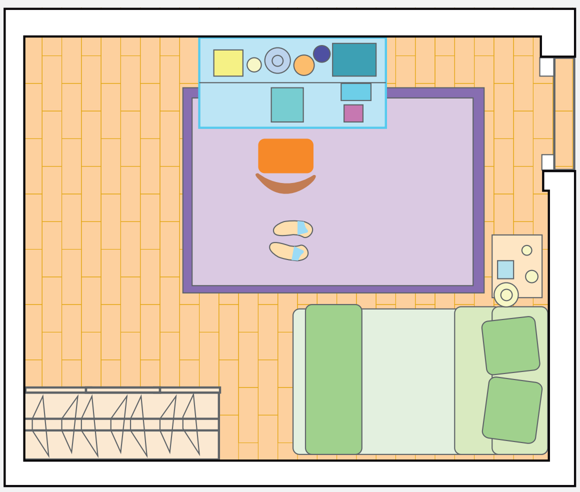
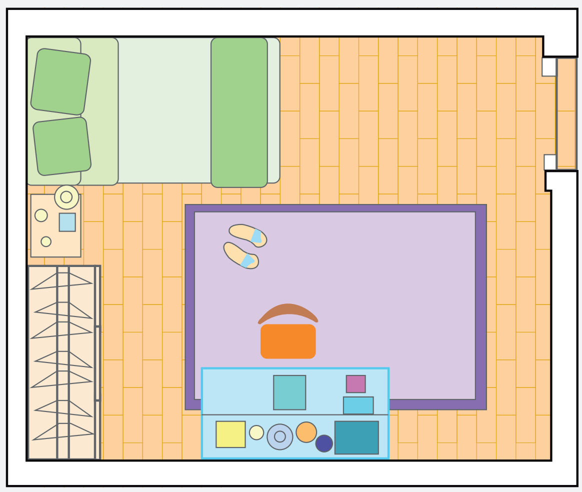


Imagen final



Responde:

1. Justifica con términos matemáticos la nueva ubicación de los muebles con respecto al original.

2. ¿Habrá cambiado la medida del área libre en el dormitorio?

Comprendemos el problema

1. Describe los movimientos que se han hecho a los muebles.

2. ¿Por qué crees que Teresa cambió la posición de los muebles?

3. ¿Qué movimientos se han realizado?

4. ¿Cómo se puede medir el área libre?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. Para organizar la información y relacionarla con las transformaciones geométricas, es conveniente:
   - **a)** Usar un diagrama de tabla.
   - **b)** Comparar las imágenes.
   - **c)** Usar el ensayo y error.

2. ¿Con qué conocimiento matemático se relacionan los movimientos realizados con los muebles?
   - **a)** Áreas y perímetros.
   - **b)** Prismas.
   - **c)** Transformaciones geométricas.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Observa las dos imágenes, compáralas y anota los cambios de posición usando el lenguaje matemático.

   Cama y mesa de noche:

   Ropero:

   Escritorio y silla:

   Pantuflas y alfombra:

2. Si el dormitorio y los muebles son los mismos en la imagen inicial y final, ¿el área que ocupan los muebles será distinta?, ¿por qué?

3. Si se halla el área desocupada de la imagen inicial y final, ¿cómo serán los resultados?

4. Si se retira un mueble del dormitorio, ¿qué ocurrirá con el área desocupada?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué sentido matemático encuentras a la situación inicial?

2. ¿Cómo te servirán estos conocimientos matemáticos en la vida diaria?

3. ¿Qué transformaciones geométricas conoces?

4. En la naturaleza, ¿qué tipo de transformaciones geométricas observas? Dibuja.

Analizamos

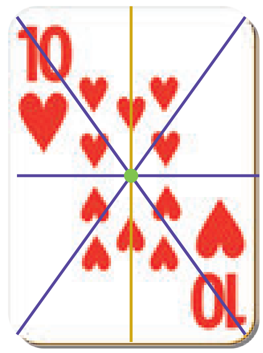
Situación A

Fuente *https://goo.gl/1vBdBv*

Observa las barajas de naipes y responde qué transformaciones presentan.

Resolución

Se tiene una carta de la baraja. Sobre ella se coloca un eje y un centro, y se evidencia que:



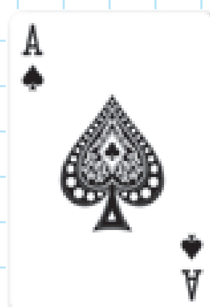
- Si la mitad de abajo se rota 180°, será igual a la de arriba, por lo que hay rotación.
- Si se trazan líneas que pasan por el centro, y por cada línea las figuras son iguales, se trata de una simetría central y, además, de una homotecia inversa, es decir, k = –1.

Respuesta: Las barajas de naipes presentan las siguientes transformaciones geométricas: rotación, simetría central y homotecia.

1. ¿Cuál es la estrategia que te permite identificar las transformaciones geométricas en la imagen?

2. ¿Qué transformación se ha realizado con el número de la baraja?

3. ¿Qué transformaciones se observan en esta carta?

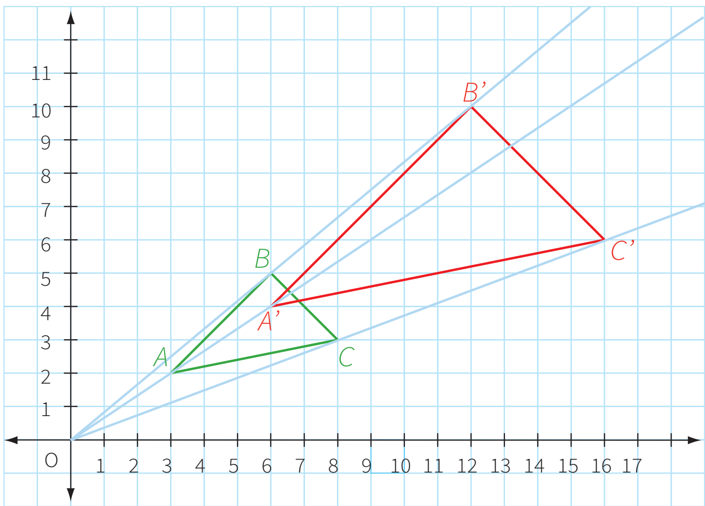


Situación B

Grafica la homotecia de un triángulo de centro en el origen de coordenadas y de vértices en los puntos A (3;2), B (6;5) y C (8;3), cuya razón es igual a 2.

Resolución

- Se realiza un diagrama cartesiano.
- Se grafica el triángulo en el plano cartesiano a partir de sus vértices dados en los puntos A (3;2), B (6;5) y C (8;3).
- Luego, desde el centro (origen de coordenadas), se trazan rectas sobre cada vértice del triángulo y, como k = 2, se duplica la distancia que hay entre el centro y cada vértice para obtener el nuevo triángulo. De este modo:

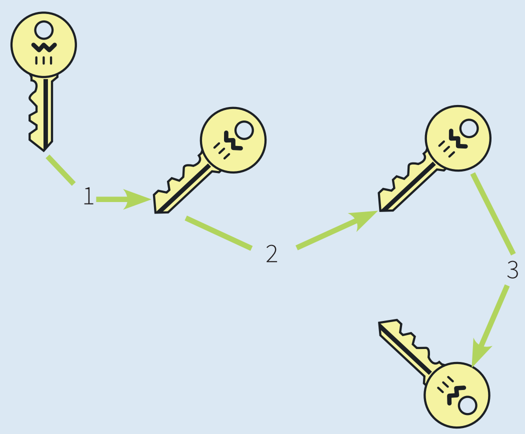


1. ¿Cómo describirías la transformación del Δ ABC obteniendo el triángulo Δ A' B' C'?

2. ¿Qué estrategia ayuda a visualizar mejor la transformación?

Situación C

Observa las imágenes, compáralas y completa.



En el paso 1, la llave está girando. Por lo tanto, hay ______________________.

En el paso 2, la llave mantiene la misma orientación. Por lo tanto, hay ______________________.

En el paso 3, la llave mantiene su tamaño y forma, pero cambia de orientación. Por lo tanto, hay ______________________.

Resolución

(Encuentra el error)

- Para determinar las transformaciones que hay entre una y otra figura, se debe observar y comparar.

Respuesta:

- En el paso 1, la llave está girando. Por lo tanto, hay **simetría central**.
- En el paso 2, la llave mantiene la misma orientación. Por lo tanto, hay **traslación**.
- En el paso 3, la llave mantiene su tamaño y forma, pero cambia de orientación. Por lo tanto, hay **rotación.**

1. ¿Cómo ayuda la comparación en este tipo de situaciones?

2. ¿Qué características tiene una simetría central?

3. ¿Qué características tiene una traslación?

4. ¿Qué características tiene una rotación?

5. ¿Qué respuestas cambiarías de la resolución?

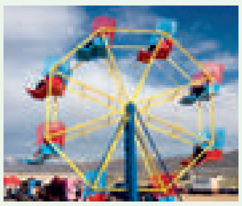
- En el paso 1, la llave está girando. Por lo tanto, existe
- En el paso 2, la llave mantiene la misma orientación. Por lo tanto, existe
- En el paso 3, la llave gira con respecto a un eje. Por lo tanto, existe

Practicamos

1. Cuando una persona está sobre un espejo, la transformación que se observa es:

a) Rotación. **b)** Traslación. **c)** Simetría axial. **d)** Simetría central.

2. ¿Qué tipo de transformación se encuentra en la figura del juego mecánico?



Fuente: *https://goo.gl/XxKEz1*

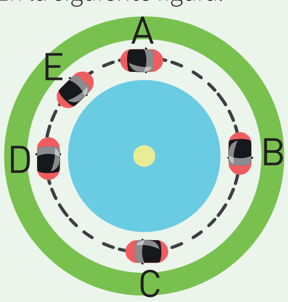
a) Rotación.

b) Traslación.

c) Simetría axial.

d) Simetría central.

3. En la siguiente figura:



Cuando el auto se encuentra en los puntos A y C, es incorrecto decir que hay:

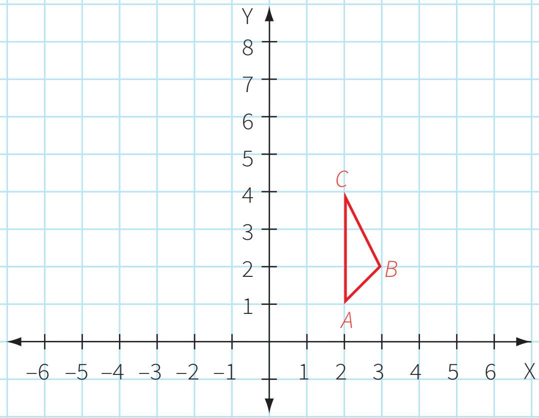
a) Rotación.

b) Simetría central.

c) Homotecia.

d) Traslación.

4. Al triángulo ABC se le aplica homotecia con centro en el origen y la constante k = 2. ¿Cuáles son las coordenadas del triángulo formado luego de que después de la homotecia se le aplica una simetría axial tomando como eje el de las ordenadas?



5. Se podría decir que la homotecia de una figura con $k = -1$ y centro en el origen de coordenadas es similar a:

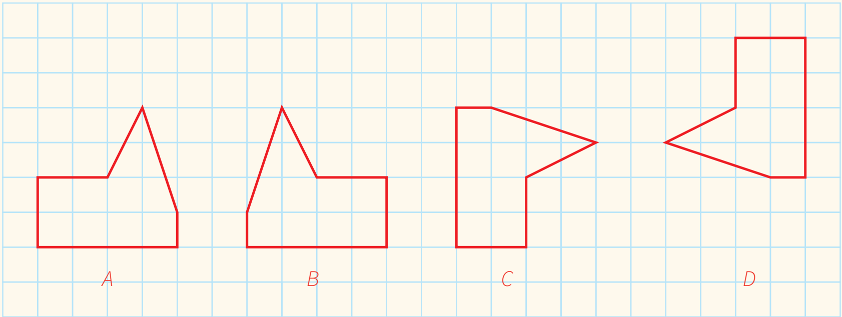
a) una simetría axial con respecto a una recta que pasa por el origen de coordenadas.

b) una simetría central con centro en el origen.

c) una rotación con ángulo de 180° respecto al origen.

d) b y c

6. Observando las figuras A, B, C y D, ¿cuál es el orden de las transformaciones?



a) Simetría central, rotación, simetría axial.

b) Simetría axial, traslación, rotación.

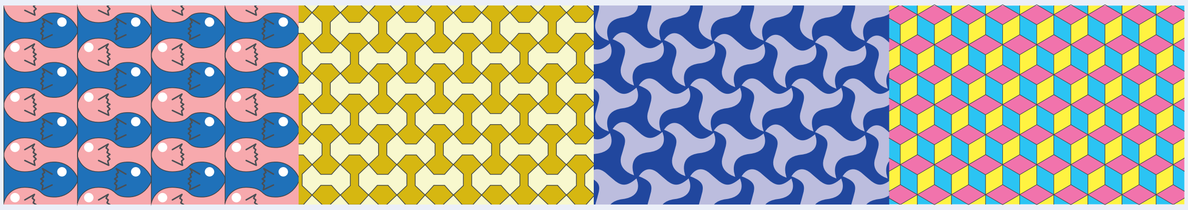
c) Simetría axial, rotación, simetría central.

d) Simetría central, traslación, simetría axial.

7. Dados dos triángulos semejantes, ¿cómo hallarías el centro de la homotecia?

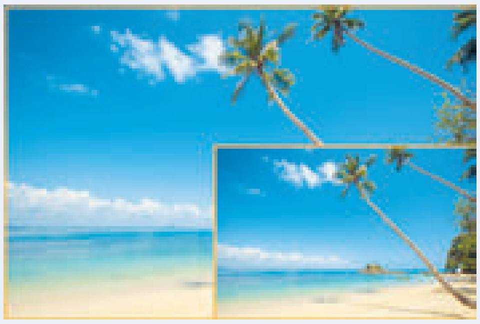
8. ¿En cuál de las siguientes figuras existe simetría central?

I II III IV



a) I **b)** II **c)** III **d)** IV

9. Realizar una ampliación del 80 % en una fotocopiadora es como una homotecia con centro en una de las esquinas de la hoja y de constante igual a...



Fuente: *https://goo.gl/tqf3mv*

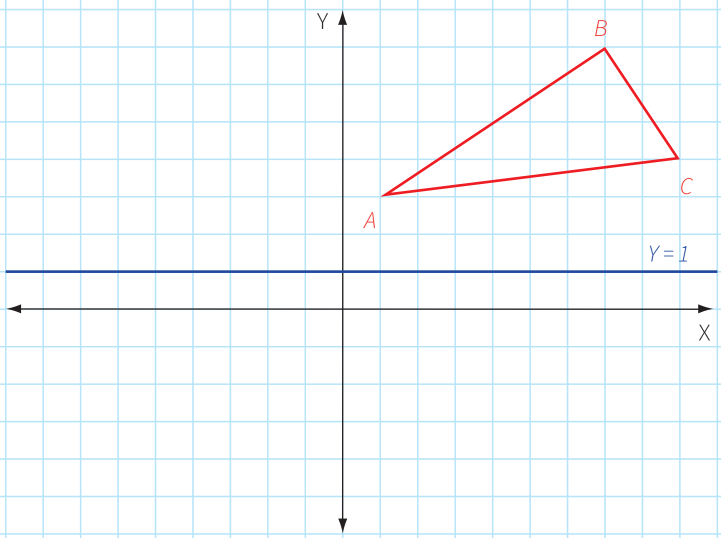
a) 4/5

b) 5/4

c) 9/5

d) 5/9

10. De la siguiente figura, calcula las coordenadas del punto C'' luego de hacer una simetría axial con eje en la recta Y = 1 y después una simetría central con centro en A'.



Ficha 10

Decoramos y construimos envases

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos, construcciones con regla y compás, con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las propiedades de los prismas y cuerpos de revolución.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Selecciona y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud, el perímetro, el área o el volumen de prismas y cuerpos de revolución empleando unidades convencionales o no convencionales.

Aprendemos

Para una fiesta infantil, Susana arma envases de distintas formas para llenar dulces, todos con el mismo largo y el mismo contorno de la base. Uno de los envases debe ser especial, pues debe tener más capacidad para contener dulces.

Envases 1 y 2: El diámetro de la base es 8 cm y la altura, 12 cm.

Envase 3: Tiene dos caras cuadradas de 6 cm de lado y cuatro caras rectangulares de 6 cm × 12 cm.

ENVASE 1

Fuente: *https://goo.gl/SDtZis*

ENVASE 2

Fuente: *https://goo.gl/tTMZFH*

ENVASE 3

Fuente: *https://goo.gl/k2KCxU*

Responde:

1. ¿Qué relación hay entre el volumen de los envases 1 y 2?

2. ¿En cuál de los tres envases puede llenarse más dulces?

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 118 25/11/17 01:26

Comprendemos el problema

1. ¿Cómo son los envases?

2. ¿Qué medida de los envases se debe calcular para hallar su capacidad?

3. ¿Con qué datos se cuenta?

4. ¿Qué pide las preguntas de la situación inicial?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Cuál es el nombre de la forma de los tres envases?

2. Si la base circular del primer y del segundo envase tiene el mismo tamaño y la misma altura, ¿qué relación hay entre sus volúmenes?

3. ¿Cómo se halla el volumen de los sólidos?

a) Razonando lógicamente.

b) Organizando la información en tablas.

c) Usando fórmulas.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Recuerda las fórmulas para hallar el volumen del cilindro, del cono y del prisma. Anótalas.

2. Halla el volumen de cada envase tomando los datos que ofrece el problema ($\pi \approx 3{,}14$).

3. Tomando los resultados, ¿qué relación hay entre el volumen del cono y del cilindro?

4. ¿En cuál de los tres envases se puede llenar más dulces?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cuál de los tres envases tendrá menor capacidad para los dulces?

2. ¿En qué unidades de medida se expresa el volumen?

3. ¿Qué estrategia ayudó en la solución?

4. ¿A qué envases se les llama sólidos de revolución?

5. ¿Qué desarrollo sobre el plano habrá hecho Susana para elaborar el cilindro, el cono y el prisma rectangular?

Analizamos

Situación A

Un fabricante de fluorescentes se olvidó cuánto de gas de argón debe poner dentro de un fluorescente esférico. Solo sabe que tiene 144π cm^2 de superficie de vidrio. ¿Qué debería hacer?

Fuente: *https://goo.gl/Y8jahP*

Resolución

- Para calcular el volumen de gas que debe introducirse en el fluorescente, se debe conocer el radio.
- Como solo se sabe la superficie de vidrio utilizado, entonces primero se debe hallar el radio y luego el volumen de gas de argón.
- Como la superficie esférica es de 144π cm^2, se toma la fórmula de superficie esférica:

$$S_E = 4\pi r^2 = 144\pi$$

$$r^2 = \frac{144\pi}{4\pi}$$

$$r = \sqrt{36}$$

$$r = 6 \text{ cm}$$

- Esto servirá para la fórmula de volumen de la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}(3,14)(6)^3$$

$$V = 904,32 \text{ cm}^3$$

Respuesta: En el interior del fluorescente, debe ponerse gas de argón equivalente a 904,32 cm^3.

1. ¿Qué estrategia se empleó para resolver la situación A?

2. ¿Qué cuerpo geométrico representa la imagen de la situación A?

3. ¿Qué diferencia hay entre superficie esférica y volumen de la esfera?

Situación B

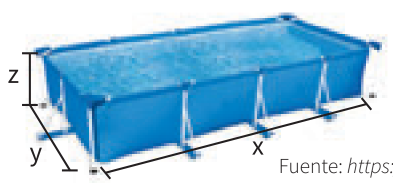
Enrique compró para sus hijos una piscina portátil en forma de prisma. Cuando sus hijos crecieron, decidió comprar una piscina que fuera el doble de los lados de la base y 1,5 veces la altura con respecto a la anterior. Si con la primera piscina Enrique estaba pagando 8 soles por el agua consumida, ¿cuánto pagará por esta nueva piscina?

Fuente: *https://goo.gl/oZ5Fws*

Resolución

- Al ser una piscina muy parecida a la anterior, se sabe que el pago es por el consumo de agua en metros cúbicos.
- Se reconocen los datos:
  - Los lados de la base son el doble que la piscina anterior.
  - La altura es 1,5 veces la altura de la piscina anterior.
  - El consumo anterior del agua era de 8 soles.
- Se resuelve una situación simple:

Piscina anterior

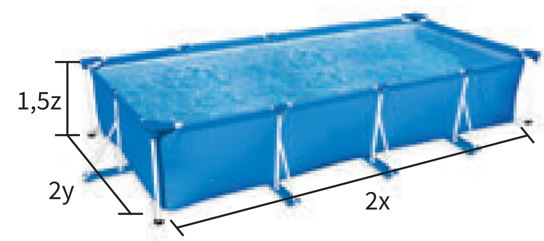


Fuente: *https://goo.gl/py1Xhe*

Volumen anterior

$V_1 = x \cdot y \cdot z$

Piscina nueva



Fuente: *https://goo.gl/py1Xhe*

Volumen ahora

$V_2 = (2x) \cdot (2y) \cdot (1{,}5z)$

$V_2 = 6(x \cdot y \cdot z)$

$V_2 = 6 \cdot (V_1)$

Se observa que el volumen de la nueva piscina se sextuplica; es decir, será 6 veces el volumen de la piscina anterior.

Respuesta: Con las nuevas dimensiones de la piscina, pagará 48 soles de agua.

$8 \times 6 = S/48$

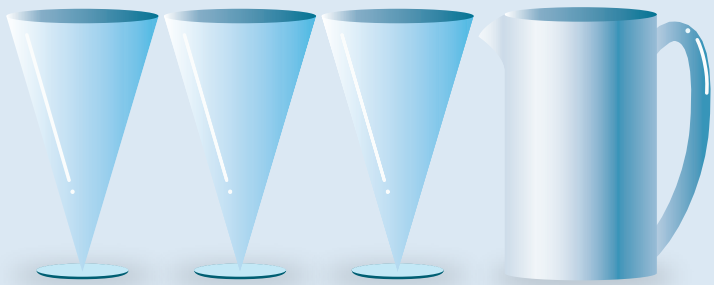
1. ¿Qué estrategia se utilizó para resolver la situación B?

2. ¿Qué forma geométrica tienen las piscinas?

3. ¿Por qué se halló el volumen de la piscina y no se halló el área?

Situación C

En la siguiente imagen se observa una jarra y tres vasos con la misma altura y la misma medida de abertura. Juan se dispone a compartir el contenido de la jarra con dos amigos, pero no sabe si le alcanzará (piensa que sería injusto servirle menos cantidad a uno de ellos). ¿Podrá Juan compartir el contenido de la jarra en tres vasos llenos?



Resolución
(Encuentra el error)

- Se trata de saber si el jugo que se encuentra en la jarra será suficiente para tres vasos y que todos tengan la misma cantidad.
- Se sabe que el vaso y la jarra tienen el mismo tamaño de abertura y altura. La jarra tiene forma de cilindro y los vasos, forma de cono invertido.
- Se desea saber la cantidad de jugo, es decir, el volumen.
- Según las fórmulas de volumen, el cilindro y el cono tienen una relación de 2 a 1.

Respuesta: Se puede decir que la jarra contiene exactamente dos vasos llenos, por lo que Juan no podrá invitar el contenido de la jarra a sus dos amigos.

1. ¿Cuánto es la relación entre el volumen de un cono y de un cilindro de iguales medidas?

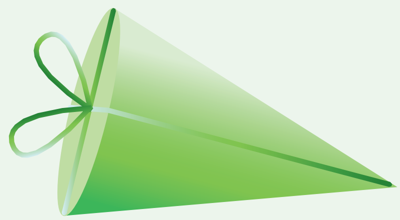
2. Si el procedimiento no es correcto, ¿dónde se cometió el error y cuál es tu respuesta a la situación C?

Practicamos

1. ¿Cuál de los siguientes sólidos geométricos no se puede desarrollar en un plano?

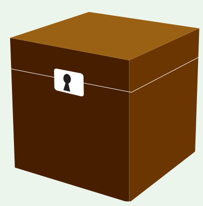
a) Prisma hexagonal **b)** Esfera **c)** Cono **d)** Cilindro

2. Se tiene un envase de dulces de la forma de un cono. Este envase tiene una altura de 60 cm y una base de 30 cm de diámetro. ¿Cuánto es el área mínima de papel de regalo que se utilizó para envolverlo? Considera $\pi \approx 3{,}14$.



a) 6330 cm^2 **b)** 4210 cm^2 **c)** 3620 cm^2 **d)** 2912,97 cm^2

3. Se desea pintar la parte exterior del siguiente cofre, cuyas aristas son iguales a 6 cm. ¿Qué área en centímetros cuadrados (cm^2) tendrá que pintar?

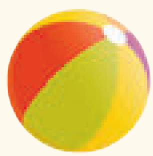


a) 187 cm^2 **b)** 216 cm^2 **c)** 310 cm^2 **d)** 410 cm^2

4. Si con el mismo material de la vela mostrada se quisiera hacer una vela de base cuadrada con la misma altura, ¿en cuánto variaría el perímetro de la base?

Fuente: *https://goo.gl/d7615s*

5. En la figura se observa una pelota de playa de 40 cm de diámetro. ¿Qué área tendrá cada uno de los seis paños, donde cada paño es cada pedazo de material que sirve para armar la pelota? Considera $\pi \approx 3{,}14$.



Fuente: *https://goo.gl/5XeFfy*

a) 818 cm^2 **b)** 828 cm^2 **c)** 837,3 cm^2 **d)** 848 cm^2

6. Se quiere pintar de un solo color todo el exterior de un baúl como el de la imagen. Sabiendo que el ancho y la altura miden 60 cm, y el largo, 1 m; ¿cuánto es la superficie que se debe pintar a excepción de la base?

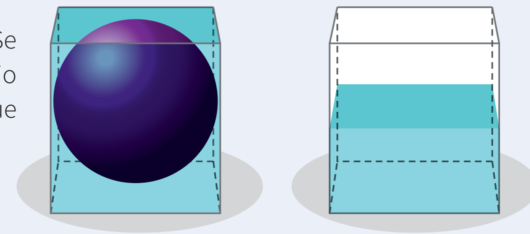
Fuente: *https://goo.gl/uS3q4a*

a) 25 200 cm^2 **b)** 18 392 cm^2 **c)** 21 846 cm^2 **d)** 34 092 cm^2

7. Si las longitudes de la base de una piscina aumentan en un 40 %, ¿en cuánto aumentará la capacidad de la piscina?

8. Un recipiente cúbico de 10 cm de arista está lleno de agua. Se introduce con cuidado una esfera de cristal de 5 cm de radio y luego se saca con cuidado. Calcula el volumen del agua que se ha derramado.

Fuente: *https://goo.gl/KVja1u*



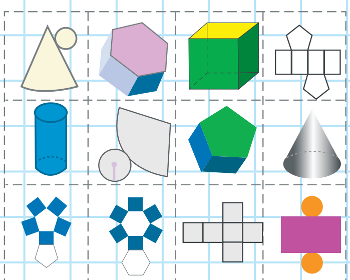
a) 523,59 cm^3 **b)** 559,59 cm^3 **c)** 253,95 cm^3 **d)** 352,59 cm^3

9. Por el intenso calor, una familia optó por instalar aire acondicionado. Su casa es como se muestra en la imagen, de 6 metros de altura y el terreno de 8 metros por 15 metros. ¿Cuánto aire llenará la casa?

Fuente: *https://goo.gl/fkeMQE*

a) 180 m^3 **b)** 360 m^3 **c)** 540 m^3 **d)** 720 m^3

10. Marca las figuras que no tienen par alguno.



Ficha 11

Unidos por un complejo deportivo

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Establece relaciones entre las características, propiedades y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios, así como las relaciones de semejanza y congruencia entre formas geométricas.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee textos o gráficos que describen formas geométricas, sus propiedades, relaciones de semejanza y congruencia, y representa triángulos a partir de reconocer sus lados, ángulos, altura, bisectriz y otros.

Aprendemos

Las asociaciones de padres de familia de tres instituciones educativas de la zona, en coordinación con sus directores y para fomentar la práctica del deporte de sus estudiantes, buscan un lugar donde construir un complejo deportivo que sea equidistante a los tres colegios. Para ello, deciden contratar a un ingeniero que determine la ubicación exacta del complejo y le proporcionan el plano a escala (1:3000) de la zona donde se encuentran las instituciones educativas.

Responde:

1. ¿Cuánto miden las distancias reales entre las instituciones educativas?
2. ¿Dónde estará ubicado el complejo? Señala en el plano.

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 128 25/11/17 01:26

Comprendemos el problema

1. ¿Qué interés tienen las tres instituciones educativas?

2. ¿Qué significa la palabra "equidistante"?

3. ¿Qué datos se tienen para solucionar la situación inicial?

4. ¿Qué figura se forma al trazar las distancias entre las instituciones educativas?

5. Describe la ubicación aproximada donde crees que puede ubicarse el complejo deportivo. Señala en el plano.

6. ¿Qué conocimiento matemático aplicará el ingeniero para ubicar el lugar equidistante a las instituciones educativas?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Cómo se hallan las distancias reales entre las instituciones educativas?

2. En el plano mostrado se observa que al trazar las distancias entre las instituciones educativas se forma un triángulo. ¿Qué líneas notables conoces del triángulo?

3. Se observa que las instituciones educativas están ubicadas en los vértices del triángulo trazado. Entonces, ¿qué línea notable sería adecuado trazar para ubicar el punto equidistante a los vértices del triángulo y cómo se llama este punto?

4. ¿Qué estrategia ayuda a ubicar un punto equidistante a los vértices de un triángulo?

a) Plantear una ecuación.

b) Hacer trazos sobre el diagrama, con regla y transportador.

c) Encontrar un patrón de formación.

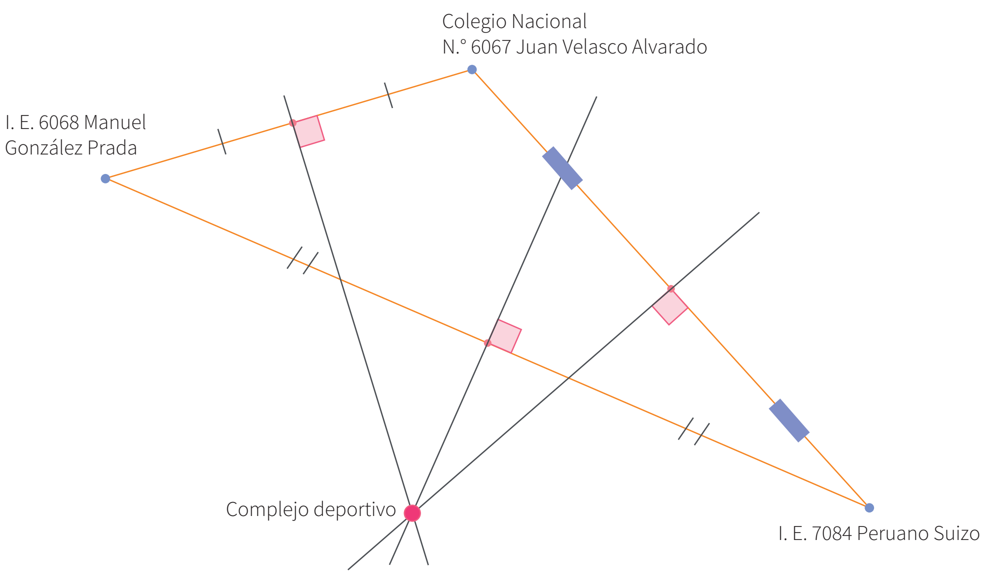
Ejecutamos la estrategia o plan

1. Considerando las medidas de las distancias entre las instituciones educativas en el plano y la información de la escala, que es 1:3000, se hallan las distancias reales:

2. Completa:

- La distancia real entre la I. E. Manuel González Prada y la I. E. Juan Velasco Alvarado es ______ m.
- La distancia real entre la I. E. Juan Velasco Alvarado y la I. E. Peruano Suizo es ______ m.
- La distancia real entre la I. E. Manuel González Prada y la I. E. Peruano Suizo es ______ m.

3. Con ayuda de una regla y un transportador, se traza la mediatriz de cada uno de los lados del triángulo y se indica el circuncentro.



4. Describe la ubicación del complejo deportivo.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cómo se puede comprobar que la ubicación del complejo deportivo responde al interés de las instituciones educativas?

2. ¿Qué estrategias ayudaron a la solución de la situación inicial?

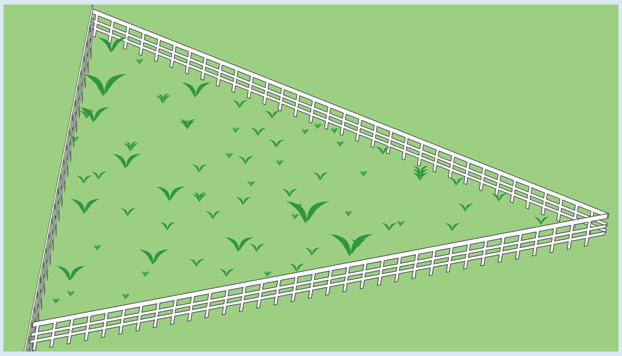
3. ¿Cómo puede usarse este conocimiento matemático en la vida diaria?

4. ¿Qué tipo de triángulo se formó al trazar las distancias entre las instituciones educativas?

Analizamos

Situación A

Don Gerónimo es un agricultor que, junto con su familia, se dedica al cultivo de papa en una parte de su terreno que tiene forma triangular, como se muestra en la imagen.



Ahora quiere cultivar en toda la extensión del terreno otros productos, como zanahoria, yuca, choclo, alcachofa y cebada, además de papa, de manera equitativa.

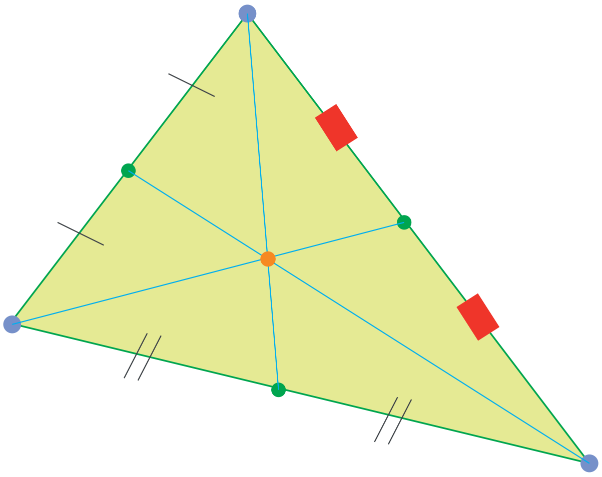
¿Cómo podría hacer don Gerónimo la distribución del terreno para cultivar estos seis productos uniformemente?

Resolución

En un diagrama del terreno y con ayuda de una regla, se trazan las tres medianas:

- Para trazar la mediana, se ubica el punto medio de los lados y se unen con el vértice opuesto.
- El punto de intersección de las medianas se denomina baricentro.

Respuesta:

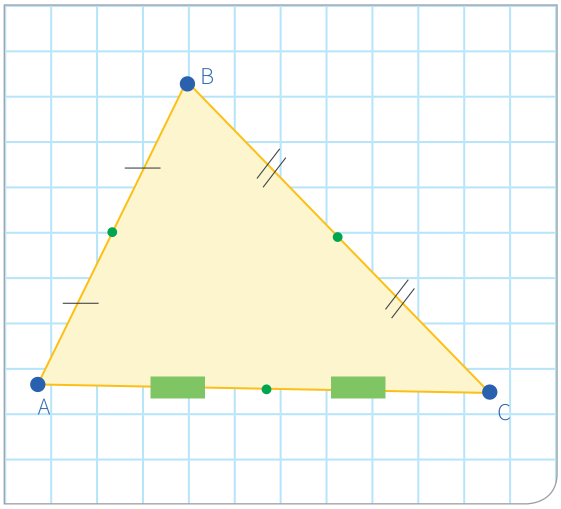


En el diagrama anterior se observa la distribución del terreno.

1. Para la resolución del problema, ¿por qué es útil un diagrama?

2. ¿Qué es el baricentro?

3. Ubica el baricentro del siguiente triángulo:



Situación B

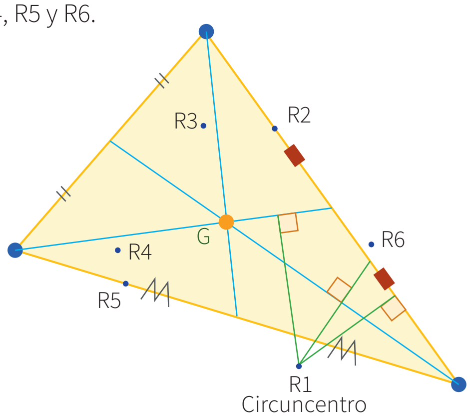
Para regar el terreno, don Gerónimo ha decidido instalar regaderas automáticas y caños en cada cultivo. ¿Dónde deben ser instaladas las regaderas de modo que cubran todos los rincones del terreno?

Fuente: *https://goo.gl/5kaB8H*

Resolución

- Para que las regaderas cubran todos los rincones del terreno, se trazan las **mediatrices** en cada uno de los sectores.
- El **circuncentro** (que es la intersección de las tres mediatrices) indicará la ubicación de cada regadera.
- Para trazar la mediatriz, se ubica el punto medio de los lados y luego se trazan líneas perpendiculares en cada lado que pasen por los puntos medios.

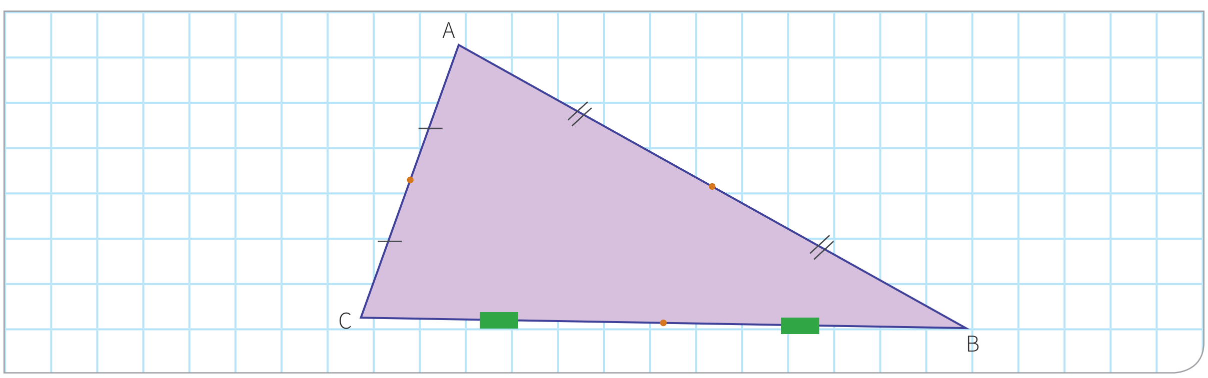
Respuesta: La ubicación de las regaderas será R1, R2, R3, R4, R5 y R6.



1. ¿Por qué el circuncentro de cada triángulo será el punto de ubicación de las regaderas y caños?

2. Traza dos líneas perpendiculares.

3. Ubica el circuncentro del siguiente triángulo:

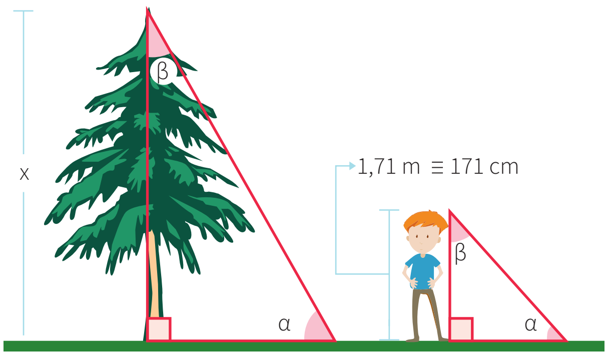


Situación C

En una competencia de cometas sucedió un imprevisto: cuando uno de los hijos de don Juan estaba volando su cometa, esta se enredó en la parte más alta de un árbol. ¿Cómo sacarla?, se preguntaban. Don Juan decidió subir al árbol, pero antes quería saber la altura de este. Si las sombras proyectadas por don Juan y el árbol, en ese instante, eran 60 y 120 cm, respectivamente, sabiendo que don Juan mide 1,71 m, ¿cuál es la altura del árbol?

Resolución
(Encuentra el error)

- Se realiza un diagrama de la situación.



- Se observa que la altura del árbol forma un triángulo con su sombra. De igual manera, la altura de don Juan forma un triángulo con su sombra.
- Estos triángulos son semejantes porque tienen ángulos congruentes y lados homólogos proporcionales. Por ello, se plantea la siguiente proporcionalidad:

$$\frac{\textit{Altura del árbol}}{\textit{Sombra del árbol}} = \frac{\textit{Altura de don Juan}}{\textit{Sombra de don Juan}}$$

$$\frac{x}{60} = \frac{171}{120}$$

$$x = 85{,}5 \text{ cm}$$

Respuesta: La altura del árbol es 85,5 cm ≡ 0,855 m.

1. Según el resultado obtenido, la altura del árbol mide menos que la altura de don Juan. ¿Por qué sucedió esto?

2. ¿Qué cambios harías en la resolución y qué resultado obtendrías?

3. ¿Qué estrategia ayudó en la resolución de la situación C?

Practicamos

1. ¿Cuánto mide la estatua Cristo del Pacífico, situada en el distrito de Chorrillos, en Lima, si proyecta una sombra de 12,58 m, y en ese mismo instante un estudiante de 1,50 m de estatura proyecta una sombra de 51 cm?

Fuente: *https://goo.gl/UVYQfk*

a) 37 m

b) 2,2 m

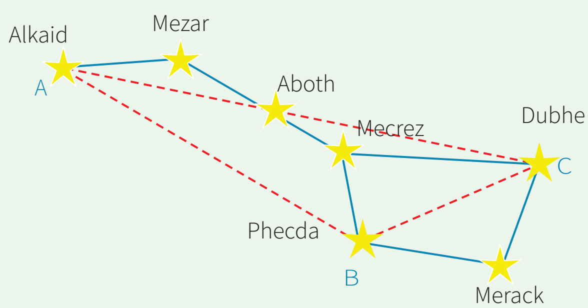
c) 42,7 m

d) 22 m

2. Los alcaldes de tres distritos de la región Cusco planean construir un pozo para abastecer de agua a sus respectivas comunidades. Cada alcalde desea que las conducciones de agua hasta su distrito no sean más largas que las de cualquiera de sus vecinos. Por ello, han decidido que el lugar de perforación se encuentre exactamente a la misma distancia de los tres. ¿Cuál es el punto notable que permitirá cumplir con las condiciones de los alcaldes?

a) Baricentro **b)** Ortocentro **c)** Incentro **d)** Circuncentro

3. En astronomía se dice que la constelación Osa Mayor contiene tres de las estrellas más brillantes: Alkaid, Dubhe y Phecda, las cuales forman el triángulo ABC. Si la m ∠ B = 125° y la m ∠ C = 34°, ¿cuánto mide el ángulo A?



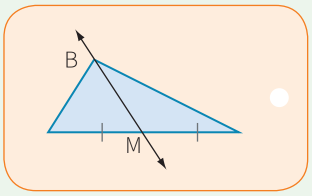
a) 21°

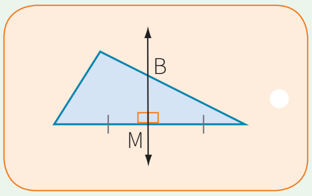
b) 30°

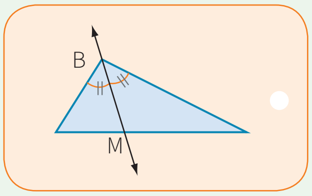
c) 69°

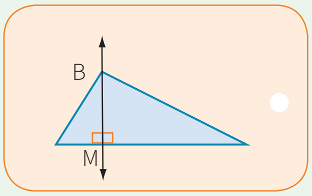
d) 159°

4. La columna de la izquierda presenta diferentes figuras de triángulos en las que aparece la recta BM. Asocia cada figura con el nombre que recibe esa recta.









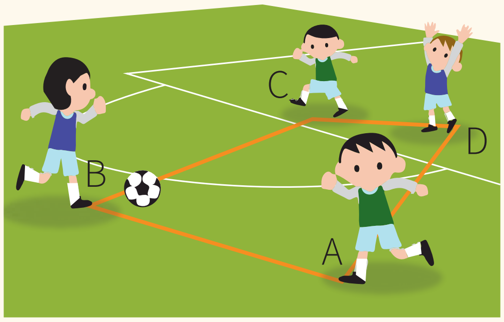
Mediatriz

Altura

Mediana

Bisectriz

5. En uno de los entrenamientos para las olimpiadas de una institución educativa, cuatro estudiantes: Alfredo (A), Benito (B), Carlos (C) y David (D) se ubicaron tal cual se muestra en la imagen. Si las distancias AB, BC y AD son iguales, $m\angle A = 72°$ y $m\angle B = 60°$, calcula la medida del ángulo donde se ubica David.



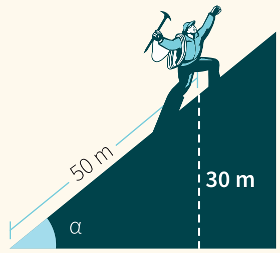
a) 48°

b) 54°

c) 60°

d) 84°

6. Un alpinista escala la montaña Huascarán, que forma un ángulo α con respecto al plano horizontal. Cuando el alpinista asciende 50 m, llega a una altura de 30 m. ¿A qué altura se encuentra el alpinista cuando ha recorrido 75 m?



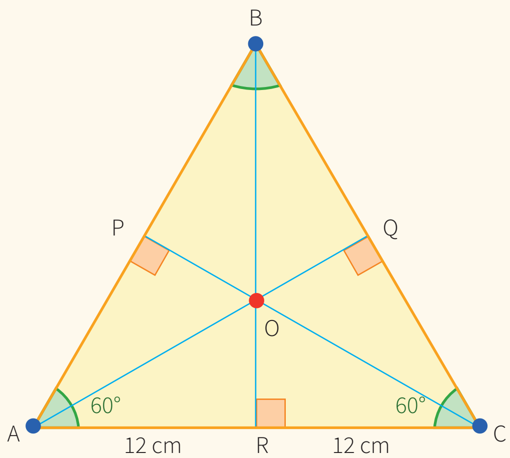
a) 15 m

b) 45 m

c) 60 m

d) 80 m

7. Según la figura, determina si los enunciados son verdaderos o falsos.



I) En el punto O concurren los puntos notables ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro. ( )

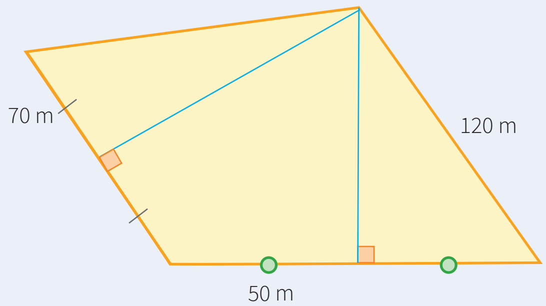
II) El punto O divide a la mediana BR en 8 cm y 4 cm. ( )

III) El triángulo AQB es isósceles. ( )

IV) Los triángulos APO y CQO son semejantes. ( )

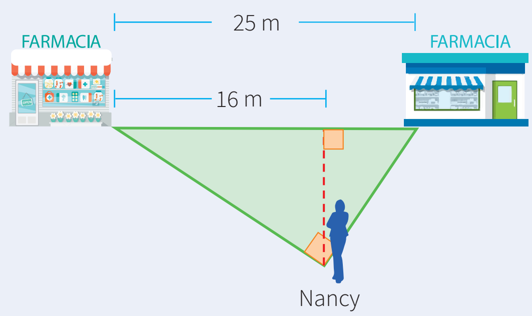
8. La financiera Credimás ha adquirido un terreno para destinarlo a la construcción de un club de esparcimiento que beneficiará a todos sus trabajadores. Se desea cercar el terreno con un muro de 2 m de altura. Si por cada metro cuadrado se requieren 40 ladrillos, ¿cuántos ladrillos se necesitarán para cercar el terreno?

Fuente: *https://goo.gl/mzqmSE*



a) 38 400 ladrillos **b)** 9600 ladrillos **c)** 14 400 ladrillos **d)** 960 ladrillos

9. Dos farmacias se ubican en un mismo lado de la calle. Nancy, que vive al frente, quiere comprar un medicamento en cualquiera de las dos farmacias. ¿A cuántos metros se encuentra la farmacia que está más cerca de Nancy?



a) 9 m

b) 15 m

c) 20 m

d) 12 m

10. Cerca de los pueblos de Yauli y Huando pasa la vía del tren. Después de muchas gestiones, los pobladores de ambas localidades consiguen que se construya un paradero, el cual deciden situar a igual distancia de los dos pueblos. Representa gráficamente la situación y señala la ubicación del paradero.

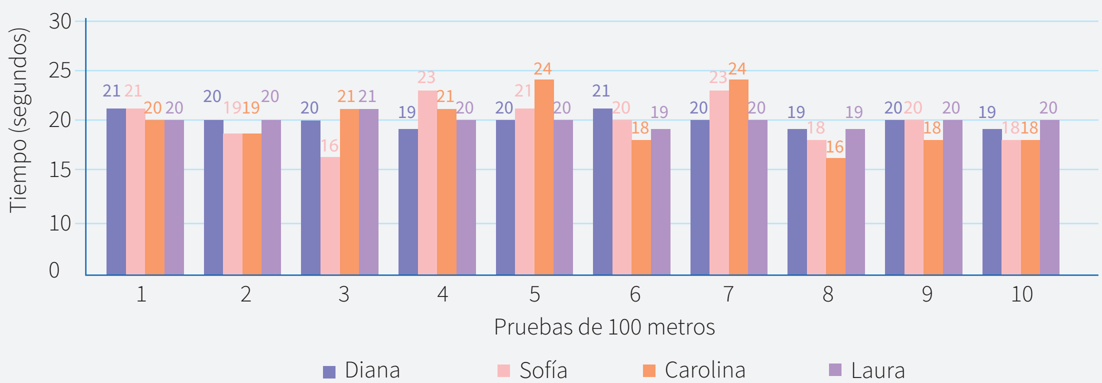
Ficha 12 Elegimos a los mejores atletas

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas.	Representa las características de una población en estudio asociándolas a variables cualitativas o cuantitativas (discretas y continuas) y expresa el comportamiento de los datos de una muestra de la población a través de histogramas, polígonos de frecuencia y medidas de tendencia central o desviación estándar.
	Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos.	Lee tablas y gráficos de barras, histogramas, polígonos de frecuencia o circulares, así como diversos textos que contengan valores de medida de tendencia central, para deducir nuevos datos y predecirlos según la tendencia observada.

Aprendemos

La entrenadora del colegio Todos Unidos debe escoger a dos de sus cuatro mejores atletas para los Juegos Deportivos Escolares Nacionales 2017. Para ello, les pone 10 pruebas de 100 metros planos a cada atleta y pide a su asistente que registre el tiempo para luego tomar una decisión. El registro es el siguiente:

Registro de tiempo en 100 metros planos



Responde:

1. A partir de los datos del gráfico, ¿cómo podría hacer la entrenadora para tomar su decisión?

2. Además de las medidas de tendencia central, ¿qué otras medidas podrías considerar, tomando en cuenta los datos anteriores, para elegir a las dos mejores atletas?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué información proporciona el gráfico de barras?

2. ¿Para qué se ha hecho este registro de tiempos?

3. ¿Qué criterio debe tener en cuenta la entrenadora para hacer la selección?

4. ¿Qué conocimiento matemático puede ayudar a la entrenadora?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia ayudará a la entrenadora para tomar la decisión?
   - **a)** Hallar el promedio de tiempos de cada atleta.
   - **b)** Hacer un diagrama del problema.
   - **c)** Representar los datos en un diagrama lineal.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Recuerda la fórmula para hallar la media o promedio de un conjunto de datos.

2. Organiza los tiempos de cada atleta en una tabla.

Atletas	Tiempo										$\bar{x}$
Diana											
Sofía											
Carolina											
Laura											

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 141 25/11/17 01:26

3. Observando los promedios de cada atleta, ¿a quiénes elegirá la entrenadora?

4. Se hallan la mediana y la moda de los tiempos de cada atleta. De ese modo, la entrenadora contará con más información para poder decidir.

	Promedio	Mediana	Moda
Diana			
Sofía			
Carolina			
Laura			

5. Con esta información, ¿a quiénes elegirá la entrenadora?

6. Como las medidas de tendencia central no son suficientes para tomar una decisión, halla el rango de los tiempos.

	Rango = dato mayor – dato menor
Diana	
Sofía	
Carolina	
Laura	

7. Quienes tengan menor rango son aquellas cuyos tiempos no están muy dispersos. Por esta razón, ¿a quiénes elegirá la entrenadora?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Por qué no es conveniente elegir a quienes tengan mayor rango?

2. ¿Por qué la moda no ayudó a tomar la decisión?

3. ¿Qué estrategias ayudaron a resolver la situación inicial?

4. ¿En qué situaciones de la vida diaria será útil este conocimiento matemático?

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 142 25/11/17 01:26

Analizamos

Situación A

Se ha realizado una encuesta a 600 estudiantes sobre su deporte favorito. Se han dado 5 opciones a los encuestados. El resultado fue que 248 prefieren fútbol; 150, atletismo; 46, baloncesto; 132, natación, y 24, ciclismo. Construye un gráfico estadístico pertinente donde se resalten los porcentajes de la preferencia de los estudiantes.

Resolución

Para presentar los resultados en porcentaje se utilizará un gráfico circular. Para ello, se elabora una tabla con los datos que se necesitan.

Deporte	f_i	h_i	$h_i\%$
Fútbol	248	0,41	41 %
Atletismo	150	0,25	25 %
Baloncesto	46	0,08	8 %
Natación	132	0,22	22 %
Ciclismo	24	0,04	4 %
TOTAL	600	1,00	100 %

Luego se determina qué sector le corresponde a cada deporte.

$$41\,\%\text{ de }360° = \frac{41}{100}(360°) = 147{,}6°$$

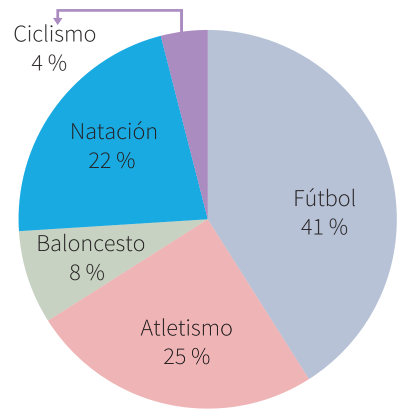
$$25\,\%\text{ de }360° = \frac{25}{100}(360°) = 90°$$

$$8\,\%\text{ de }360° = \frac{8}{100}(360°) = 28{,}8°$$

$$22\,\%\text{ de }360° = \frac{22}{100}(360°) = 79{,}2°$$

$$4\,\%\text{ de }360° = \frac{4}{100}(360°) = 14{,}4°$$

Respuesta: Con ayuda de un transportador se grafican los sectores:



1. ¿Qué tabla estadística se elaboró?

2. ¿Cómo se realiza la distribución de los sectores en un gráfico circular?

3. ¿Cómo se muestra más atractiva la información?, ¿en tabla o en gráfico?

4. Al observar el gráfico circular, ¿qué se concluye?

Situación B

Midiendo las pulsaciones en los estudiantes

Las pulsaciones cardíacas por minuto de un grupo de 40 estudiantes de tercero de secundaria son las siguientes:

56	71	66	79	81	57	72	83	50	54
66	50	73	84	51	88	69	78	82	56
66	54	64	75	71	90	67	83	71	76
87	53	72	61	74	53	68	69	86	52

Responde las siguientes preguntas:

a) Agrupa los resultados en ocho intervalos en una tabla de frecuencias.

b) Halla la media de las pulsaciones.

c) Grafica el histograma de frecuencia absoluta y ubica la moda.

Resolución

a) Se construye la tabla de frecuencias.

Intervalo	x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$
[50;55[	52,50	8	8	420,0
[55;60[	57,50	3	11	172,5
[60;65[	62,50	2	13	125,0
[65;70[	67,50	7	20	472,5
[70;75[	72,50	7	27	507,5
[75;80[	77,50	4	31	310,0
[80;85[	82,50	5	36	412,5
[85;90]	87,50	4	40	350,0
TOTAL		40		2770,0

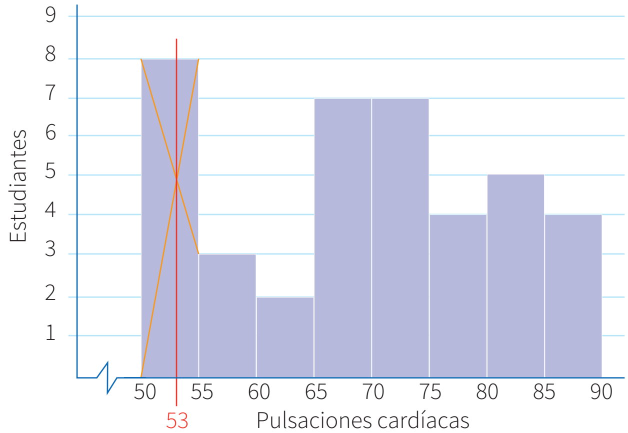
b) Se halla la media de las pulsaciones. De la tabla de frecuencias se toman los datos necesarios.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=n}^{n} x_i \cdot f_i}{n} = \frac{2770}{40}$$

$$\bar{x} = 69{,}25 \text{ pulsaciones}$$

c) Se grafica el histograma y se busca la moda en el gráfico.

Se trazan segmentos en aspa que vayan desde los vértices superiores de la barra hacia los vértices contiguos. Luego se traza una línea paralela al eje "Y" para encontrar el valor aproximado de la moda. Tal como se aprecia en el gráfico, son 53 pulsaciones.



Respuesta: La media es de 69,25 pulsaciones por minuto y la moda es aproximadamente 53.

1. ¿Qué valor representa "x_i" en la tabla de frecuencias?

2. ¿Qué diferencia hay entre los valores de "f_i" y "F_i"?

3. ¿Qué es un histograma?

4. ¿En promedio, cuántas pulsaciones por minuto presenta este grupo de estudiantes?

Situación C

A partir de la información anterior, calcula las medidas de dispersión (varianza y desviación estándar) de las pulsaciones del grupo de estudiantes.

Resolución

(Encuentra el error)

Se calcula la desviación estándar de las pulsaciones del grupo de estudiantes.

a) Primero se calcula la varianza:

$$V = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$$

$$V = \frac{(52{,}5 - 69{,}25)^2 \cdot 8 + (57{,}5 - 69{,}25)^2 \cdot 3 + ... + (87{,}5 - 69{,}25)^2 \cdot 4}{400} = \frac{5327{,}5}{400} = 13{,}318\,75$$

b) Luego se calcula la desviación estándar:

$$\sigma = \sqrt{V}$$

$$\sigma = \sqrt{13{,}318\,75} \approx 3{,}65$$

Respuesta: Se concluye que los datos no están dispersos.

1. ¿Qué información brindan las medidas de dispersión?

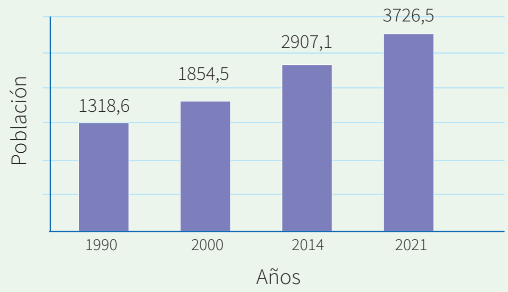
2. ¿Qué valor debe tomar "n" en la varianza?

3. ¿Qué correcciones se deben hacer?

Practicamos

1. La siguiente tabla muestra el estado de la población adulta mayor entre 1990 con proyección al 2021.

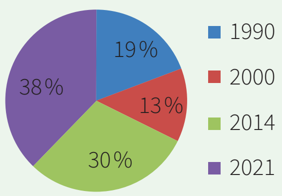
Perú: Población de 60 y más años (en miles)



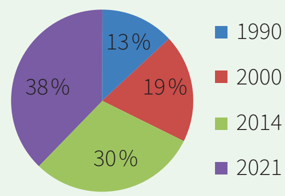
Fuente: Instituto Nacional de Estadística e Informática

¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde al estado de la población adulta mayor?

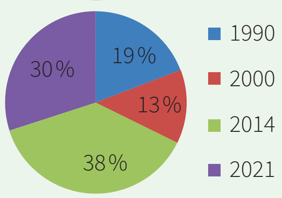
a)



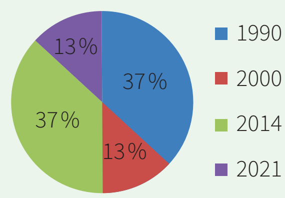
b)



c)



d)



2. El siguiente gráfico muestra la edad de los empleados de una empresa.

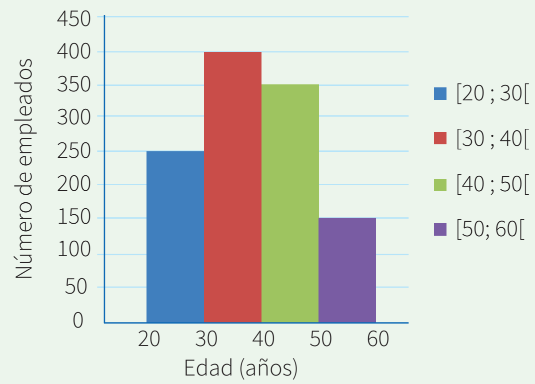
Según el gráfico, ¿cuál es la moda aproximada?

a) 37,5 años

b) 35 años

c) 40 años

d) 30 años



3. El siguiente gráfico circular muestra el color de ojos de 200 personas.

Respecto al gráfico se afirma:

I) Hay 20 personas que tienen ojos de color verde o azul.

II) 112 personas tienen ojos de color negro.

III) 180 personas tienen ojos de color negro o café.

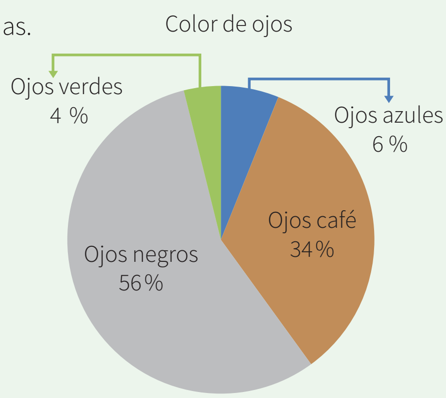
¿Qué afirmaciones son correctas?

a) Solo I

b) I y II

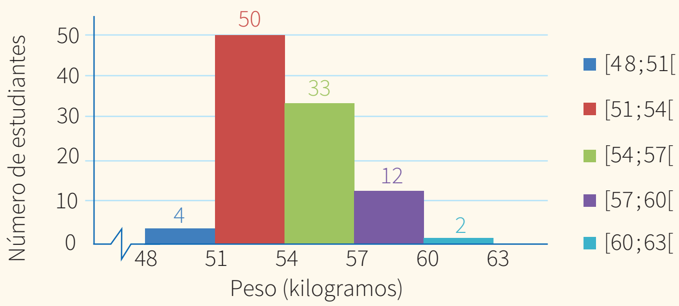
c) I y III

d) I, II y III



4. Se realizó una encuesta sobre la preferencia de comidas típicas de los estudiantes de tercer grado de secundaria. Se tomaron como muestra 80 estudiantes (10 de cada sección) y sus resultados fueron los siguientes: a 22 les gusta el cebiche; a 18, el ají de gallina; a 12, la carapulcra; a 10, el lomo saltado; a 6, el arroz con pato; y a 12, la chanfainita. Organiza la información en porcentajes utilizando un gráfico estadístico pertinente y señala qué porcentaje representa a los estudiantes que gustan del cebiche.

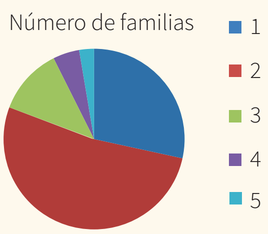
5. En el siguiente histograma, calcula la moda estimada.



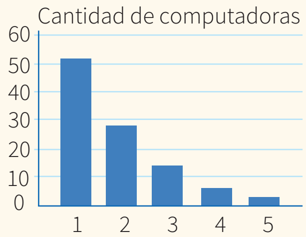
a) 50 kilogramos **b)** 52 kilogramos **c)** 53 kilogramos **d)** 54 kilogramos

6. ¿Cuál de los siguientes gráficos indica exactamente la cantidad de familias que tienen un determinado número de computadoras portátiles?

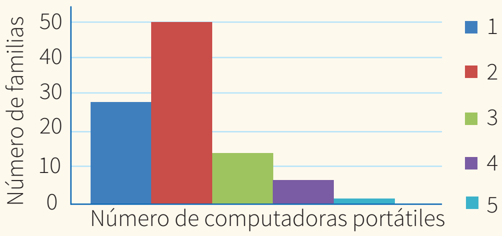
a)



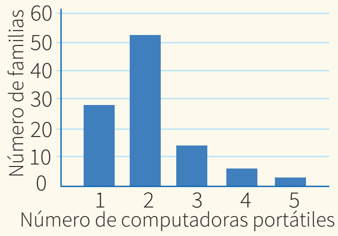
b)



c)



d)



7. Juan presentó y sustentó un trabajo que le dejó su profesor. El trabajo consistía en realizar una encuesta sobre el número de horas por día que dedican los estudiantes de tercer grado de secundaria a las redes sociales. La muestra debió ser, como mínimo, de 30 estudiantes.

Juan presentó los siguientes cuadros:

Horas/diarias (x_i)	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$
1	4	4	4
2	5	9	10
3	5	14	15
4	6	20	24
5	5	25	25
6	4	29	24
10	1	30	10
TOTAL	30		112

Luego de explicar su informe, Juan concluyó que no se puede decir que los estudiantes dedican 3,73 horas diarias a las redes sociales porque el rango salió 9 y está muy lejos de la media; por lo tanto, los datos están dispersos. ¿Estás de acuerdo con la conclusión de Juan? ¿Por qué?

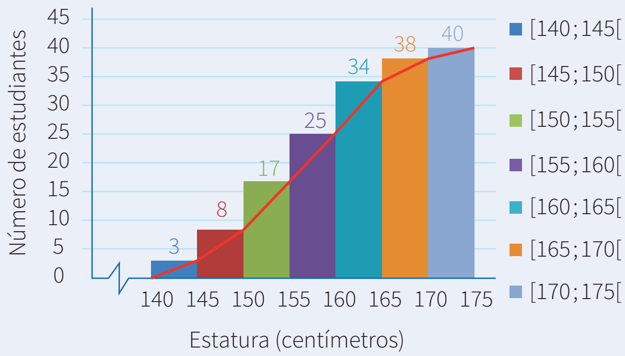
8. El siguiente gráfico registra las estaturas en centímetros de 40 estudiantes de tercero de secundaria. Calcula el valor estimado de la mediana.

a) 160 cm

b) 155 cm

c) 156,88 cm

d) 157,5 cm



Peso ideal de los recién nacidos

En la maternidad de Lima se han tomado los pesos, en kilogramos, de 20 recién nacidos:

2,8	1,8	3,8	2,5	2,7	2,9	3,5	3,8	3,1	2,2
3,0	2,6	1,8	3,3	2,9	3,7	1,9	2,6	3,3	2,3

El peso ideal de un recién nacido en condiciones normales está entre 2,5 y 4 kilogramos.

Con la información dada, responde las preguntas 9 y 10.

9. En una tabla de frecuencias con datos agrupados, calcula la mediana, la media y la moda. ¿Con cuál de las medidas de tendencia central se puede asegurar que la mayoría de los 20 recién nacidos están dentro del rango del peso ideal? Señala también el valor de dicha medida central.

a) La mediana; su valor es 2,86.

b) La media; su valor es 2,84.

c) La moda; su valor es 2,83.

d) El rango; su valor es 2.

10. Averigua si están dispersos o no los pesos de los recién nacidos respecto a su media. Explica por qué.

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 153 25/11/17 01:26

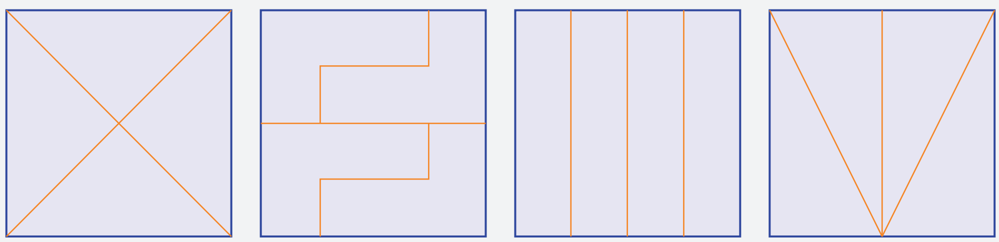
Ficha 13

¿Hay figuras iguales o parecidas?

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones.	Establece relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios y usa modelos basados en semejanza, congruencia de formas geométricas y relaciones de medida entre ángulos.
	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Lee textos o gráficos que describen formas geométricas, sus propiedades y relaciones referidas a la semejanza y congruencia entre triángulos.

Aprendemos

La profesora Ramírez presenta a sus estudiantes cuatro formas distintas de dividir un cuadrado en cuatro partes idénticas.



Luego de darles un tiempo para que observen las figuras, les plantea las siguientes preguntas:

Responde:

1. Cada cuadrado ha sido dividido en partes idénticas. Entonces, ¿estas partes en cada cuadrado son congruentes o semejantes?
2. ¿Qué otras formas se pueden encontrar para dividir los cuadrados en partes congruentes?

Comprendemos el problema

1. ¿De qué trata la situación inicial?

2. ¿Qué palabras nuevas encuentras en la situación inicial?

3. ¿Cómo denominarías los trazos hechos para dividir los cuadrados?

4. ¿Cuáles son los datos que permiten responder las interrogantes planteadas en la situación inicial?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. En cada cuadrado, ¿cómo son las formas de las partes?

2. En cada cuadrado, ¿cómo son los tamaños de las partes?

3. ¿Cómo se establece la diferencia entre "congruente" y "semejante"?

a) Encontrando un patrón.

b) Buscando analogías con otros problemas.

c) Elaborando una tabla comparativa.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Anota en la tabla la característica que corresponde.

Figura congruente	Figura semejante

2. En cada cuadrado, ¿las partes son congruentes o semejantes? ¿Por qué?

3. ¿Qué otras formas se pueden encontrar para dividir cuadrados en partes congruentes?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cómo son las medidas de los perímetros en las partes de cada cuadrado?

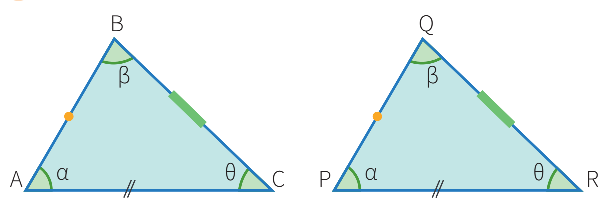
2. ¿Cómo son las medidas de las áreas en las partes de cada cuadrado?

3. ¿Las figuras semejantes tienen perímetros o áreas iguales?

4. ¿Las figuras congruentes tienen perímetros o áreas iguales?

5. ¿Cómo se puede comprobar la congruencia de dos figuras?

6. Observa los triángulos:



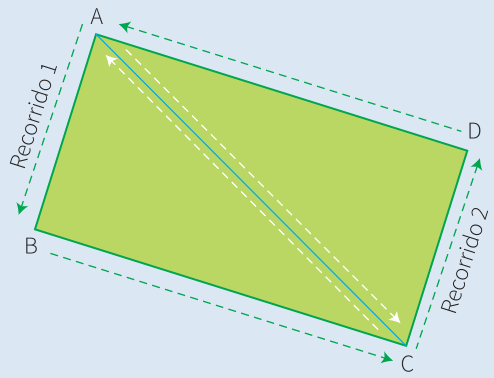
¿Son congruentes o semejantes?

¿Cómo se simboliza la congruencia?

Analizamos

Situación A

La I. E. San Felipe es la organizadora de las primeras olimpiadas interescolares de la comunidad. Una de las pruebas es la carrera de relevos, la cual es realizada en el campo deportivo de fútbol de dicha institución. El recorrido está marcado en el piso. Cada delegación participa con tres estudiantes. Hay dos tipos de recorrido, en los que se enfrentarán dos delegaciones:



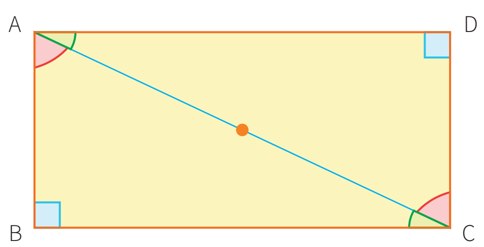
Primer recorrido: Parte del punto A, avanza hacia B, luego C y finaliza en A.

Segundo recorrido: Empieza en C, se dirige hacia D, luego A y regresa a C.

¿Los recorridos realizados por cada delegación de estudiantes tienen la misma distancia?

Resolución

- El campo, que es un rectángulo, se descompone en dos triángulos, que son los recorridos.
- Como el campo deportivo de fútbol es rectangular, los lados opuestos son paralelos.



$$\left.\begin{array}{l} m\angle BAC \cong m\angle DCA \\ m\angle BCA \cong m\angle DAC \end{array}\right\} \text{Por alternos internos}$$

◺ABC y ◺CDA tienen en común el lado AC.

Por el criterio ALA, ◺ABC y ◺CDA son congruentes.

Respuesta: La distancia recorrida por cada delegación de estudiantes es la misma.

1. ¿Qué estrategia se utilizó en la resolución de la situación A?

2. ¿Cómo se lee $m\angle BAC \cong m\angle DCA$?

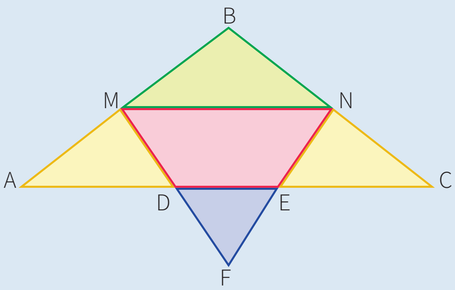
3. ¿Qué puedes detallar del "criterio ALA"?

4. ¿Qué otros criterios de congruencia de triángulos existen?

Situación B

Un estudiante diseña el plano de una cometa con las siguientes características:

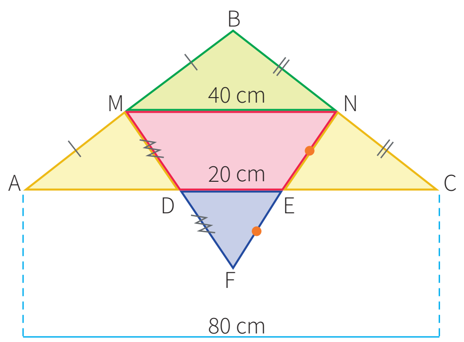
- Los extremos M y N de la varilla están ubicados en el punto medio de AB y BC, respectivamente.
- Los puntos D y E son puntos medios de los lados MF y NF, respectivamente.
- DE = 20 cm



Según las características del diseño realizado por el estudiante, ¿cuál es la medida de la varilla AC?

Resolución

Se elabora un diagrama con las características dadas en la situación.



En el Δ MFN, DE es base media de MN:

$$DE = \frac{MN}{2} \rightarrow MN = 2(20) = 40$$

En el Δ ABC, MN es base media de AC:

$$MN = \frac{AC}{2} \rightarrow AC = 2(40) = 80$$

Respuesta:

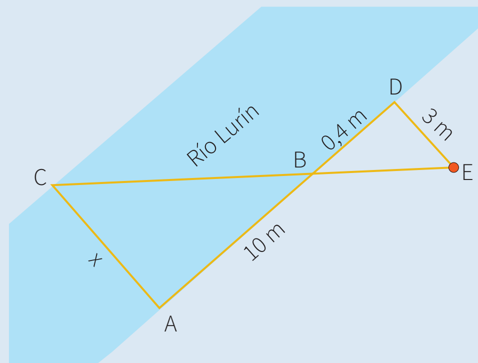
La varilla AC mide 80 cm.

1. ¿Qué estrategia se utilizó en la resolución de la situación B?

2. ¿Por qué los segmentos DE y MN se llaman “base media”?

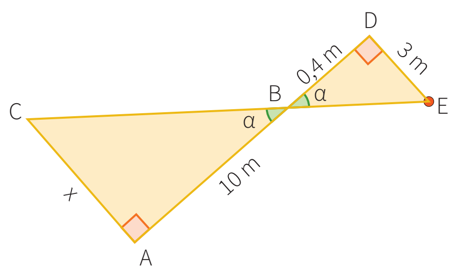
Situación C

Los estudiantes de Ingeniería Ambiental de la Universidad San Luis Gonzaga de Ica están realizando un proyecto para la conservación y preservación del río Lurín. Para dicho estudio necesitan saber las dimensiones del río. Un estudiante registró las medidas (en metros) que se muestran en la figura, donde el segmento AC es perpendicular a AD y el segmento BD es perpendicular a DE. ¿Cuál es el ancho del río?



Resolución
(Encuentra el error)

Se elabora un diagrama de la situación con los datos dados.



Se establece la semejanza de los triángulos.

◺CAB y ◺EDB

- $m\angle A \cong m\angle D = 90°$
- En el punto B se determinan ángulos congruentes (opuestos por el vértice).

  Entonces: ◺CAB ~ ◺EDB , por el criterio del ángulo (AA)
- Por lo tanto, se establece la proporción:

$$\frac{x}{10} = \frac{0,4}{3} \rightarrow x = 1,3$$

Respuesta: El ancho del río Lurín es 1,3 m.

1. ¿Cómo se lee ◺CAB ~ ◺EDB?

2. Los ◺CAB y ◺EDB son semejantes porque tienen igual forma pero diferente tamaño. Además, se observa que el ◺CAB es más grande. ¿Qué opinas sobre la respuesta obtenida, la cual afirma que el segmento AC es menor que el segmento DE?

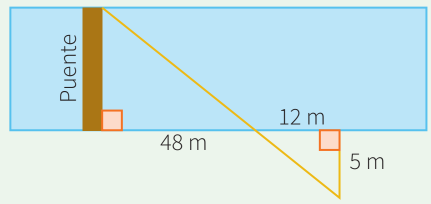
3. ¿Qué cambiarías en la resolución?

4. ¿Cuánto mide el lado “x”?

5. ¿Qué casos de semejanza conoces?

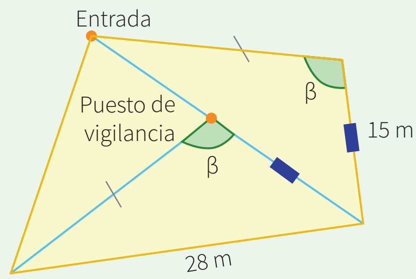
Practicamos

1. El alcalde de una comunidad tiene como proyecto construir un puente sobre un río cercano a su zona que permita el traslado de los habitantes y el comercio con otras comunidades. Según los datos del gráfico, ¿cuál será la longitud del puente?



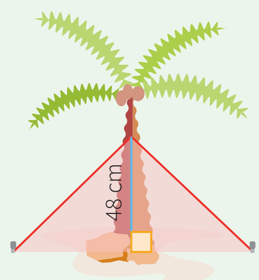
a) 20 m **b)** 12,5 m **c)** 1,25 m **d)** 2 m

2. En el parque Sinchi Roca se ha habilitado una zona de juegos con tres áreas, distribuidas como se muestra en la figura. Para el control y la seguridad de dichas áreas, el parque cuenta con un puesto de vigilancia. Determina la distancia entre la entrada del parque y el puesto de vigilancia.



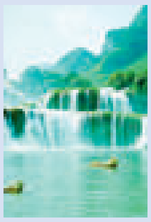
a) 43 m **b)** 12 m **c)** 13 m **d)** 15 m

3. Carlos realiza el cuidado de las palmeras que serán ubicadas en los parques de la ciudad de Lima siguiendo el Plan de Arborización de la ciudad (Plan Verde), organizado por la Municipalidad de Lima. Por los fuertes vientos, se ve en la necesidad de sujetar los árboles con cuerdas, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros de cuerda comprará si tiene que sujetar 8 árboles y cada estaca que emplea para sujetar las cuerdas está a 36 cm del pie de la palmera?

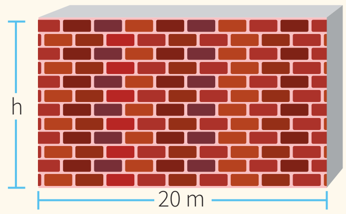


a) 120 cm **b)** 60 cm **c)** 960 cm **d)** 672 cm

4. El Club de Fotografía del Perú (CFP) ofrece cursos y talleres de Fotografía Básica, Fotografía de Viaje, Fotografía de Paisaje, Retrato, Retrato de Familia, Edición de Fotografías, etc. El encargado de impartir el curso de Fotografía Básica indica que el tamaño de una foto de 10,5 cm por 15 cm se llama tamaño postal. ¿Cuáles de las siguientes ampliaciones o reducciones de esta fotografía realizadas por seis participantes no tuvieron distorsión?

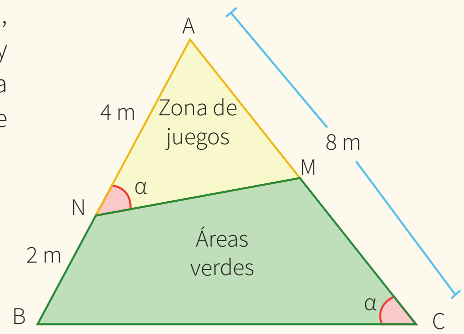
Postal	Ancho × largo (en cm)					
 15 10,5	21 × 30	5,25 × 7,5	21 × 7,5	4,6 × 6	15,75 × 22,5	12 × 8

5. Raúl va a pintar un muro. Él sabe la dimensión de la base, pero no la dimensión de la altura, ya que no cuenta con una escalera por el momento. Para calcular el área que va a pintar, Raúl quiere conocer la altura del muro. A las 11 a. m., el muro proyecta una sombra de 9 m, y en ese mismo instante Raúl proyecta una sombra de 3 m. Si la estatura de Raúl es de 1,60 m, ¿cuál es el área del muro?



a) 96 m^2 **b)** 10,66 m^2 **c)** 337,60 m^2 **d)** 4,8 m^2

6. En un parque de forma triangular, como se muestra en la figura, se coloca un cerco para dividir la zona de juegos para niños y las áreas verdes. ¿Cuántos metros de malla se necesitan para cercar toda la zona de juegos si la distancia de MN es el doble de AM?



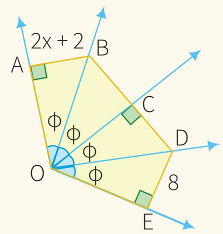
a) 40 m

b) 16 m

c) 13 m

d) 10 m

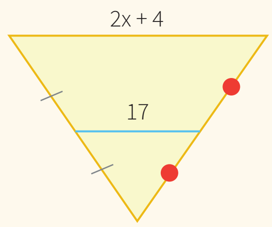
7. La profesora Nancy entrega a sus estudiantes las siguientes tarjetas y les pide que relacionen correctamente cada par. ¿Puedes ayudarlos a realizar las relaciones correctas?



$$\frac{2x + 4}{2} = 17$$

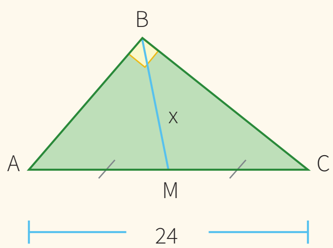
$$x = 15$$

Propiedad de los puntos medios



$$x = 12$$

Propiedad mediana relativa a la hipotenusa



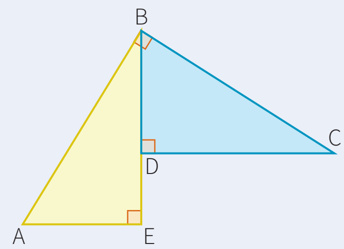
$$2x + 2 = 8$$

$$x = 3$$

Propiedad de la bisectriz

8. Los organizadores del campeonato de Motocross Lima 2016 diseñan un nuevo recorrido en Chilca y presentan la siguiente propuesta: las distancias que deben recorrer los participantes en los tramos AB y BC son iguales, y los tramos DC y DE miden 100 y 60 m, respectivamente.

¿Cuál es la distancia que se recorre en el último tramo si se parte del punto A?



a) 160 m **b)** 40 m **c)** 60 m **d)** 100 m

9. En la sesión sobre la semejanza de triángulos, una de las actividades que propone la profesora Rocío a sus estudiantes es calcular la altura de un árbol que se encuentra en las instalaciones de la I. E. Para ello, solicita a un estudiante de 1,50 m de estatura que se ubique cerca del árbol para comparar las medidas de las sombras que proyectan en ese instante y las alturas respectivas. Los estudiantes anotaron las siguientes medidas: sombra del estudiante, 1,20 m, y sombra del árbol, 3,60 m. Con esta información determina la altura del árbol.

a) 2,88 m **b)** 4,50 m **c)** 6,30 m **d)** 3,30 m

10. La representación gráfica mostrada es el croquis de un pequeño pueblo donde viven tres amigos: Jairo, Salvador y Luciana. Determina en dicho croquis un punto que represente la ubicación de la escuela a la que ellos asisten si se sabe que es equidistante a las casas de cada uno de los amigos.

Ficha 14

El juego de ajedrez

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Comunica su comprensión sobre las relaciones algebraicas.	Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas, y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre la regla de formación de una progresión geométrica.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Selecciona y combina recursos, estrategias heurísticas y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos y la suma de términos de una progresión geométrica.

Aprendemos

Antiguamente los árabes solían entretenerse con problemas como este:

Estando en peligro la vida de un príncipe acudió alguien en su ayuda. El príncipe, agradecido por tan sublime acto, le pidió al salvador que le dijera qué quería como recompensa. Tal salvador pensó un poco y luego hizo un pedido que el príncipe consideró muy simple y poca cosa. ¿Cuál era este pedido? Veamos.

En un tablero de ajedrez pedía que le colocaran un grano de trigo en el primer casillero, el doble de este en el segundo, el doble de lo anterior en el tercero, y así sucesivamente hasta el casillero número 64.

Lo que no sabía el príncipe es que la cantidad total de granos que pedía el salvador era realmente grande, ya que se trataba de miles de millones que podrían significar la cosecha en grandes extensiones de tierras en todo el mundo durante varios años.

De acuerdo con lo que dice la lectura, en cada casillero se colocaría la siguiente cantidad de granos de trigo.

(Adaptación de la leyenda de Sisa, que explica el origen del juego de ajedrez)

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16 384	32 768
65 536	131 072	262 144	524 288	1 048 576	2 097 152	4 194 304	8 388 608

Responde:

1. Esta secuencia de números, ¿es una sucesión? ¿Por qué?

2. ¿Qué características tienen estos números?

3. ¿Por qué no es fácil colocar la cantidad de trigo en el casillero 64?

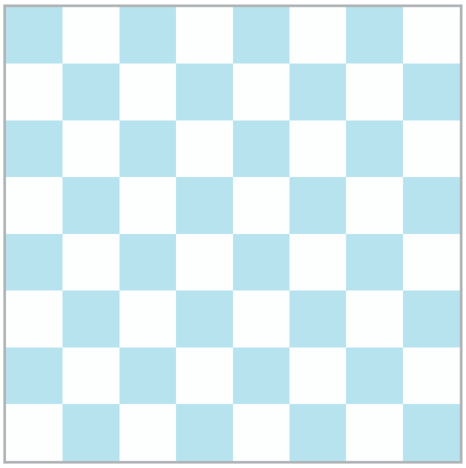
Comprendemos el problema

1. ¿Con qué conocimiento matemático se relaciona esta situación?

2. ¿Qué datos permiten responder las interrogantes de la situación inicial?

3. ¿Cuántos casilleros tiene el tablero de ajedrez?

4. Se sabe que la cantidad de trigo se duplica de un casillero a otro. Entonces, ¿cómo se puede escribir de forma abreviada la cantidad de trigo en cada casillero?



Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia ayudará a responder las interrogantes de la situación inicial?

a) Buscar un patrón de formación. **b)** Modificar el problema. **c)** Razonar hacia atrás.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Anota los números de la primera fila, busca un patrón de formación y responde.

a) ¿Cómo describes el incremento de un término a otro?

b) ¿Cuál es el primer término?

$a_1 =$

c) ¿Cuál es el último término o término n-ésimo del tablero? Anótalo en su forma abreviada.

$a_n =$

2. Esta secuencia de números, ¿es una sucesión? ¿Por qué?

3. ¿Qué características tienen estos números?

4. ¿Por qué no es fácil colocar la cantidad de trigo en el casillero 64?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué te parece la respuesta del salvador al príncipe?

2. En esta secuencia, los términos se multiplican constantemente por 2. Entonces, se afirma que la razón geométrica es 2.
Si la progresión es 4; 12; 36; 108…; ¿cómo se puede hallar la razón geométrica?

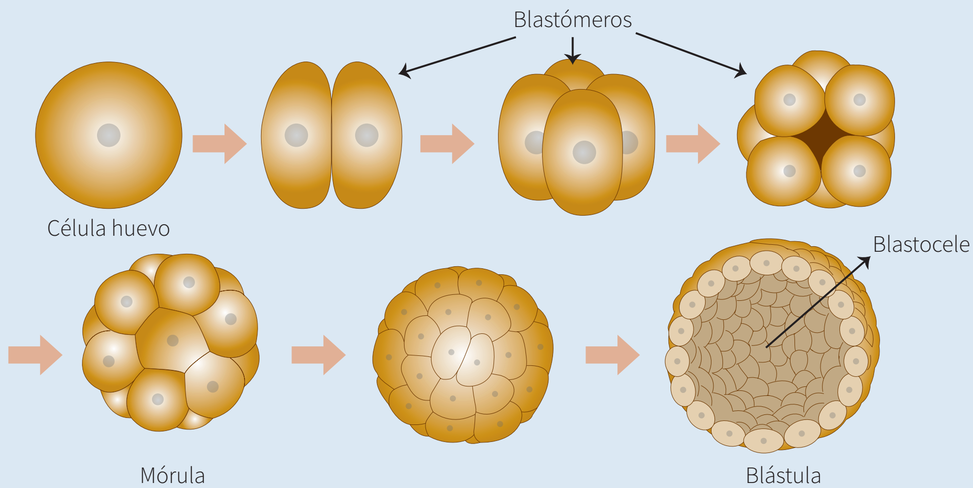
3. Para obtener el primer término no se multiplica la razón; para el segundo término se multiplica una razón; para el tercer término se multiplican dos razones, y así sucesivamente. ¿Cómo se puede hallar el *n*-ésimo término?

4. ¿En qué situaciones es útil este conocimiento matemático?

Analizamos

Situación A

En la fecundación de los seres vivos, al producirse la unión del óvulo y el espermatozoide se forma una célula con 23 pares de cromosomas, los cuales llevan la información genética del padre y la madre. En un corto tiempo esta célula se divide por bipartición en dos, cuatro, ocho, dieciséis, etc., células que llevan la misma información genética. Este nuevo ser recibe nombres como mórula, blástula, gástrula y embrión.



Adaptado de *https://goo.gl/nWYtD6*

Con el número de células se puede formar una progresión geométrica (PG): 1; 2; 4; 8; … ; a_n

Calcula el número de células que contiene la blástula al cabo de la decimosegunda división.

Resolución

- Se sabe que después de la decimosegunda división se encuentra el término a_{13}
- Por fórmula: $a_{13} = (1) \cdot (2)^{13-1}$

  $a_{13} = (2)^{12} \rightarrow a_{13} = 4096$

Respuesta: La blástula, después de la decimosegunda división, tendrá 4096 células con la misma información genética en sus cromosomas.

1. ¿Qué fórmula se aplica?

2. ¿Cómo se puede comprobar el resultado?

3. ¿Cuántas células se tiene en la vigesimoprimera división?

Situación B

Rubén firma un contrato como vendedor de motos. En este documento se contempla pagarle una comisión por la venta de la primera moto y luego le corresponde duplicar la comisión anterior por cada moto que venda. Si vende 9 motos y recibe de comisión total 12 775 soles, ¿cuánto le pagaron de comisión por la cuarta moto que vendió?

a) S/200

b) S/25

c) S/511

d) S/100

Resolución

- Comisión por la primera venta será: x
- Comisión por la segunda venta será: $2 \cdot x$
- Comisión por la tercera venta será: $2 \cdot (2x) = (2)^2x$
- Comisión por la cuarta venta será: $2 \cdot ((2)^2x) = (2)^3x$
- Se tiene la PG: $x ; 2x; (2)^2x ; (2)^3x; \ldots$

Entonces el término general es:

$$a_n = (2)^{(n-1)} \cdot x$$

Para calcular cuánto le pagaron de comisión por la cuarta moto, se necesita hallar cuánto recibió de comisión por la primera moto vendida.

Aplicamos la fórmula de la suma de términos:

$$S_n = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_9 = \frac{a_1\,(2^9 - 1)}{2 - 1}$$

$$12\,775 = \frac{a_1\,(512 - 1)}{1}$$

$$12\,775 = a_1\,(511) \rightarrow a_1 = x = S/25$$

Aplicamos la fórmula: $a_n = (2)^{(n-1)} \cdot x$

$$a_4 = 25 \cdot (2^3) = 200$$

Respuesta: Por la cuarta moto vendida, Rubén recibió una comisión de 200 soles.

1. ¿Qué fórmula se utilizó?

2. ¿Cómo se puede comprobar la respuesta?

Situación C

Un prestamista acuerda con su cliente que por cada día de retraso en el pago se triplicará solo el interés del día anterior. El cliente obtiene un préstamo de S/2400 para pagar en 12 meses cuotas de S/215 (doscientos soles de capital y quince soles de interés). Si el cliente tuvo un problema y se retrasó cuatro días en el pago, ¿cuánto pagará el cuarto mes sabiendo que el interés se acumula al capital?

Resolución

(Encuentra el error)

- El primer día el cliente debe pagar S/200 de capital y S/15 de interés por el préstamo.
- Si se retrasa un día, se triplica solo el interés. Es decir, paga S/200 de capital y S/45 de interés.
- Si se retrasa dos días, se triplica solo el interés del día anterior. Es decir, paga S/200 de capital y S/135 de interés. Y así sucesivamente.
- Se escribe la PG con los intereses para encontrar el patrón numérico:

  15; 45; 135; …

- Se calcula la suma de los 4 primeros términos:

$$S_4 = \frac{(15)\,(3^4 - 1)}{3 - 1}$$

$$S_4 = \frac{(15)\,(81 - 1)}{2}$$

$$S_4 = \frac{(15)\,(40)}{1} \rightarrow S_4 = 600$$

Por lo tanto, el interés es de S/600.

Respuesta: El cuarto mes el cliente pagará S/800 que corresponde al capital más el interés.

1. ¿Desde qué día se considera pago atrasado?, ¿desde el día de pago o después del día de pago?

2. Si deben transcurrir 4 días de retraso en el pago, ¿entonces la progresión de interés tendrá 4 o 5 términos?

3. ¿Qué cambiarías en la resolución de la situación C?

4. ¿Cuál sería la respuesta adecuada para la situación C?

Practicamos

1. Teresa ha comprado un caballo y quiere ponerle herradura. Para ello, tiene que ponerle 20 clavos, el primero de los cuales cuesta 0,50 céntimos y cada uno de los restantes vale un céntimo más que el anterior. ¿Cuánto paga en total para herrarlo?

a) 5,45 soles **b)** 11,90 soles **c)** 12,00 soles **d)** 15,50 soles

2. Si en una progresión geométrica el noveno término es igual a 5 y la razón es $-\frac{1}{3}$, calcula el sexto término de la progresión geométrica (PG).

a) –32 805 **b)** 135 **c)** –135 **d)** 328

3. Maritza vive en el tercer piso de un edificio. Desde una altura de 18 m deja caer una pelota y observa que en cada rebote esta se eleva hasta los 2/3 de la altura desde la que cae. Ella desea saber cuál es el recorrido total de la pelota hasta que se detiene.

a) 15 m **b)** 90 m **c)** 180 m **d)** 10 m

4. Juan vende 120 teléfonos en 4 días. Si cada día vendió 1/3 de lo que vendió el día anterior, entonces ¿cuánto vendió el primer día?

5. A Carmen se le ha extraviado su perro y para encontrarlo envía mensajes de texto a tres amigas pidiéndoles que, a su vez, cada una envíe una copia a otras tres amigas y así sucesivamente. Si todas cumplen con reenviar el mensaje, después de "m" envíos, ¿cuántas copias se habrán hecho del mismo mensaje?

a) 3^m **b)** 3^{m+1} **c)** $\frac{3}{2}(1 - 3^{m-1})$ **d)** $\frac{3}{2}(3^m - 1)$

6. Halla la profundidad de un pozo si por la excavación del primer metro se pagaron 25 soles y por cada uno de los restantes se pagaron 5 soles más que el anterior, lo que dio un costo total de 280 soles.

a) 7 metros **b)** 6 metros **c)** 5 metros **d)** 4 metros

7. El padre de Alejandra necesita comprar para su negocio un congelador que cuesta aproximadamente 3000 soles. Sin embargo, lo que tiene ahorrado no es suficiente y decide ahorrar cada mes 2/3 de lo ahorrado el mes anterior. Si el quinto mes ahorró 160 soles, ¿cuánto ahorró en los cinco meses? Y si no le alcanza, ¿cuánto dinero le falta? Justifica tu respuesta.

8. La población de la ciudad Omega ha aumentado en progresión geométrica de 59 049 habitantes en 1953 a 100 000 habitantes en 1958. ¿Cuál es la razón de crecimiento por año?

a) 0,5 **b)** 10 **c)** 1,11 **d)** 12,96

9. Carlos es un competidor de ajedrez que participó en las olimpiadas de su distrito. Si recibió un punto por el primer participante que venció, 2 por el segundo, 4 por el tercero y así sucesivamente, y cuando se hizo el recuento, acumuló un puntaje de 65 535 puntos, ¿a cuántos competidores venció?

a) 68 **b)** 25 **c)** 16 **d)** 120

10. El profesor Santos se encuentra con sus estudiantes en el laboratorio de Física observando las oscilaciones de un péndulo. Les pide que calculen el recorrido total de las oscilaciones del péndulo hasta el momento en que se detiene. Si en la primera oscilación recorre 16 cm y en la siguiente, 3/4 de lo recorrido en la oscilación anterior, identifica la regla de formación de las oscilaciones, halla el recorrido total del péndulo y justifica tu respuesta.

Ficha 15

Organizamos la campaña navideña

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de cantidad	Traduce cantidades a expresiones numéricas.	Establece relaciones entre datos y acciones de comparar, igualar cantidades o trabajar con tasas de interés simple y las transforma a expresiones numéricas (modelos) que incluyen operaciones de interés simple.
	Usa estrategias y procedimientos de estimación y cálculo.	Selecciona, emplea y combina estrategias de cálculo, estimación y procedimientos diversos para determinar tasas de interés y el valor del impuesto a las transacciones financieras (ITF).

Aprendemos

La señora Juana, para las fiestas navideñas, desea ampliar su negocio de venta de ropa para niños y necesita disponer de S/7000. Por ello, acude a la cooperativa de ahorro y crédito de su localidad, donde solicita un préstamo en los siguientes términos: pago en cuotas mensuales iguales durante 5 meses con una tasa de interés simple de 10 % mensual. La señora Juana se sorprendió cuando realizó el pago de la primera cuota, pues en la cooperativa le cobraron la suma de S/2100,105 y notó un incremento que corresponde al pago por el ITF (impuesto a las transacciones financieras).

Fuente: *https://goo.gl/xTfYjs*

Responde:

1. ¿Cuánto es el interés total que pagará la señora Juana?

2. ¿Qué tanto por ciento con respecto a la primera cuota pagó la señora Juana por el ITF?

3. ¿Cuánto pagará en total la señora Juana al banco al término de los 5 meses, considerando el ITF y los intereses?

Comprendemos el problema

1. ¿Cuáles son las condiciones del préstamo?

2. ¿Qué es el ITF?

3. ¿Qué datos se tienen para responder las interrogantes?

4. ¿Cuánto corresponde pagar mensualmente sin interés?

5. ¿Cuánto paga por concepto de interés simple mensual?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Cómo se puede hallar el valor de la cuota mensual?

2. ¿Qué estrategia ayudará a responder las interrogantes de la situación inicial?

a) Organizar la información para realizar operaciones.

b) Resolver un problema más simple.

c) Utilizar el ensayo y error.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Se organiza la información partiendo de los datos del problema.

Capital:

Tasa de interés mensual:

Tiempo:

2. ¿Cuánto es el valor de la cuota sin ITF?

3. Si pagó S/2100,105 considerando un incremento por el ITF, ¿qué porcentaje con respecto a la cuota pagó la señora Juana por el ITF?

4. ¿Cuánto es el interés total que paga la señora Juana al cabo de los 5 meses?

5. ¿Cuánto pagará la señora Juana en total al banco al término de los 5 meses, considerando el ITF y los intereses?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Por qué se sorprendió la señora Juana cuando pagó la primera cuota?

2. ¿Cuánto se hubiera ahorrado la señora Juana si no pagaba el ITF porque no estaba en el acuerdo?

3. Si un banco te cobra más de lo acordado, ¿dónde puedes presentar tu queja?

4. Si el banco cobra el 10 % de interés mensual, ¿cuánto cobra por interés anual?

5. ¿Cuántos tipos de interés hay?

Analizamos

Situación A

El señor José Flores solicita un préstamo a una caja municipal de ahorro y crédito por la suma de S/1300 para comprar una laptop. Esta entidad financiera le hace dos propuestas:

- **Primera propuesta:** una tasa de interés simple del 6,5 % mensual en 2 años.
- **Segunda propuesta:** una tasa de interés simple del 5 % mensual y un año más que en el caso anterior.

¿Cuál de las dos propuestas le conviene al señor José Flores?

Resolución

Se organiza la información en una tabla y se determina el interés en cada propuesta.

Primera propuesta	Segunda propuesta
C = S/1300 Tasa de interés: 6,5 % mensual ≡ 78 % anual Tiempo: 2 años Entonces: $I = \dfrac{1300 \cdot 78 \cdot 2}{100} = 2028$ soles	C = S/1300 Tasa de interés: 5 % mensual ≡ 60 % anual Tiempo: 3 años Entonces: $I = \dfrac{1300 \cdot 60 \cdot 3}{100} = 2340$ soles

Respuesta: Le conviene la primera propuesta porque solo pagaría S/2028 de interés.

1. ¿Por qué en la primera propuesta se considera una tasa de interés del 78 %?

2. ¿Por qué en la segunda propuesta se considera una tasa de interés del 60 %?

3. Si ambas propuestas tuvieran el mismo periodo de 2 años. ¿Qué propuesta le convendría al señor José Flores?

4. ¿Qué estrategia ayudó a responder la interrogante de la situación A?

Situación B

El profesor Giancarlo Álvarez ha recibido del Ministerio de Educación una bonificación especial de S/5000 por las buenas prácticas docentes realizadas en su institución educativa. Él decide ahorrar esta bonificación. Para ello tiene dos opciones: la primera es depositar el dinero al 1,2 % mensual por un periodo de 2 años, y la segunda opción es depositar el dinero con un interés compuesto del 12 % anual durante 2 años. ¿Cuál de las dos opciones le conviene?

Resolución

Se organiza la información en una tabla comparativa para determinar el interés en cada una de las opciones.

Primera opción	Segunda opción
C = S/5000 Tasa de interés: 1,2 % mensual ≡ 14,4 % anual Tiempo: 2 años Entonces: $I = \dfrac{5000 \cdot 14{,}4 \cdot 2}{100}$ $I = 1440$ soles	C = S/5000 Tasa de interés: 12 % anual Tiempo: 2 años Entonces: $M = C(1 + r)^2$ $M = 5000\left(1 + \dfrac{12}{100}\right)^2$ $M = 6272$ soles Cálculo del interés: $I = 6272 - 5000$ $I = 1272$ soles

Respuesta: Le conviene la primera opción porque le darán por su ahorro S/1440 de interés, mientras que en la segunda opción solo ganará S/1272 de interés.

1. ¿Qué fórmulas se utilizaron?

2. ¿Qué diferencia hay entre el interés simple y el compuesto?

Situación C

El contador de la I. E. Belén realiza los siguientes movimientos bancarios:

Movimientos bancarios	Cantidad (soles)
Retiro de dinero para el pago de servicios prestados	10 200
Depósito de pago de mensualidad	22 700
Retiro para útiles de oficina	580

Sabiendo que el ITF se aplica para retiros y depósitos iguales o mayores a S/1000 (ya que al considerar cantidades menores a S/1000 el monto no es significativo), y que además el porcentaje de ITF es 0,005 %, ¿a cuánto asciende el pago total del ITF por las transacciones realizadas?

Resolución

(Encuentra el error)

Se organiza la información en una tabla para determinar los pagos de ITF en cada transacción.

Movimientos bancarios	Cantidad (soles)	ITF
Retiro de dinero para el pago de servicios prestados	10 200	$10\,200 \cdot \frac{0{,}005}{100} = 0{,}51 \approx 0{,}50$
Depósito de pago de mensualidad	22 700	$22\,700 \cdot \frac{0{,}005}{100} = 1{,}135 \approx 1{,}14$
Retiro para útiles de oficina	580	$580 \cdot \frac{0{,}005}{100} = 0{,}029 \approx 0{,}03$

Respuesta: El pago del ITF asciende a:

0,50 + 1,14 + 0,03 = S/1,67

Finalmente se redondea a S/1,70.

1. ¿A qué cantidades se aplica el ITF?

2. ¿Se aplica ITF a S/580? ¿Por qué?

3. ¿Qué corrección harías en la respuesta y en el proceso de la resolución de la situación planteada?

Practicamos

El auto propio a préstamo

El señor Fernández fue despedido de su trabajo por reducción de personal. Por ello, decide adquirir un auto con el fin de realizar servicios de taxi. El precio del vehículo es de S/48 000, pero solo dispone de S/12 500. Entonces decide financiar el dinero que le falta por medio de una entidad bancaria, la cual le ofrece dos opciones:

- Banco ABCREDIT: por 4 años con una tasa de interés compuesta de 4,8 %
- Caja Municipal de Ahorros y Créditos Perumás: por 5 años con una tasa de interés compuesto de 3,5 %

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿A cuánto asciende el monto final del préstamo en el Banco ABCREDIT?

a) S/148 816 **b)** S/42 316 **c)** S/42 822,64 **d)** S/57 901,04

2. ¿A cuánto asciende el monto final del préstamo en la Caja Municipal de Ahorros y Créditos Perumás?

a) S/183 712,50 **b)** S/42 162,86 **c)** S/41 712,50 **d)** S/57 008,94

El cheque del abuelo

Gian Piero, cuando tenía la edad de 8 años, recibió un cheque de su abuelo por S/500 el día que ganó los juegos deportivos escolares nacionales en la disciplina de natación. Este monto fue depositado por su papá en una cuenta de ahorros.

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Si actualmente Gian Piero tiene 26 años, ¿cuánto habrá acumulado en su cuenta de ahorros si a su papá le ofrecieron por aquellos años una tasa de interés compuesto del 12 % anual?

a) S/10 800 **b)** S/1080 **c)** S/9520,04 **d)** S/3844,98

4. Gian Piero está culminando sus estudios de Ingeniería de Sonido y, de lo acumulado, retira S/2800 para los trámites de titulación. ¿Cuánto paga de ITF en esta transacción? ¿Por qué?

5. Una inmobiliaria encargada de la construcción, venta, alquiler y administración de viviendas tiene como meta ganar un interés simple de S/580 000 en un periodo de dos años y medio. ¿Cuál debe ser el capital inicial a depositar si se sabe que la tasa de interés es del 4 % trimestral?

a) S/1 450 000 **b)** S/232 000 **c)** S/5 800 000 **d)** S/120 833,33

6. La directiva del Club Deportivo Amanecer recibe de cada uno de sus socios un depósito de S/800 para la remodelación y ampliación de las instalaciones, y se compromete a devolver ese dinero al cabo de 1 año y 8 meses, junto con un interés simple del 5 % anual. ¿Qué cantidad devolverá a cada socio?

a) S/866,67 **b)** S/872 **c)** S/1600 **d)** S/840

7. Una entidad financiera elabora un anuncio publicitario para captar más clientes. De acuerdo al afiche mostrado, ¿cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?

- **I)** El monto a pagar al término del tiempo indicado es de S/9000. ( )
- **II)** El tiempo establecido en el anuncio es de 1,5 años. ( )
- **III)** El interés a pagar es de S/2025. ( )

8. El fondo de ahorro es una prestación que establecen las empresas a favor de los empleados durante un determinado tiempo. Si el empleador de una estación de servicio de gas propone a sus empleados otorgarles un fondo de ahorro que paga 12 % de interés simple de tal manera que genere S/2400 por concepto de intereses en 4 años, ¿cuánto deberá invertir cada empleado para tener la cantidad requerida?

a) S/1152 **b)** S/7400 **c)** S/5000 **d)** S/1525,24

9. El papá de Rolando, observando el catálogo de dos tiendas comerciales, decide comprar una cámara digital. Si este modelo de cámara es ofrecido a crédito por dos tiendas, Artifac y Elektro, con tasas de interés simple mensual del 10 % y 15 % en 7 y 4 meses, respectivamente, ¿cuánto pagará de interés el papá de Rolando si escoge la mejor propuesta?

a) S/1399,30

b) S/799,60

c) S/2398,80

d) S/1199,40

10. Relaciona los créditos o préstamos con la tasa de interés correspondiente.

A. CRÉDITOS EN 5 MINUTOS
Por S/4000 pagas S/180 de interés en un mes.
Capital: S/4000
Interés: S/180
Tiempo: 1 mes

B. TE PRESTAMOS AL TOQUE
Pagas S/120 de interés por S/3000 en 2 meses.
Capital: S/3000
Interés: S/120
Tiempo: 2 meses

C. PRÉSTAMO FÁCIL
En 5 meses, por S/2000, pagas S/180 de interés.
Capital: S/2000
Interés: S/180
Tiempo: 5 meses

D. CRÉDITO RÁPIDO
En 12 meses pagas S/125 de interés por S/5000.
Capital: S/5000
Interés: S/125
Tiempo: 12 meses = 1 año

TASA DE INTERÉS I
r = 1,8 % mensual

TASA DE INTERÉS II
r = 2,5 % anual

TASA DE INTERÉS III
r = 24 % anual

TASA DE INTERÉS IV
r = 4,5 % mensual

Ficha 16 Las líneas aéreas y sus condiciones de viaje

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficos.	Establece relaciones entre datos o valores desconocidos y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen inecuaciones $ax \pm b < c$, $ax \pm b > c$, $ax \pm b \geq c$, $ax \pm b \leq c$, $\forall\ a \neq 0$ con coeficientes enteros y racionales.
	Argumenta afirmaciones sobre relaciones de cambio y equivalencia.	Plantea afirmaciones sobre las posibles soluciones de inecuaciones lineales u otras relaciones que descubre.

Aprendemos

Alejandro se dispone a tomar sus vacaciones y, para ello, busca información de empresas aéreas. Averiguó por Internet las ofertas para las fechas elegidas, si le convenían las escalas, etc. Después de evaluar las ofertas propuestas, las empresas finalistas fueron Aerolíneas Tucumán, Aerolíneas Mayorsky y Aerolíneas Flyhour. Finalmente, escogió Aerolíneas Mayorsky.

Al ver las condiciones de vuelo, reconoce que las otras dos aerolíneas no seleccionadas tenían información más explícita:

Aerolínea Tucumán

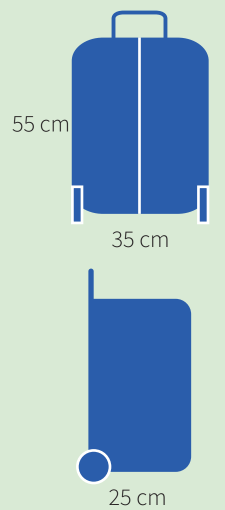
Por su seguridad y confort a bordo, el equipaje de mano debe cumplir con las medidas y peso máximo. De lo contrario, será despachado en la bodega del avión.

Los mostradores de *check-in* ya cuentan con un sistema de medición de limitación volumétrica. Por lo tanto, todo equipaje de mano que exceda el tamaño permitido por dichos medidores deberá ser despachado en la bodega del avión, ya que no podrá ser ubicado ni en los compartimentos superiores de la cabina de pasajeros ni debajo de los asientos.

Peso máximo

- Clase turista: 5 kg
- Clase Club Economy: 10 kg
- Internacionales: 10 kg

Medidas máximas



Aerolíneas Mayorsky

Equipaje de mano:

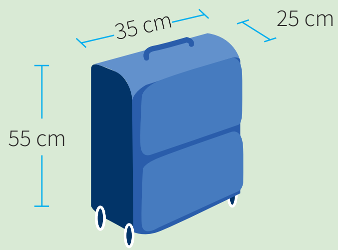
Se permite UNA pieza de equipaje de mano por cliente pagando tarifa completa.

PESO MÁXIMO: 10 kg (22 libras)

DIMENSIÓN MÁXIMA: 114,3 cm (45 pulgadas) (alto + ancho + largo)

Aerolíneas Flyhour

Se puede llevar en cabina un solo equipaje de mano de 8 kg de peso por persona, que no debe superar las siguientes dimensiones (incluidas asas, tiradores y ruedas):



Objetos transportables como equipaje de mano:

Los objetos personales, como carteras, portadocumentos u ordenadores personales, son considerados como equipaje de mano y pueden ser transportados en cabina ajustándose a los límites indicados. Las muletas y los cochecitos de bebé son considerados también equipaje de mano. Se facturan, etiquetan y transportan en bodega solo en caso de falta de espacio a bordo.

Responde:

1. Para hacer uso de la aerolínea seleccionada, Alejandro sentía que le faltaba información sobre el tamaño de equipaje que puede llevar. ¿Cómo puede dar solución a esta situación?
2. ¿Qué sucedería si soy uno de los últimos pasajeros en subir al avión y veo que todos los compartimentos altos están llenos con equipaje de mano de otros? ¿Podría el equipaje en cuestión ser colocado debajo de mi asiento en el avión? (El espacio debajo de los asientos tiene más o menos 21 pulgadas de largo, 16 pulgadas de ancho y 8 pulgadas de alto).

Comprendemos el problema

1. ¿Qué aerolínea escogió Alejandro?
2. ¿Qué información le falta tener de la aerolínea elegida?
3. ¿Qué información le puede servir para tener algunas posibilidades del tamaño del equipaje que puede llevar?
4. ¿Cuál es la equivalencia de pulgadas en centímetros?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿A cuántos centímetros equivale el espacio debajo de los asientos que tiene más o menos 21 pulgadas de largo, 16 pulgadas de ancho y 8 pulgadas de alto?

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 189 25/11/17 01:27

2. Con relación al equipaje en cualquier vuelo de la aerolínea seleccionada, se informa que la dimensión máxima de dicho equipaje debe ser de 114,3 cm o 45 pulgadas, que se obtiene sumando el alto, el ancho y el largo. ¿Qué estrategia se puede realizar para conocer las posibles dimensiones de equipaje permitido?

a) Copiar las medidas de los equipajes de las otras aerolíneas.

b) Descomponer la medida total.

c) Modificar el problema.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Se descompone la medida total, que es 114,3 cm, en 3 valores (alto + ancho + largo).

2. ¿Cuántas posibilidades de medida hay?

3. ¿Cuántos de los equipajes propuestos podrían guardarse debajo del asiento? ¿Por qué?

4. Si se descompone la medida total, que es 114,3 cm, en 3 valores (alto + ancho + largo), teniendo como referencia la medida del espacio debajo de los asientos, ¿cuáles serían los valores de esta descomposición en centímetros?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cómo se hizo para conocer el tamaño del equipaje?

2. ¿Por qué hubo varias posibilidades de medidas del equipaje?

3. ¿Por qué no se podrían copiar las medidas de los equipajes de las otras aerolíneas?

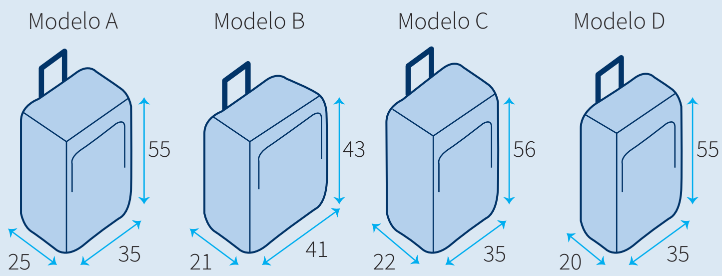
4. ¿Cómo ayudó conocer las medidas del espacio debajo de los asientos?

5. En Aerolíneas Mayorsky, el peso máximo del equipaje de mano en vuelo nacional e internacional es de 10 kg. ¿Cómo sería el modelo matemático de esta condición?

Analizamos

Situación A

Miriam siempre transporta en sus viajes un equipo electrónico y su maleta de mano. Según el lugar de viaje, lleva ropa ligera y de abrigo, que pueden variar en peso y volumen. La fórmula matemática que expresa las características del volumen con que siempre podría viajar es: $(x + 0{,}007)\ m^3 \leq 0{,}050\ m^3$. ¿Cuál de los siguientes modelos de maleta está más cercano a las condiciones de viaje de Miriam, si las dimensiones de las maletas están en centímetros (cm)?



Resolución

- Se despeja la variable "x" en la inecuación dada para tener más claro el valor permitido del volumen de la maleta:

$$(x + 0{,}007)\ m^3 \leq 0{,}050\ m^3$$

$$x + 0{,}007 - 0{,}007 \leq 0{,}050 - 0{,}007$$

$$x \leq 0{,}043\ m^3$$

- Ahora se calcula el volumen de las maletas que se proponen:

Modelo A:

$$V_A = 25 \times 35 \times 55 = 48\,125\ cm^3 \approx 0{,}048\ m^3$$

Modelo B:

$$V_B = 21 \times 41 \times 43 = 37\,023\ cm^3 \approx 0{,}037\ m^3$$

Modelo C:

$$V_C = 22 \times 35 \times 56 = 43\,120\ cm^3 \approx 0{,}043\ m^3$$

Modelo D:

$$V_D = 20 \times 35 \times 55 = 38\,500\ cm^3 \approx 0{,}039\ m^3$$

Respuesta: La maleta que está más cercana a las condiciones de viaje de Miriam es la del modelo C.

1. ¿Cuál sería el conjunto solución en R de la expresión $x \leq 0{,}043\ m^3$? Escríbelo como intervalo y como conjunto, y represéntalo en la recta numérica.

2. ¿Cómo se hizo para encontrar la equivalencia $43\,120\ cm^3 \approx 0{,}043\ m^3$?

Situación B

Señala qué aerolínea y qué tipo de clase permiten un equipaje con las condiciones de los modelos matemáticos planteados, siendo “x” el peso máximo de una maleta:

a) $2x + 10 \text{ kg} \leq 74 \text{ kg}$

b) $2x + 5 \text{ kg} \leq 69 \text{ kg}$

c) $x < 23 \text{ kg}$

d) $10 \text{ kg} + 2x \leq 90 \text{ kg}$

Tipo de equipaje	Clase	Aerolínea 1	Aerolínea 2	Aerolínea 3	Aerolínea 4	Aerolínea 5	Aerolínea 6
Equipaje permitido sin cargo	Ejecutiva	1 bolso de mano de 10 kg y 2 maletas de 32 kg	1 bolso de mano de 10 kg y 2 maletas de 32 kg	2 bolsos de mano de 5 kg y 3 maletas de 32 kg	1 maleta de 23 kg	1 bolso de 5 kg + 1 pieza de 23 kg	1 bolso de 5 kg + 1 pieza de 20 kg
	Económica	1 bolso de mano de 10 kg y 2 maletas de 23 kg	1 bolso de mano de 10 kg y 2 maletas de 23 kg	1 bolso de mano de 5 kg y 2 maletas de 32 kg	1 maleta de 23 kg	1 bolso de 5 kg + 1 pieza de 23 kg	1 bolso de 5 kg + 1 pieza de 20 kg

Resolución

- Se despeja la variable “x” en cada inecuación para tener más claro el peso máximo de la maleta:

a) $2x + 10 \text{ kg} \leq 74 \text{ kg}$

$x \leq 32 \text{ kg}$

En este modelo matemático se tiene:

2 maletas que pesen 32 kg más 1 equipaje de mano de 10 kg.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aerolínea 1, Ejecutiva} \\ \text{Aerolínea 2, Ejecutiva} \end{array} \right.$

b) $2x + 5 \text{ kg} \leq 69 \text{ kg}$

$x \leq 32 \text{ kg}$

En este modelo matemático se tiene:

2 maletas que pesen 32 kg más un equipaje de mano de 5 kg.

$\{$ Aerolínea 3, Económica

c) $x < 23 \text{ kg}$

En este modelo matemático se tiene:

1 maleta que pese 23 kg.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aerolínea 4, Ejecutiva} \\ \text{Aerolínea 4, Económica} \end{array} \right.$

d) $10 \text{ kg} + 2x \leq 90 \text{ kg}$

$x \leq 40 \text{ kg}$

En este modelo matemático se tiene:

1 equipaje de mano de 10 kg más 2 maletas que pesen 40 kg.

Ninguna aerolínea.

1. ¿Qué procedimiento se siguió para responder sobre los modelos matemáticos planteados en la situación B?

2. ¿Qué estrategia se utilizó en la resolución de la situación B?

3. ¿Por qué el modelo (d) no se ajusta a ninguna aerolínea?

Situación C

En cierta aerolínea, el equipaje de los pasajeros no debe sobrepasar los 20 kg de peso. Si un pasajero lleva tres maletas con el mismo peso, ¿cuál debe ser el peso máximo de cada una para no sobrepasar el límite dispuesto por la aerolínea?

Resolución
(Encuentra el error)

- Datos:

  Peso de cada maleta: x

  Peso de las tres maletas: 3x

- Se debe plantear una desigualdad lineal considerando que el peso de las tres maletas no debe superar los 20 kg.

  Por lo tanto, la desigualdad es:

$$3x \leq 20$$

$$x \leq \frac{20}{3} \rightarrow x \leq 6{,}6$$

Respuesta: Cada maleta debe pesar como mínimo 6,6 kg.

1. Si se tiene la expresión $x \leq \frac{20}{3}$, ¿cuál sería el conjunto solución en el conjunto numérico de los reales (R)? Exprésalo como intervalo.

2. ¿Cuál es el valor máximo del conjunto solución?

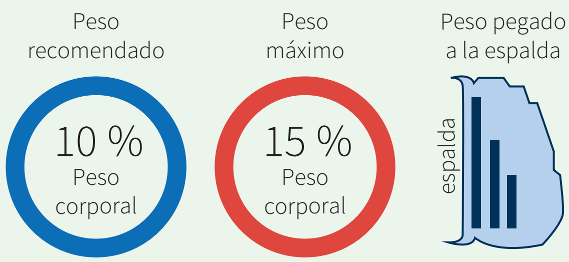
3. ¿Es correcto decir que "cada maleta debe pesar como mínimo $\frac{20}{3}$ kg $= 6\frac{2}{3}$ kg $\approx 6{,}6$ kg"? Entonces, ¿es posible tener pesos mayores?

4. ¿Qué cambiarías en la respuesta?

5. ¿Qué significa "valor máximo"?

Practicamos

1. Diana es una estudiante del segundo grado de secundaria. Diariamente alista su mochila con cuadernos, libros, cartuchera y otros materiales. Según la OMS (Organización Mundial de la Salud), cada estudiante debe llevar en su mochila el 10 % de su peso corporal o, como máximo, el 15 %, a fin de no contraer enfermedades en la columna. Si Diana pesa 48 kg, ¿cuáles son los posibles pesos de su mochila para no afectar su salud?



a) Desde 2,08 kg hasta 7,2 kg

b) Desde 2,08 kg hasta 5,2 kg

c) Desde 4,8 kg hasta 7,2 kg

d) Desde 1,8 kg hasta 2,7 kg

2. Para construir una casa se necesita un determinado número de columnas. A la vez, estas necesitan un número adecuado de estribos. Se sabe que para armar una columna simple se necesitan entre 28 y 32 estribos. ¿Cuál es el máximo número de estribos que se necesitará si se van a armar 18 columnas simples?

a) 505 **b)** 504 **c)** 576 **d)** 575

3. El puntaje de una asignatura es la media aritmética de las calificaciones de tres exámenes. Si un estudiante ha obtenido 13 en el primer examen y 12 en el segundo, ¿cuál es el puntaje mínimo que debe obtener en el tercer examen para aprobar la asignatura? (La asignatura se aprueba con un puntaje mínimo de 14).

a) $x \geq 17$ **b)** $x \leq 16$ **c)** $x \geq 15$ **d)** $x \leq 14$

4. El nivel de alcohol ("N") en la sangre de una persona que ha bebido tres cuartos de litro de cerveza hace 30 minutos, en función de su peso ("x" en kilogramos), se expresa de la siguiente manera: $N = \frac{400}{7x}$.

La ley de tránsito establece fuertes multas para aquellas personas que conduzcan con un nivel superior a 0,5.

A) Indica el peso de las personas que podrían conducir a los 30 minutos de haber bebido tres cuartos de litro de cerveza.

B) ¿Qué opinas de los que conducen una movilidad después de beber alcohol?

5. La familia Ochoa se encuentra construyendo su vivienda. Cada mes logra comprar un material para hacer el techo. Este mes, don Pedro logró ahorrar S/130 y su esposa Luisa, S/90 para comprar los fierros de media pulgada.

Si compran fierros que cuestan S/30, les sobrará dinero.

Si compran fierros que cuestan S/35, les faltará dinero.

¿Cuántos fierros de media pulgada podrá comprar la familia Ochoa con todo lo ahorrado?

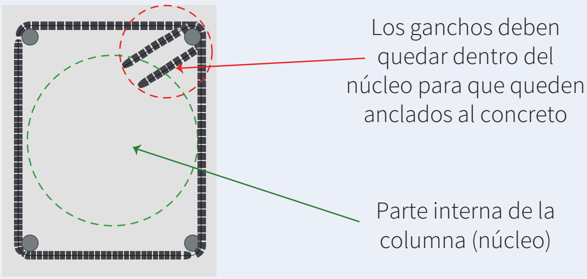
a) 2 fierros **b)** 4 fierros **c)** 7 fierros **d)** 10 fierros

6. Una empresa de alquiler de autos ofrece dos posibles modelos de contrato. El modelo A consiste en pagar una cantidad fija de 50 soles, además de 8 céntimos de sol por cada kilómetro recorrido. El modelo B consiste en pagar 80 soles sin limitación de kilometraje. ¿A partir de cuántos kilómetros interesa el alquiler según el modelo B?

a) 375 km **b)** 376 km **c)** 300 km **d)** 525 km

7. Si el largo de un rectángulo mide el doble de su ancho, justifica: ¿qué medidas puede tomar dicho rectángulo para que su perímetro sea inferior a 36 cm?, ¿cuál es el máximo valor que puede tomar el área del rectángulo?

8. Un estribo está elaborado por determinado metraje de fierro, ya que debe cubrir todo el perímetro de la formación de una columna. Un albañil ha solicitado elaborar los estribos para armar 45 columnas. La información que se maneja es que el largo es el doble del ancho y el perímetro no debe exceder de 68 cm; tampoco puede tener menos de 65 cm. Considerando que el valor del ancho es un número entero, ¿cuál es la medida máxima entera del segmento de varilla que se debe cortar para elaborar un estribo si adicionalmente se necesitan 10 cm para los ganchos?



a) 76 cm **b)** 80 cm **c)** 84 cm **d)** 90 cm

9. Una panadería produce dos tipos de torta: dulce de manjar y torta helada. Para producir dulce de manjar se necesitan 400 g de harina y 100 g de azúcar, mientras que para la torta helada, 300 g de harina y 200 g de azúcar. Si la panadería dispone de 30 kg de harina y 10 kg de azúcar, ¿cuántas tortas de cada tipo se pueden producir usando el total de ingredientes?

a) 60 dulces de manjar y 20 tortas heladas

b) 20 dulces de manjar y 60 tortas heladas

c) 40 dulces de manjar y 20 tortas heladas

d) 20 dulces de manjar y 40 tortas heladas

10. Una empresa requiere repartidores de pizzas y ofrece las siguientes opciones de contrato:

- Se pagará una cantidad mensual fija de 350 soles más 3 soles por cada pizza repartida.
- Sueldo fijo de 600 soles, independiente del número de pizzas repartidas.

Calcula el número mínimo de pizzas que se deben repartir para que convenga escoger la primera opción. Justifica el procedimiento realizado.

Ficha 17 Modelamos un fenómeno climatológico

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio	Traduce datos y condiciones a expresiones algebraicas y gráficos.	Establece relaciones entre datos, valores desconocidos y condiciones de equivalencia y transforma esas relaciones a expresiones algebraicas o gráficas (modelos) que incluyen ecuaciones cuadráticas ($ax^2 = c$) con coeficientes enteros o racionales.
	Usa estrategias y procedimientos para encontrar equivalencias y reglas generales.	Selecciona y combina estrategias heurísticas, métodos gráficos, recursos y procedimientos matemáticos más convenientes para determinar términos desconocidos, simplificar expresiones algebraicas y solucionar ecuaciones cuadráticas usando productos notables o propiedades de las igualdades.

Aprendemos

Israel y Juan comentan el desastre ocurrido en una población, producido por un tornado atípico.

Israel: ¿Cómo es posible que un viento sea capaz de derribar estructuras tan fuertes como las escuelas?

Juan: Parece increíble que el viento tenga tanta fuerza.

A partir de la curiosidad que les produce el fenómeno meteorológico, los muchachos realizan una investigación y encuentran que el tornado es producido por un torbellino de viento violento que gira sobre sí mismo y se extiende desde las nubes hasta la superficie terrestre, lo que puede ser expresado con la siguiente fórmula:

$$P = KAv^2$$

En ella, *P* representa la presión ejercida sobre un objeto, *K* es una constante, *A* es el área del objeto sobre el cual el viento ejerce su fuerza y *v* es la velocidad del viento. Además, encuentran que la constante aplicada para dicha fórmula es:

$$k = \frac{3 \text{ kgf}}{512 \text{ m}^2 \text{ (km/h)}^2}$$

En un objeto de 12 m^2, con un viento a velocidad de 30 km/h, la presión ejercida se calcularía como sigue:

$$P = KAv^2$$

$$P = (0{,}005\ 859\ 375)(12)(30)^2$$

$$P = 0{,}070\ 312\ 5(900)$$

$$P = 63{,}281\ 25 \text{ kgf / m}^2$$

La presión sería aproximadamente de 63 kilogramos fuerza/metro cuadrado. Israel y Juan deciden probar con varias cantidades para conocer el efecto sobre la presión en diferentes objetos y con distintas velocidades.

Completen la tabla que se muestra a continuación. Utilicen la calculadora para efectuar las operaciones.

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 200 25/11/17 01:27

Presión	Constante	Área del objeto	Velocidad del viento
	0,005 859 375	12 m^2	1 km/h
	0,005 859 375	12 m^2	2 km/h
	0,005 859 375	12 m^2	8 km/h
	0,005 859 375	12 m^2	16 km/h
	0,005 859 375	12 m^2	32 km/h
	0,005 859 375	12 m^2	64 km/h
	0,005 859 375	24 m^2	16 km/h
	0,005 859 375	36 m^2	16 km/h
	0,005 859 375	48 m^2	16 km/h

Responde:

- Israel y Juan plantean calcular la presión que ejerció el viento en una de las caras de la escuela derribada por el tornado. Con los datos obtenidos en las noticias que aparecen en el periódico, determinan que la velocidad del viento fue de 240 km/h; además, calculan que la altura del edificio escolar era de 6 m y su longitud era de 40 m aproximadamente. ¿Cuál fue la presión ejercida?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos te permiten dar solución a la situación inicial?

2. ¿Qué es una constante numérica?

3. ¿Qué información se tiene en la tabla?

4. ¿Por qué crees que el tornado pudo derribar la escuela?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué información se tiene para responder la interrogante de la situación inicial?

2. ¿Qué estrategia ayuda a resolver la interrogante?

a) Razonar lógicamente.

b) Organizar la información en tablas.

c) Usar una fórmula.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Anota los datos para responder la interrogante de Israel y Juan.

2. Organiza los datos en la fórmula dada para hallar la presión.

3. Realiza las operaciones necesarias para obtener el valor de la presión.

4. ¿Cuál fue la presión ejercida?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Por qué el área de la cara de la escuela, que fue derribada, se halló multiplicando (6 m) · (40 m)?

2. ¿Cómo se lee la expresión kg/m^2?

3. ¿Es confiable toda la información que brindan los diarios?

Analizamos

Situación A

Las utilidades (U) de una empresa están expresadas en miles de soles y están representadas por la siguiente expresión: $U(x) = -(x - 25)^2 + 12$, donde *x* representa el número de cientos de unidades vendidas. Halla el número de unidades que se deben vender para obtener la máxima utilidad posible. Además, calcula la máxima utilidad.

a) $x = 25$, $U_{máx.}(x) = 12$

b) $x = 12$, $U_{máx.}(x) = 12$

c) $x = 12$, $U_{máx.}(x) = 25$

d) $x = -12$, $U_{máx.}(x) = 12$

Resolución

- Se emplea la ecuación de la utilidad que se brinda:

  $U_{máx.}$: utilidad máxima

  N.° de unidades : x

  $U_{máx.}(x) = -(x - 25)^2 + 12$

- Se observa que la utilidad máxima se genera cuando se elimina el factor negativo. Entonces se iguala a cero el factor negativo:

$$-(x-25)^2 = 0$$
$$-(x^2 - 50x + 625) = 0$$
$$-x^2 + 50x - 625 = 0$$
$$x^2 - 50x + 625 = 0$$

Por factorización:

$$(x - 25)(x - 25) = 0$$
$$(x - 25) = 0$$
$$x = 25$$

- Asimismo, se recuerda que "x" está expresado en cientos de unidades, por lo que el número de unidades que se debe producir y vender es 2500.

- Ahora se reemplaza el valor de x = 25 para hallar la utilidad máxima.

  $U_{máx.}(x) = -(25 - 25)^2 + 12$

  $U_{máx.}(x) = 12$

- Como se sabe, la utilidad máxima está expresada en miles. Entonces, la utilidad máxima será de 12 000 soles.

Respuesta: La máxima utilidad es de 12 000 soles y se genera cuando se venden 2500 unidades del producto.

1. ¿Qué significa "utilidad máxima"?

2. ¿Qué tipo de ecuación tenemos?

3. ¿Con qué método se ha solucionado la ecuación cuadrática?

4. ¿Cómo se puede comprobar la respuesta obtenida?

Situación B

Una fábrica que se dedica a la producción de ciertos artículos de decoración tiene un costo fijo mensual de S/400 y un costo variable por unidad producida de S/20. Además, se sabe que su ingreso está dado por la siguiente expresión: $I(x) = -2x^2 + 180x$, donde *x* representa el número de artículos que produce y vende la empresa mensualmente. Halla la utilidad que obtendrá la empresa si produce y vende 20 artículos.

a) $U(x) = -2000$

b) $U(x) = 2800$

c) $U(x) = 4400$

d) $U(x) = 2000$

Resolución

- Se extraen los datos:
  - Costos: S/400 más S/20 por cada unidad producida
  - Ecuación del ingreso:

$$I(x) = -2x^2 + 180x$$

  - N.° de artículos producidos y vendidos: 20
- Sea "x" el número de artículos producidos, entonces la ecuación del costo será:

$$C(x) = 400 + 20x$$

- La utilidad estará dada por la diferencia entre el ingreso y el costo. Así:

Utilidad: $U(x)$

$U(x) = I(x) - C(x)$

$U(x) = -2x^2 + 180x - (400 + 20x)$

$U(x) = -2x^2 + 180x - 400 - 20x$

$U(x) = -2x^2 + 160x - 400$

- Se sabe que se producen y se venden 20 artículos. Entonces se reemplaza: $x = 20$

$U(20) = -2\,(20)^2 + 160\,(20) - 400$

$U(20) = -800 + 3200 - 400$

$U(20) = 2000$

Respuesta: La utilidad que obtiene la empresa, si produce y vende 20 artículos, es de S/2000.

1. ¿Por qué fue necesario extraer los datos del problema?

2. ¿Por qué se obtiene la utilidad restando los ingresos con el costo?

3. ¿Cuánto se obtuvo de ingreso al vender los 20 artículos?

Situación C

El dueño de la panadería El Baguetito recibe la noticia del último aumento de la harina de trigo y desea conocer cómo afectará este acontecimiento a la venta del pan. Luego de un estudio, encontró lo siguiente: cuando el precio de cada pan era de S/0,25, se vendían en total 15 000 panes al día; por cada S/0,01 de aumento, se dejaban de vender 20 panes diariamente.

a) Con la información anterior, completa la siguiente tabla:

Precio por pan X	Número de panes vendidos diariamente Y
0,25	15 000
0,25 + 1(0,01)	15 000 – (1) (20)
0,25 + 2(0,01)	
0,25 + 3(0,01)	
0,25 + 4(0,01)	
0,25 + m(0,01)	

b) Considerando x = 0,25 + m(0,01), expresa "m" en términos de "x".

Resolución
(Encuentra el error)

a) Se induce el patrón de formación para el número de panes vendidos diariamente y luego se generaliza "m" para panes:

Precio por pan X	Número de panes vendidos diariamente Y
0,25	15 000
0,25 + 1(0,01)	15 000 – (1) (20)
0,25 + 2(0,01)	15 000 – (2) (20)
0,25 + 3(0,01)	15 000 – (3) (20)
0,25 + 4(0,01)	15 000 – (4) (20)
0,25 + m(0,01)	15 000 – (m) (20)

b) Se despeja "m" de la expresión dada:

$$x = 0{,}25 + m(0{,}01)$$
$$-m(0{,}01) = x - 0{,}25$$
$$m = \frac{x - 0{,}25}{(-0{,}01)}$$

Estratégicamente se multiplica el numerador y el denominador por –100. Entonces:

$$m = \frac{(-100)(x - 0{,}25)}{(-100)(-0{,}01)}$$

$$m = -100(x-0{,}25)$$

Respuesta: Por lo tanto, "m" en términos de "x", será $m = -100(x - 0{,}25)$

1. ¿Qué es un "patrón de formación"?

2. ¿Por qué el número de panes vendidos se multiplica por 20?

3. Despeja "m" de otra manera:

4. ¿Qué error se cometió al despejar "m"?

Practicamos

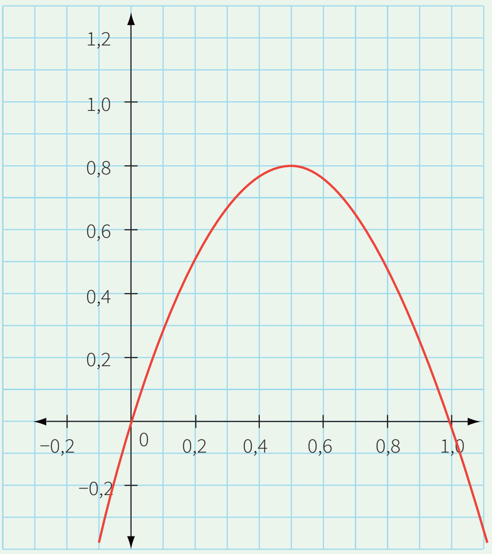
1. Carlos sabe que el marco del lienzo es cuadrado y que el área del lienzo es de 256 cm². ¿Cuáles son las dimensiones del lienzo?

a) l = 24 cm **b)** l = 12 cm **c)** l = 14 cm **d)** l = 16 cm

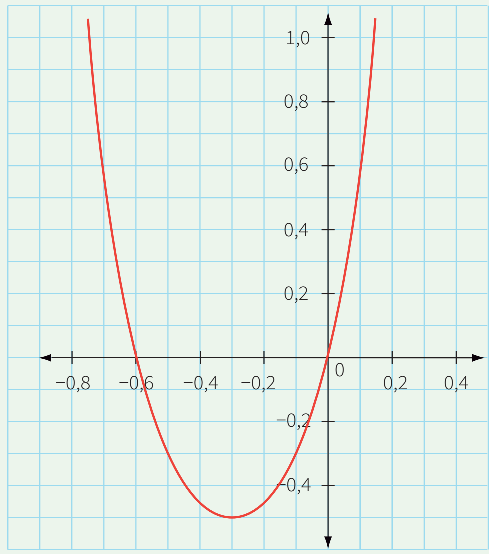
2. La gráfica que representa mejor la función “f”, que describe la trayectoria de un balón de básquet, es:

$$f(x) = -\frac{16}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{5}$$

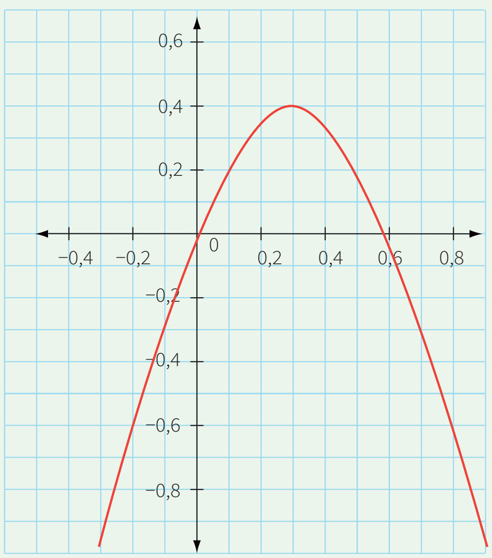
a)



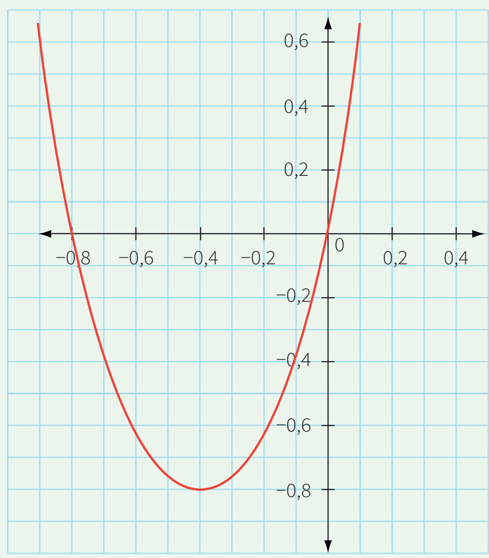
b)



c)



d)



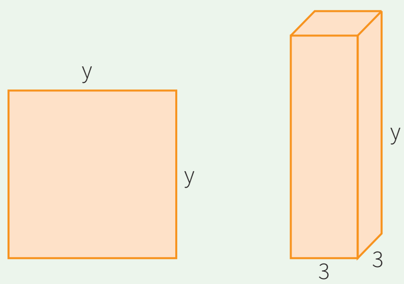
3. Marcelo y Patricio son dueños de una empresa dedicada al alquiler de automóviles. La utilidad en soles que tienen por alquilar un automóvil durante un tiempo t (en horas) está dada por: $U(t) = -2t^2 + 50t$.

Si ellos alquilan un automóvil durante 8 horas, ¿cuánto obtendrán de ganancia?

a) U(t) = 128 soles **b)** U(t) = 300 soles **c)** U(t) = 288 soles **d)** U(t) = 272 soles

4. Para fabricar una caja en forma de prisma rectangular, se utiliza una pieza cuadrada de cartón, cuyo lado mide "y" *dm*. La pieza de cartón se dobla, de manera que se forman cuatro rectángulos, cada uno de los cuales tiene un área de 3y *dm*². Halla el valor de y.

¿Cuál es la ecuación que representa el área total del cartón usado?



Rectángulo:
área de 3y dm²

5. Calcula la edad de Andrea si se sabe que el cuadrado de su edad menos las tres cuartas partes del cuadrado de lo que va a tener el próximo año es igual a la edad que tenía el año pasado más 43 años.

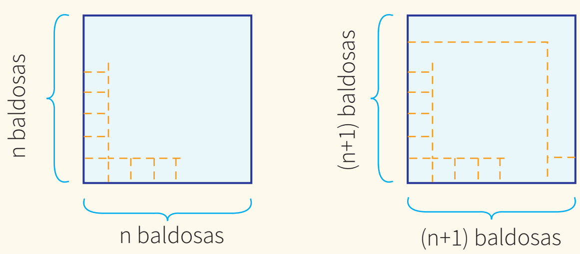
a) –9 años **b)** 9 años **c)** 18 años **d)** 19 años

6. Con 29 losetas adicionales, el piso de mi habitación, que es cuadrado, tendría exactamente una baldosa más por lado (ver figura).

¿Cuántas losetas tiene el piso de mi habitación?

Si la longitud del lado de cada loseta es 25 cm, ¿cuál es el área del piso de mi habitación?

Piso de mi habitación



a) N.° de losetas: 196 ; A = 122 500 cm^2

b) N.° de losetas: 14 ; A = 122 500 cm^2

c) N.° de losetas: 28 ; A = 392 cm^2

d) N.° de losetas: 144 ; A = 12,25 m^2

7. Don José recibe la siguiente información de su "Servicentro" acerca del rendimiento de la gasolina de un auto: el número *T* de kilómetros que puede viajar un automóvil con un galón de gasolina depende de la velocidad *x* en kilómetros por hora, donde ambas magnitudes se relacionan mediante la siguiente expresión matemática:

$$T(x) = -x^2 + 50x - 400, \text{ para } 10 \leq x \leq 40$$

¿Cuál es la velocidad que proporciona el número máximo de kilómetros por galón? ¿Y cuál es el máximo número de kilómetros por galón que puede rendir la gasolina para este auto?

8. Durante varios días se observó el comportamiento del precio de 1 kg de pollo y el número de kg que se vendían de esta ave. Se llegó a las siguientes conclusiones:

Cuando el precio de 1 kg de pollo era S/6, se vendían 75 000 kg de esta ave. Por cada S/0,20 que este precio se incrementaba, se vendían 800 kg menos.

Halla una expresión matemática que relacione las variables "p" y "n", donde "p" es el precio de 1 kg de pollo y "n" es el número de kg de pollos vendidos.

a) $n = 7500 - 4000\ (p - 6)$

b) $n = 75000 - 800\ (p - 6)$

c) $n = 75000 - 4000\ (p - 5)$

d) $n = 75000 - 4000\ (p - 6)$

9. Una persona se ubica en la parte más alta de una plataforma de salto. Al lanzarse desde 40 m de altura, la trayectoria que sigue la persona está descrita por la función $f(x) = -\frac{2}{5}(x - 5)^2 + 40$. ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por la persona?

a) 2/5 **b)** 20 **c)** 15 **d)** 10

10. Un inversionista desea iniciarse en la venta de sombreros finos. Para ello, decide averiguar cuál es la ganancia que obtienen dos fábricas distintas: A y B. De esta manera podrá decidir en cuál invertir.

- La fábrica A produce "x" sombreros al día. El costo de producción diaria viene dado en soles por la siguiente expresión: $x^2 - 10x + 360$, y el precio de venta al público es de S/80 por cada sombrero.
- La fábrica B produce "40 – x" sombreros al día. El costo de producción es de S/60 por cada sombrero y el precio de venta al público es de S/3x por cada uno.

A partir de la información proporcionada, y suponiendo que todo lo que se produce se vende, responde las siguientes interrogantes:

a) ¿Cuántos sombreros se deben producir al día en cada fábrica para obtener la máxima ganancia posible?

b) ¿Cuál sería la fábrica que elegiría el inversionista?

Ficha 18 Ahorramos en comunicaciones

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las propiedades de un triángulo de 30°, 60° y 45°, el teorema de Pitágoras y ángulos de elevación y depresión para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Selecciona y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar la longitud entre dos puntos y para establecer relaciones métricas entre lados de un triángulo, empleando unidades convencionales (centímetro, metro y kilómetro) y coordenadas cartesianas.

Aprendemos

Enrique retorna a su casa en bicicleta desde la casa de su amiga Diana, recorriendo 560 metros al oeste; luego da vuelta en una esquina y recorre 420 metros hacia el norte. Ellos, para seguir comunicándose, utilizan un antiguo juego llamado *walkie-talkie*, el cual se conserva en buen estado y cuyo alcance es de 800 metros; además, con ello ahorran dinero en gastos de línea de teléfono o internet.

Responde:

1. Si se une la distancia más corta que hay entre las casas de Diana y Enrique con la trayectoria que él recorre para volver a su casa, ¿qué tipo de figura geométrica se forma?
2. ¿Es suficiente la potencia de su equipo de comunicación o requerirán un equipo más potente? Justifica tu respuesta.

Comprendemos el problema

1. ¿Qué recorrido realiza Enrique para volver a su casa?

2. ¿Cuánto mide la distancia total que recorre Enrique para volver a su casa?

3. ¿Qué recorrido tendrá la distancia más corta que podría recorrer Enrique entre su casa y la casa de Diana?

4. ¿Cuánto mide el radio de alcance de cobertura del *walkie-talkie*?

5. ¿Qué pide la situación inicial?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia nos ayudará a resolver el problema?

a) Hacer un diagrama con la información dada.

b) Diagrama tabular.

c) Usar fórmulas.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Realiza un diagrama de la trayectoria que hace Enrique para llegar a su casa desde la casa de Diana.

2. Teniendo el diagrama anterior, agrega la trayectoria de la distancia más corta que podría recorrer Enrique entre la casa de Diana y su casa. ¿Qué tipo de figura geométrica se forma?

3. ¿Cómo se puede hallar la longitud de la distancia más corta que une la casa de Diana y la de Enrique? Realiza el procedimiento.

4. ¿Es suficiente la potencia de su equipo de comunicación o requerirán de un equipo más potente? Justifica tu respuesta.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué estrategia ayudó a entender mejor la situación inicial?

2. Según el teorema de Pitágoras, ¿qué relación se cumple entre los lados de un triángulo rectángulo?

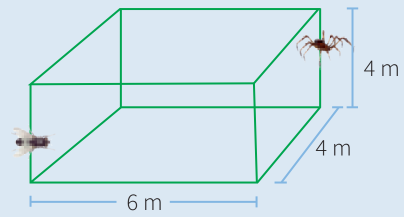
3. Si en el lugar donde viven Enrique y Diana hay casas, ¿qué dificultades de comunicación puede haber?

4. ¿Con qué triángulo notable tiene semejanza el triángulo rectángulo formado en la pregunta 2 de *Ejecutamos la estrategia o plan*?

¿? Analizamos

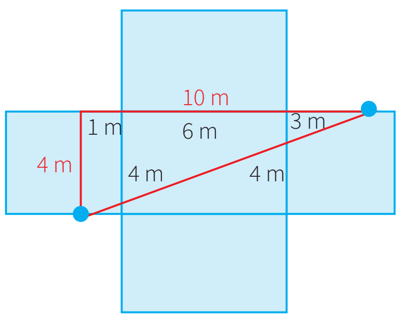
Situación A

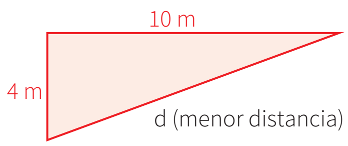
El profesor Jacinto le propone un problema a su estudiante Jorge, que consiste en averiguar la menor distancia que recorrerá la araña que está a un metro del techo para atrapar a la mosca que se encuentra a un metro del suelo y al otro lado de la pared, tal como se muestra en la figura.



Resolución

- Para averiguar la menor distancia que la araña recorrerá para atrapar a la mosca, tenemos que hacer el desarrollo del prisma presentado y realizar trazos:





Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 4^2 + 10^2$

$d^2 = 16 + 100$

$d^2 = 116$

$d = \sqrt{116}$

$d \approx 10{,}77$ m

Respuesta: La menor distancia que recorrerá la araña para atrapar a la mosca será de 10,77 metros aproximadamente.

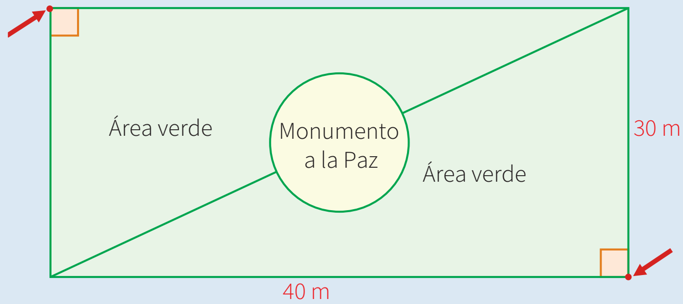
1. ¿Qué estrategia se utilizó en la resolución de la situación A?

2. ¿Cómo se denomina el lado del triángulo que representa la menor distancia entre la araña y la mosca?

3. ¿Cuál es el nombre del prisma?

Situación B

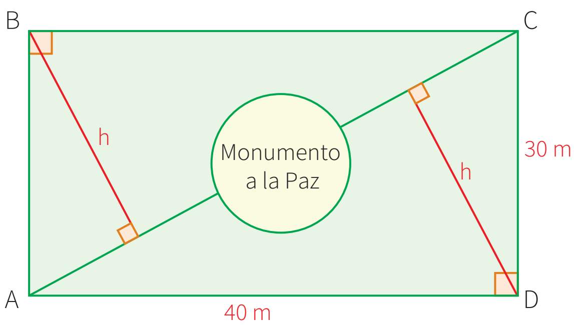
Un alcalde de un distrito tiene el siguiente diseño de un parque que desea construir:



Para terminar su proyecto, desea construir dos pasadizos de menor longitud que conecten las dos esquinas señaladas con la diagonal. ¿Cuál será la menor distancia del pasadizo que desea construir si los dos caminos tienen la misma longitud?

Resolución

- Hacemos un gráfico con los datos del problema. Además, la menor distancia entre las esquinas y la diagonal sería la altura de los triángulos. Trazamos dichas alturas.



- Utilizamos la relación métrica en un triángulo rectángulo para calcular las alturas:

  (altura) · (hipotenusa) = (cateto) · (cateto)

- Hallamos primero la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = 30^2 + 40^2$$
$$AC^2 = 2500$$
$$AC = \sqrt{2500} \rightarrow AC = 50 \text{ m}$$

- Aplicamos la relación métrica:

$$h\,(50) = 30\,(40) \rightarrow h = 24 \text{ m}$$

Respuesta: La menor distancia del pasadizo es 24 metros.

1. ¿Qué estrategia utilizó en la resolución de la situación B?

2. ¿Por qué se trazó el segmento "h" en la resolución de la situación B?

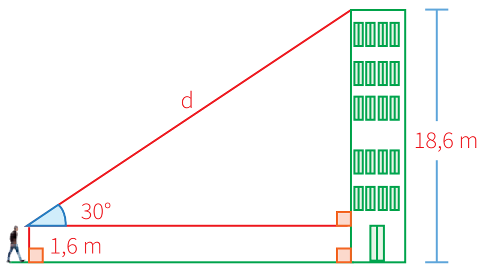
3. ¿Por qué los triángulos que forma la diagonal se llaman "triángulos congruentes"?

Situación C

Una persona observa la parte más alta de un edificio con un ángulo de elevación de 30°. Si el edificio tiene una altura de 18,6 metros y la altura del suelo al ojo del observador es de 1,6 metros, ¿cuál es la distancia que hay entre el ojo del observador y el punto más alto del edificio?

Resolución
(Encuentra el error)

- Realizamos el gráfico, teniendo en cuenta los datos que nos dan:



- Por propiedad del triángulo de 30° y 60°, la hipotenusa es el doble del lado que se opone a 30°; entonces:

$$d = (18{,}6) \cdot (2) = 37{,}2 \text{ m}$$

Respuesta: La distancia que hay entre el ojo del observador y el punto más alto del edificio es de 37,2 metros.

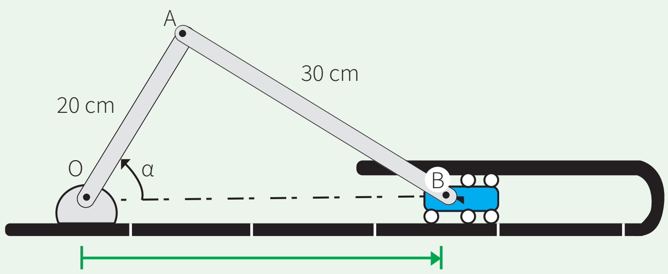
1. En el triángulo rectángulo que se ha formado, ¿es correcto trabajar con la altura total del edificio?

2. ¿Qué cambiarías en la resolución? ¿Cuánto sería tu respuesta?

Practicamos

Mecanismo biela-manivela

Se tiene un mecanismo biela-manivela (mecanismo que transforma un movimiento circular en un movimiento de traslación, o viceversa), OA = 20 cm, AB = 30 cm, de modo que el brazo OA gira alrededor del punto fijo O, generando el ángulo α, permitiendo que el punto B se pueda desplazar sobre el carril horizontal.



Con la información dada, responde las preguntas 1; 2 y 3.

1. Calcula la altura del punto “A” relativa al eje OB y a qué distancia de “O” está “B” cuando α mida 45°.

a) La altura es 14,1421 cm y “B” se encuentra aproximadamente a 40,6 cm del punto “O”.

b) La altura es 32,73 cm y “B” se encuentra aproximadamente a18,33 cm del punto “O”.

c) La altura es 17,3 cm y “B” se encuentra aproximadamente a 34,49 cm del punto “O”.

d) La altura es 14,1 cm y “B” se encuentra aproximadamente a 28,2 cm del punto “O”.

2. Calcula la altura del punto “A” relativa al eje OB cuando α es 30°, y cuánto se alejó “B” respecto al caso anterior cuando α = 45°.

a) La altura es de 10 cm y el punto “B” se aleja 45,58 cm aproximadamente de la posición anterior.

b) La altura es de 10 cm y el punto “B” se aleja 5 cm aproximadamente de la posición anterior.

c) La altura es de 17,3 cm y el punto “B” se aleja 34 cm aproximadamente de la posición anterior.

d) La altura es de 17,3 cm y el punto “B” se aleja 11,09 cm aproximadamente de la posición anterior.

3. Escribe en el paréntesis “V” si es verdadero y “F” si es falso en las siguientes afirmaciones:

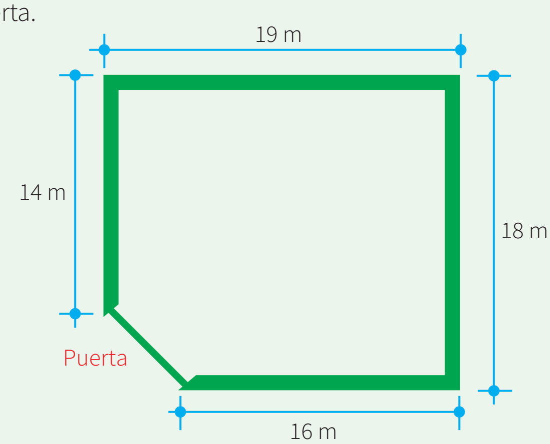
I) Cuando B se mueve, el ángulo formado por OAB no cambia su valor. (   )

II) Cuando el ángulo “α” aumenta su valor, entonces el punto “B” se acerca al punto “O”. (   )

III) Para calcular la altura del punto “A” respecto al eje horizontal OB, se utilizan las propiedades de los valores dados de los ángulos. (   )

4. La figura muestra el esquema del almacén de una fábrica textil de Gamarra.

Calcula el ancho de la puerta.



5. José vive en un pueblo en el cual solo hay televisión de señal abierta; por ello, decide colocar una antena de 8 metros de altura en su techo, la cual sujetará con cuatro alambres fijados a 1,6 metros del extremo superior de la antena. Si la distancia del pie de la antena al punto de anclaje del alambre es 4,8 metros, ¿cuántos metros de alambre tendrá que comprar?

a) 32 metros **b)** 8 metros **c)** 37,32 metros **d)** 20,24 metros

6. Una ventana rectangular mide 100 cm de ancho y 160 cm de largo. ¿Puede introducirse por la ventana una tabla de 188 cm de ancho por 250 cm de largo? ¿Por qué?

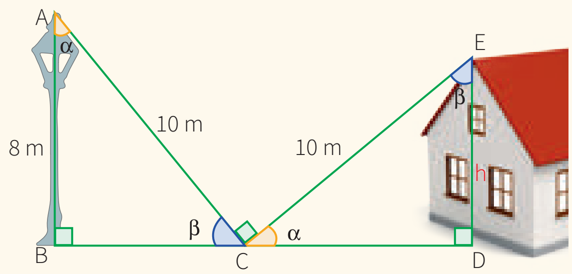
a) No se puede, porque la tabla no entra ni por el ancho ni por el largo de la ventana.

b) No se puede, porque la tabla es más grande que la ventana.

c) No se puede, porque al calcular la diagonal de la ventana me salió 124, 9 cm; entonces no se podría meter ni diagonalmente.

d) Sí se puede, porque al calcular la diagonal sale 188,68 cm; entonces ingresa por la diagonal de la ventana.

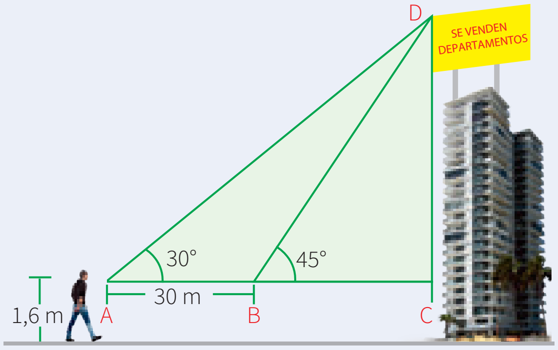
7. El maestro Luis presenta en la pizarra un gráfico con el recorrido que un pajarito realiza desde lo alto de un poste hacia un grano de maíz que logró ver en el suelo, para luego ir al otro extremo y pararse en lo más alto de una casa.



Jorge sale a la pizarra y le indica que los dos triángulos son congruentes y le dice a su maestro que la casa tiene una altura de 8 metros.

¿Estás de acuerdo con la respuesta de Jorge? ¿Por qué?

8. Una persona observa la parte alta de un letrero publicitario ubicado en la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 30°. Avanza 30 metros y observa nuevamente el letrero, con un ángulo de elevación de 45° como se muestra en el siguiente dibujo. ¿A qué altura se encuentra el letrero si la altura del suelo al ojo del observador es de 1,6 metros? (Aproxima $\sqrt{3}$ al centésimo y la altura del edificio menos la altura de la persona al décimo).

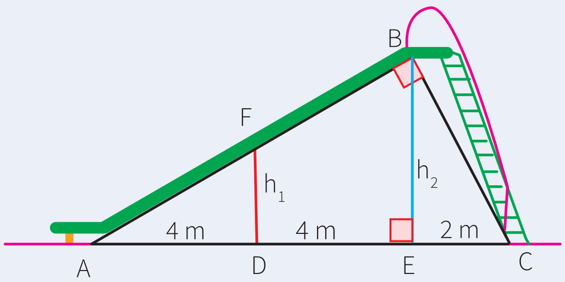


a) 41,10 m **b)** 73,17 m **c)** 74,77 m **d)** 42,7 m

9. El piloto de un avión que está por ingresar al aeropuerto observa el final y el inicio de la pista de aterrizaje con ángulos de depresión de 30° y 45°, respectivamente. Si el avión en ese momento está a 1400 metros de altura, ¿cuánto mide el largo de la pista de aterrizaje? (Aproxima $\sqrt{3}$ al centésimo).

a) 1022 m **b)** 2800 m **c)** 700 m **d)** 574 m

10. Jaimito va al parque de juegos con sus amigos y deciden jugar en la resbaladilla. Mientras jugaban, Jaimito, a quien le gusta mucho la matemática, decide averiguar las alturas de los postes que sostienen al juego. Para ello, mide las separaciones de los postes; además, observa que el juego forma un triángulo rectángulo, tal como se ve en el gráfico:



Con todos los datos que Jaimito averiguó, ¿puedes calcular las alturas de los postes que sostienen al juego? Explica las relaciones geométricas que usaste.

Ficha 19

Necesitamos los puentes peatonales

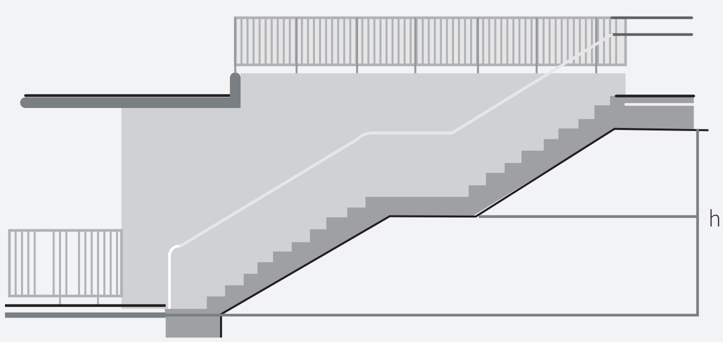
COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización	Comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas.	Expresa, con dibujos, con material concreto y con lenguaje geométrico, su comprensión sobre las propiedades de las razones trigonométricas de un triángulo, para interpretar un problema según su contexto y estableciendo relaciones entre representaciones.
	Usa estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio.	Selecciona y emplea estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar distancias inaccesibles, empleando unidades convencionales (centímetro, metro y kilómetro).

Aprendemos

Rafael López, gerente general de la Empresa Municipal Administradora de Peaje (Emape), advirtió sobre la imprudencia de las personas que cruzan las avenidas sin hacer uso de los puentes peatonales, y manifestó: ''Cruzar en medio de las pistas, en forma temeraria, tan solo por ganar unos segundos, puede costarle la vida al transeúnte. La población, en general, debe tomar conciencia de los riesgos a los que se enfrenta''. Por ello, para incentivar el uso de los puentes peatonales y salvaguardar la integridad de los peatones, Emape realiza un constante mantenimiento de los puentes que administra, como el pintado de sus estructuras, el enmallado y la señalización vial.

En la actualidad, en la Panamericana Sur y la Panamericana Norte hay 42 y 47 puentes, respectivamente, ubicados en forma estratégica a disposición de los usuarios. Además, este año se construirán 12 puentes peatonales en la Panamericana Sur y la Norte, con las siguientes especificaciones técnicas.

Corte frontal de la escalera



Escaleras

- Ancho mínimo de escalera: 1,80 m; medida sugerida: 2,50 m.
- Pendiente : 8/15.
- Tramo horizontal: 10,50 m.

Responde:

1. Ubica los datos de las especificaciones técnicas en una representación gráfica (usa el dibujo de la escalera).

2. ¿Cómo calculamos la altura y la longitud de la escalera?

Comprendemos el problema

1. ¿Por qué consideras que son importantes los puentes peatonales?

2. ¿Qué tipo de información ofrecen las especificaciones técnicas?

3. ¿Qué información nos da la pendiente?

4. ¿Qué pide la situación inicial?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia nos ayudará a responder las interrogantes de la situación inicial?

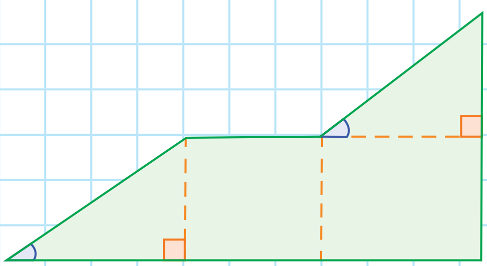
a) Razonar lógicamente.

b) Organizar la información en tablas.

c) Realizar un diagrama con los datos proporcionados.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Ubica los datos de las especificaciones técnicas en una representación gráfica (completa los datos en el gráfico).



2. En el tramo horizontal se tiene:

$15k + 1{,}50 + 15k = 10{,}50$

¿Cuánto es el valor de "k"?

3. Escribe las medidas donde corresponden, reemplazando el valor de "k".

4. Ahora se debe hallar la longitud y altura de la escalera:

- Observando el gráfico se puede tener que la altura es: ______ metros.
- Para hallar la longitud de la escalera se sumará:

x + 1,50 + x = ______

- Halla el valor de "x" en el triángulo rectángulo.

5. ¿Cuánto mide la longitud de la escalera?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Qué conocimientos matemáticos te han ayudado a resolver la situación inicial?

2. Realiza un procedimiento distinto para hallar el valor de "x".

3. Si se construyen rampas, ¿también se necesita conocer la pendiente?

4. Menciona algún lugar de tu localidad donde consideras que es urgente construir un puente peatonal.

Analizamos

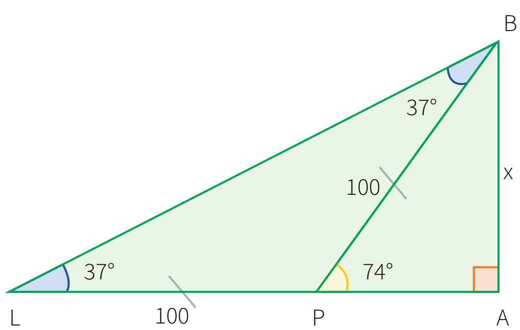
Situación A

Pedro vuela su cometa manteniendo la cuerda tensa y haciendo un ángulo de 74°. A 100 m, detrás de Pedro está Lucas y observa la cometa con un ángulo de 37° respecto a la horizontal. Si Pedro y Lucas observan la cometa desde una misma altura de 1,30 m respecto al suelo, ¿a qué altura se encuentra la cometa?

Fuente: *https://goo.gl/wXx5cx*

Resolución

Se representa gráficamente la situación:



- En el ΔLPB, por la propiedad de ángulo exterior, se determina que:

$$m\angle PLB \cong m\angle PBL = 37°$$

- Entonces, el ΔLPB es isósceles.

- Además, se cumple que:

$$\overline{LP} = \overline{PB} = 100 \text{ m}$$

- En el ◣PAB: $\text{Sen } 74^{\circ} = \dfrac{x}{100}$

$$\frac{24}{25} = \frac{x}{100}$$

$$x = \frac{24 \cdot 100}{25}$$

$$x = 96 \text{ m}$$

- Para determinar a qué altura se encuentra la cometa, se suma 96 m a la altura del niño (1,30 m).

Respuesta: La cometa se encuentra a 97,30 m del suelo.

1. ¿Qué estrategia ayuda a entender mejor la situación A?

2. Escribe la propiedad del ángulo exterior en un triángulo.

3. ¿Qué características tiene un triángulo isósceles?

4. Dibuja el triángulo notable de 16° y 74°.

Situación B

La docente Clarisa, de la I. E. Santa María, entregó a sus estudiantes de tercero de secundaria 5 tarjetas de dominó para que las ordenen aplicando las propiedades de las razones trigonométricas. Si fueras un estudiante de la profesora, ¿cómo ordenarías las tarjetas del dominó?

I

$x = 10°$	Simplifica la expresión $x = \dfrac{\text{sen } 40°}{\cos 50°}$

II

$x = 2$	¡Lo logré! 

III

Propiedades de las razones trigonométricas	Si $\text{sen } (3x - 10)° \cdot \csc 20° = 1$ ¿cuánto vale x?

IV

$x = 65°$	Simplifica la expresión: $x = \text{sen } 20° \cdot \sec 70° + \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 40°$

V

$x = 1$	Si $\csc (x + 5)° = \sec 20°$ ¿cuánto vale x?

Resolución

Resolvemos cada situación presentada en la ficha de dominó:

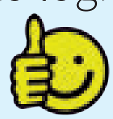
Propiedades de las razones trigonométricas	Si $\text{sen } (3x - 10)° \cdot \csc 20° = 1$ ¿cuánto vale x?

→

Como son RT recíprocas, los ángulos son iguales:

$$\text{sen } (3x - 10)° \cdot \csc 20° = 1$$
$$3x - 10° = 20°$$
$$x = 10°$$

$x = 10°$	Simplifica la expresión: $x = \dfrac{\text{sen } 40°}{\cos 50°}$	→	Aplicando RT complementarias: sen 40° = cos 50°; (40° + 50° = 90°). Entonces: $x = \dfrac{\text{sen } 40°}{\cos 50°} = 1$
$x = 1$	Si $\csc (x + 5)° = \sec 20°$ ¿cuánto vale x?	→	Aplicando RT complementarias: $\csc (x + 5)° = \sec 20°$ $x + 5° + 20° = 90°$ $x = 65°$
$x = 65°$	Simplifica la expresión: $x = \text{sen } 20° \cdot \sec 70° + \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 40°$	→	Aplicando RT complementarias y recíprocas: $\sec 70° = \csc 20°$; $\text{tg } 40° = \text{ctg } 50°$ Entonces: $x = \text{sen } 20° \cdot \sec 70° + \text{tg } 50° \cdot \text{tg } 40°$ $x = \text{sen } 20° \cdot \csc 20° + \text{tg } 50° \cdot \text{ctg } 50° = 2$

$x = 2$	¡Lo logré! 

1. Escribe las propiedades de las razones trigonométricas recíprocas.

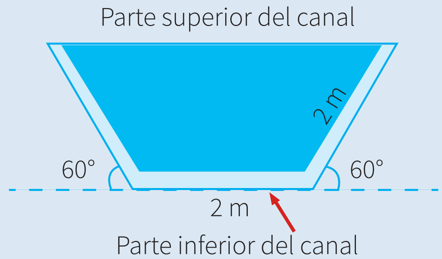
2. Escribe las propiedades de las razones trigonométricas complementarias.

3. ¿Cómo se ordenan las fichas de un dominó?

Situación C

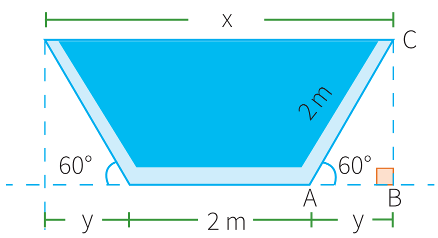
Los canales son conductos abiertos o cerrados en los cuales el agua circula debido a la acción de la gravedad. Los pobladores de una comunidad deciden construir un canal en forma geométrica, como se muestra en la figura, para abastecer de agua a sus cultivos. ¿Cuánto mide la parte superior del canal?

Fuente: *https://goo.gl/iqh33r*



Resolución
(Encuentra el error)

Trazamos la altura para formar un triángulo rectángulo de 60° y 30°.



- En el ◺ABC:

$$\text{Cos } 60° = \frac{y}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{2} \rightarrow y = \sqrt{3}$$

- Entonces:

$$x = y + 2 + y$$

$$x = \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}$$

$$x = 2\sqrt{3} + 2 = 2(\sqrt{3} + 1)$$

Respuesta: La parte superior del canal mide $2(\sqrt{3} + 1)$ metros.

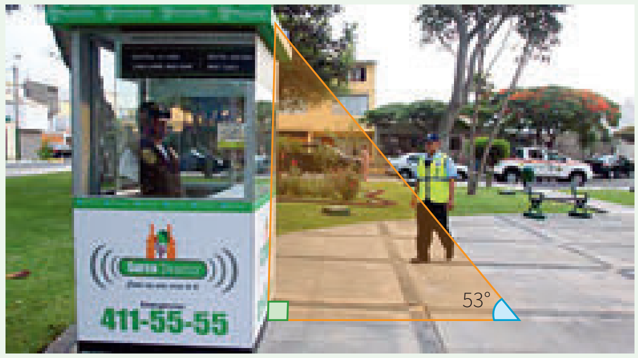
1. Dibuja el triángulo notable de 30° y 60°.

2. Observa el gráfico y determina el cos 60°.

3. ¿Qué cambiarías en la resolución y cuál es la respuesta?

Practicamos

1. El puesto de vigilancia de la Municipalidad de Surco, en un momento determinado del día, proyecta una sombra de 1,8 m de largo. Si el ángulo que se forma desde la punta de la sombra hasta el punto más alto del puesto de vigilancia es de 53°, ¿cuál es la altura del puesto de vigilancia?



Fuente: *https://goo.gl/o6MeAx*

a) 3 m **b)** 1,35 m **c)** 28 m **d)** 2,4 m

2. Luego de resolver las situaciones matemáticas presentadas en cada una de las tarjetas, ordénalas de menor a mayor:

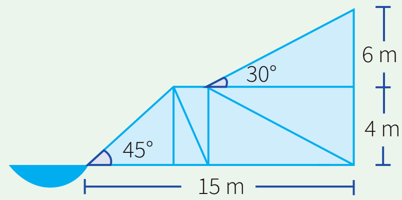
I: $\operatorname{tg}(x+10)° = \operatorname{ctg}(x+40)°$

II: $\operatorname{sen}(2x+5)° \cdot \csc 21° = 1$

III: $\operatorname{sen} 2x \cdot \sec 4x = 1$

a) II; III; I **b)** II; I; III **c)** III; II; I **d)** I; II; III

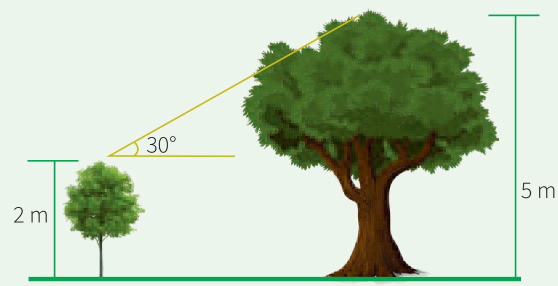
3. La Comisión de Desarrollo Social de la Municipalidad de Lima quiere implementar toboganes en las piscinas para la recreación de los asistentes en algunos parques zonales; uno de los diseños presentados es como se muestra en la figura. Ayuda a la comisión de la Municipalidad a determinar la longitud del tobogán. (Aproxima $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ al centésimo).



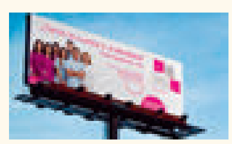
a) 14,41 m **b)** 18,26 m **c)** 17 m **d)** 25 m

4. Un niño en un parque observa el desplazamiento de una paloma entre dos árboles. La paloma vuela desde lo alto de un árbol hacia la parte más alta de otro árbol en línea recta, cuyas alturas son de 2 m y 5 m, respectivamente, como se muestra en la figura.

¿A qué distancia se encuentran separados los árboles?



5. Dos estudiantes realizan el proyecto de matemática "Midiendo alturas" y deciden determinar la altura de un letrero publicitario, ubicándose a 12 m del pie del letrero publicitario. Desde allí observan la base y la parte superior del letrero con ángulos de elevación de 37° y 53°, respectivamente. ¿Cuánto mide la altura del letrero publicitario?



Fuente: *https://goo.gl/ZTG9dH*

a) 16 m **b)** 21 m **c)** 10 m **d)** 7 m

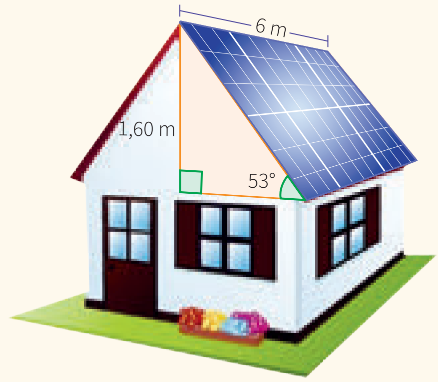
6. El Programa Nacional de Electrificación Fotovoltaica Domiciliaria busca llevar electricidad a hogares que no cuentan con este servicio, mediante la instalación de paneles solares. La figura muestra un panel de energía solar colocado en el techo. ¿Cuál es el perímetro del panel empleado en el techo de la vivienda?

a) 16 m

b) 16,80 m

c) 20 m

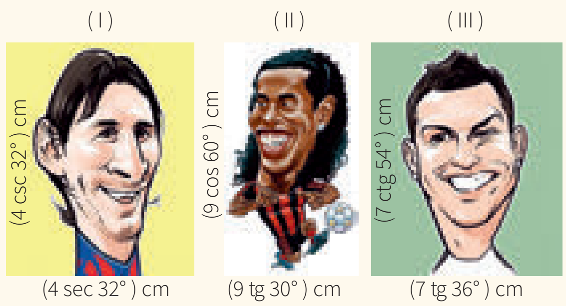
d) 32 m



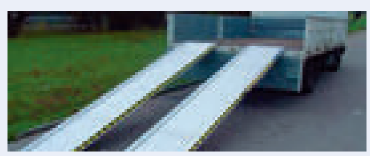
Fuente: *https://goo.gl/daqtkP*

7. Carlos diseñó algunas caricaturas señalando sus medidas de una manera especial.

¿Cuál de las siguientes caricaturas representa un cuadrado? Justifica tu respuesta.



8. Para la descarga de sus productos, un comerciante debe construir una rampa de 240 cm de largo, que se levantará a una altura del suelo de 120 cm. ¿Cuál será el ángulo que forma la rampa con la horizontal?



Fuente: *https://goo.gl/DjPgYX*

a) 30° **b)** 45° **c)** 60° **d)** 75°

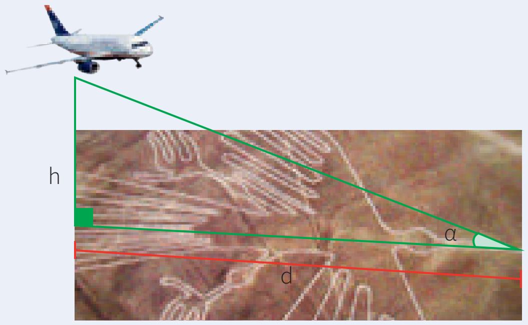
9. A partir de la figura mostrada, ¿cómo se expresa la longitud del Colibrí (Líneas de Nasca), en términos de h y α?

a) h ctg α

b) h tg α

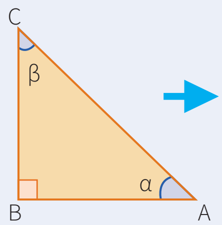
c) h sen α

d) h sen α · cos α



Fuente: *https://goo.gl/rUaxM9*

10. La docente de Matemática, con la finalidad de desarrollar la capacidad "razona y argumenta" en sus estudiantes, propone la siguiente afirmación:



$\sqrt{\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta} = \text{sen}\,\alpha$

Si eres un estudiante de la docente, ¿cómo demuestras si la afirmación dada es correcta?

Ficha 20

La inseguridad ciudadana

COMPETENCIA	CAPACIDADES	DESEMPEÑOS
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre	Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos.	Representa la probabilidad de un suceso a través de fracciones, decimales o porcentajes. A partir de este valor, determina si un suceso es probable o muy probable, o casi seguro de que ocurra.
	Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.	Plantea afirmaciones, conclusiones e inferencias sobre sucesos aleatorios de una situación aleatoria.

Aprendemos

La delincuencia en las calles del Perú, especialmente de Lima, se ha recrudecido de tal forma que una persona puede perder la vida hasta por un teléfono celular. Es una situación complicada, pero que podría llegar a su fin si la población dejara de comprar celulares robados. Según un reporte de Osiptel, en el primer trimestre del 2016 han robado alrededor de 549 000 celulares.

Por otro lado, la población de Lima es de 10 000 000 y, según el reporte de Osiptel, hay más celulares que habitantes en esta ciudad; eso quiere decir que una persona tiene por lo menos un celular.

Fuente: *https://goo.gl/q3riuU*

Responde:

1. Si divido 549 000 por 10 000 000, ¿qué relación encontramos?
2. Si tomamos como referencia la información ofrecida por el reporte de Osiptel, ¿cuál es la probabilidad de que te puedan robar tu celular en un año?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué informa el reporte de Osiptel?

2. ¿Por lo menos cuántos celulares deben haber solo en Lima?

3. ¿A cuántos meses equivale un trimestre y cuántos trimestres hay en un año?

4. ¿Qué datos nos servirán para responder las interrogantes?

5. ¿Cómo se halla la probabilidad de un evento?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia nos ayudará a responder la situación inicial?

   a) Razonar lógicamente.

   b) Usar fórmula de probabilidades.

   c) Ordenar datos en tablas.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Realiza la división de 549 000 entre 10 000 000; ¿qué relación encontramos?

2. Expresa el resultado de la división anterior, en porcentaje, y responde: ¿qué porcentaje de probabilidad tiene una persona de que le roben su celular en el primer trimestre del año?

3. Osiptel informa que en el primer trimestre del 2016 han robado alrededor de 549 000 celulares. ¿Cuántos celulares habrán robado en un año?

4. ¿Cuál es la probabilidad de que puedan robarte un celular en un año?

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. Si nos dicen que hay una probabilidad del 6 % de que nos roben un celular, ¿cómo explicarías en palabras dicha información?

2. ¿Qué significa si la probabilidad fuera uno o 100 %? ¿Y si fuera cero?

3. ¿Para qué nos sirve conocer la probabilidad de un evento o suceso?

4. ¿Cómo se puede evitar el incremento del robo de celulares y resguardar la vida?

Cuaderno de trabajo 3ero FINAL OK.indd 238 25/11/17 01:28

Analizamos

Situación A

Al finalizar la transmisión del primer partido del torneo Apertura del fútbol peruano, se realizó una encuesta a 80 personas y se obtuvieron los siguientes resultados: a 30 les agradó el juego de sus equipos, a 15 no les agradó, 30 observaron otros programas y 5 no miraron ningún programa. Al elegir al azar a uno de los encuestados que estuvo viendo televisión, ¿cuál es la probabilidad de que este encuestado haya observado un partido de fútbol?

Resolución

- Para hallar la probabilidad se debe aplicar la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al evento A}}{\text{Número total de casos}}$$

- Identificamos los casos favorables (los que vieron el primer partido) F:

$$F = 30 + 15 = 45$$

- Total de casos (son todas las personas que vieron televisión) Ω:

$$\Omega = 30 + 15 + 30 = 75$$

- Por lo tanto, la probabilidad de que un televidente haya observado un partido de fútbol es:

$$P\,(F) = \frac{\text{Casos favorables a F}}{\text{Casos posibles}}$$

$$P\,(F) = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$$

Respuesta: La probabilidad de que el encuestado haya observado un partido de fútbol es de:

$$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\ \%$$

1. ¿Es lo mismo decir casos favorables o casos posibles? Explica.

2. ¿Qué procedimiento se realiza para llevar una fracción o decimal a porcentaje?

Situación B

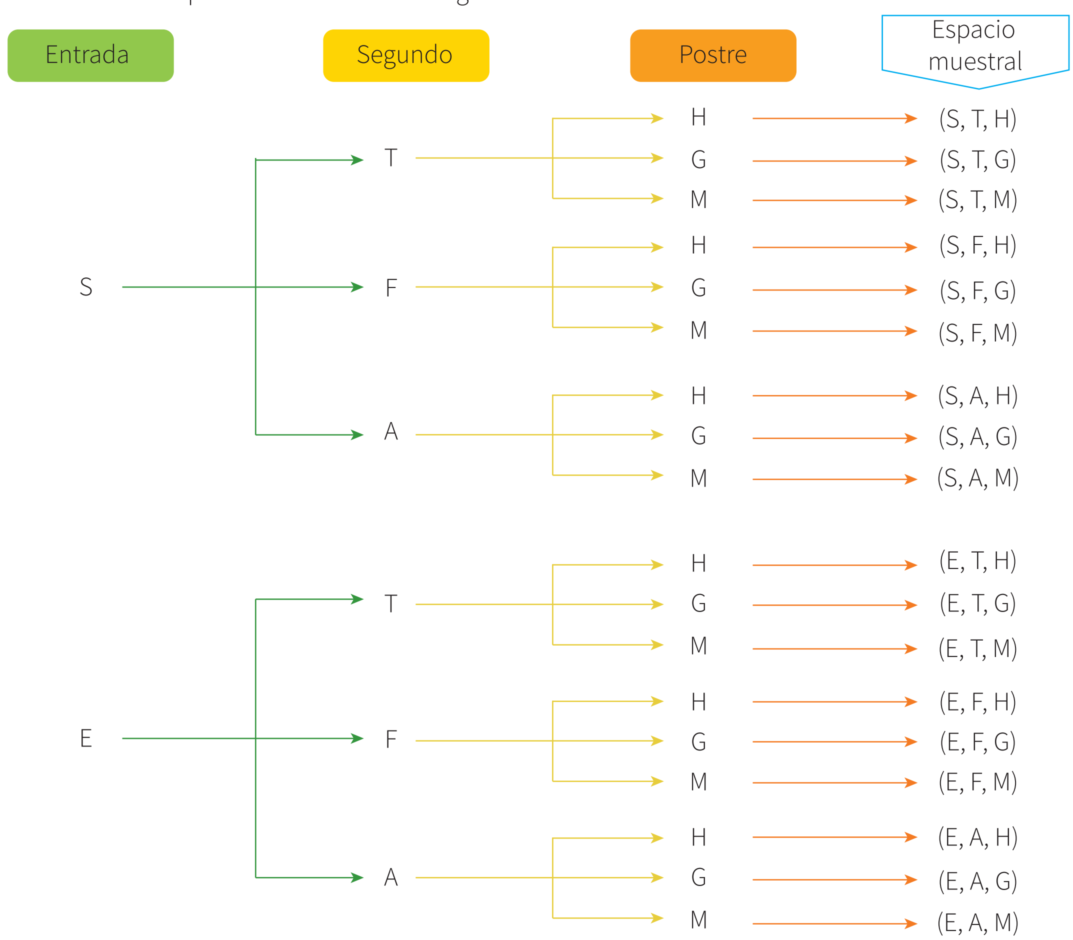
Por el cumpleaños de uno de sus hijos, la familia Hernández acude al restaurante Sabor & Color, y observa el menú del día en el cartel de la derecha:

a) A partir de un diagrama de árbol, determina todas las combinaciones que hay para elegir un menú que tenga entrada, segundo y postre.

b) ¿Cuál es la probabilidad de escoger un menú cuyo segundo sea un filete de pollo?

Resolución

a) Se determinará el espacio muestral con el diagrama de árbol:



Respuesta: Se tienen 18 combinaciones, que constituyen el espacio muestral.

b) N.° de casos favorables F: 6.

N.° de casos posibles Ω: 18.

Por lo tanto, la probabilidad de escoger un menú cuyo segundo sea un filete de pollo es:

$$P(F) = \frac{\text{N.° de casos favorables}}{\text{N.° de casos posibles}} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Respuesta: La probabilidad de escoger un menú cuyo segundo sea un filete de pollo es:

$$\frac{1}{3} \approx 0{,}33 \approx 33\ \%$$

1. ¿Qué es el espacio muestral?

2. ¿De qué otra forma se puede hallar el espacio muestral?

3. ¿Cuáles son los casos favorables al escoger un menú cuyo segundo sea filete de pollo?

Situación C

En el taller de mecánica Lumix atienden, por la mañana, cinco automóviles con problemas eléctricos, seis con problemas mecánicos y tres por planchado; por la tarde, atienden tres automóviles con problemas eléctricos, nueve con problemas mecánicos y cuatro por planchado. El dueño de la mecánica desea saber:

a) El porcentaje de los automóviles que atiende por la tarde.

b) El porcentaje de los automóviles que atiende por problemas mecánicos.

c) La probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos sea atendido por la mañana.

Resolución

(Encuentra el error)

Ordenamos los datos en una tabla:

	Eléctrico	Mecánico	Planchado	Total
Mañana	5	6	3	14
Tarde	3	9	4	16
Total	8	15	7	30

a) El porcentaje de los automóviles que atiende por la tarde:

N.° de casos favorables (tarde) T: 16.

N.° de casos posibles Ω: 30.

$$P(T) = \frac{\text{N.° de casos favorables}}{\text{N.° de casos posibles}} \cdot 100\ \% = \frac{16}{30} \cdot 100 \approx 53\ \%$$

b) El porcentaje de los automóviles que atiende por problemas mecánicos.

N.° de casos favorables M: 15.

N.° de casos posibles Ω: 30.

$$P(M) = \frac{\text{N.° de casos favorables}}{\text{N.° de casos posibles}} \cdot 100\ \%$$

$$P(M) = \frac{15}{30} \cdot 100 = 50\ \%$$

c) La probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos sea atendido por la mañana.

N.° de casos favorables (mañana) E: 14.

N.° de casos posibles (problemas eléctricos) Ω: 8.

$$P(E) = \frac{\text{N.° de casos favorables}}{\text{N.° de casos posibles}} = \frac{14}{8} = 1{,}75$$

Respuesta:

a) El 53 % de automóviles se atiende por la tarde.

b) El 50 % de automóviles se atiende por problemas mecánicos.

c) Hay una probabilidad de 1,75 de que un automóvil con problemas eléctricos sea atendido por la mañana.

1. ¿Qué estrategia ayudó a organizar la información?

2. ¿La probabilidad puede ser mayor que 1?

3. ¿Qué cambiarías en la resolución del punto c de la situación C?

4. ¿Cuál sería tu respuesta al punto c de la situación C?

Practicamos

1. La profesora Jennifer, del área de Matemática del tercer grado de secundaria, luego de corregir sus evaluaciones de salida, registra los resultados en la siguiente tabla:

Puntaje	Inicio	Proceso	Satisfactorio
	0 - 10	11 - 13	14 - 20
Cantidad de estudiantes	12	10	8

Al elegir a un estudiante del aula al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga un puntaje satisfactorio?

a) 11/15 **b)** 4/15 **c)** 2/5 **d)** 1/3

Elección de estudiantes

La docente de Comunicación organiza un debate entre las secciones A y B. Escribe los nombres de sus estudiantes en tiras de papel y los coloca en una urna, para que la participación de los estudiantes sea al azar.

Puntaje	Masculino	Femenino
Sección A	16	12
Sección B	9	15

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer el nombre de un estudiante sea alguien de la sección A?

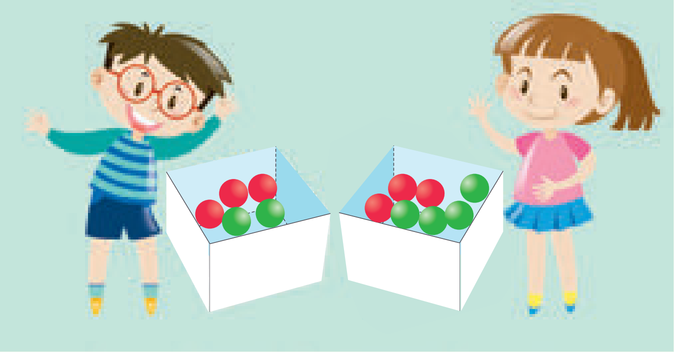
a) 4/13 **b)** 7/13 **c)** 4/7 **d)** 3/13

3. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer el nombre de un estudiante sea una chica de la sección B?

a) 3/8 **b)** 5/8 **c)** 5/9 **d)** 15/52

Extrayendo bolas de colores

Carlos y Pamela tienen una urna cada uno, que contienen bolas de color rojo y verde, como se muestra en la figura.



Adaptado de *https://goo.gl/ZbzbjK https://goo.gl/eTmbrb*

Con la información dada, responde las preguntas 4 y 5.

4. Determina el espacio muestral si se extraen tres bolas, sin devolución, de la urna de Carlos.

5. Si Mario quiere extraer una bola verde, ¿en cuál de las urnas tiene más probabilidad de obtenerla? Representa tu respuesta en porcentaje.

a) 50 % **b)** 86 % **c)** 57 % **d)** 40 %

6. Una entidad financiera realiza un estudio sobre el número de tarjetas de crédito que tienen los trabajadores del sector público. La probabilidad de que estos trabajadores tengan cierta cantidad de tarjetas de crédito se distribuye en la siguiente tabla.

N.º de tarjetas de crédito	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,15	0,50	0,20	0,10	0,05

¿Cuál de los siguientes enunciados es falso?

a) El 15 % de los trabajadores del sector público no tiene tarjeta de crédito.

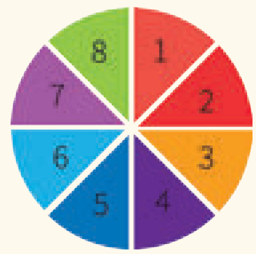
b) La probabilidad de que un trabajador del sector público tenga más de una tarjeta de crédito es 0,35.

c) El 50 % de los trabajadores del sector público tiene más de tres tarjetas de crédito.

d) La probabilidad de que los trabajadores del sector público tengan una o dos tarjetas de crédito es de 7/10.

El dado y la ruleta

Lucía posee un dado numerado del 1 al 6 y Emma tiene una ruleta dividida en 8 secciones. Ellas proponen a sus amigos lanzar el dado y girar la ruleta.



Fuente: *https://goo.gl/NEuzxW*

Con la información dada, responde las preguntas 7 y 8.

7. ¿Cuántos resultados posibles hay al lanzar primero el dado y luego girar una vez la ruleta?

8. Si Lucía y Emma deciden regalar un lapicero a los que obtengan una diferencia de 2, ¿cuál es la probabilidad de llevarse el lapicero?

a) 1/2 **b)** 2/3 **c)** 1/8 **d)** 5/24

9. Carlos ahorra sus propinas semanales en una alcancía y tiene un total de 30 monedas, entre las que hay 5 de S/1 y las demás son de S/2 y S/5. Si la probabilidad de extraer una moneda de S/2 es 0,6, ¿cuántas monedas de S/5 hay en la alcancía?

Fuente: *https://goo.gl/JYbabz*

a) 18 **b)** 14 **c)** 5 **d)** 7

10. En una institución educativa, el 45 % de los estudiantes practica fútbol, el 30 % juega básquet y el 20 % practica ambos deportes. Con la información dada, completa la tabla:

	Fútbol	No fútbol	Total
Básquet			
No básquet			
Total			100 %

Si se elige a un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue fútbol ni básquet?

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I

La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1

Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.

La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

Artículo 2

El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base delestado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

Artículo 3

Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

Artículo 4

Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.

La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

Artículo 5

El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.

Artículo 6

La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II

La democracia y los derechos humanos

Artículo 7

La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

Artículo 8

Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.

Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

Artículo 9

La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

Artículo 10

La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III

Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11

La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

Artículo 12

La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

Artículo 13

La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

Artículo 14

Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

Artículo 15

El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

Artículo 16

La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV

Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17

Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

Artículo 18

Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

Artículo 19

Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

Artículo 20

En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.

El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.

Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Artículo 21

Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.

El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.

Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

Artículo 22

Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V

La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23

Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.

Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

Artículo 24

Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.

Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.

Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

Artículo 25

Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.

La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI

Promoción de la cultura democrática

Artículo 26

La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

Artículo 27

Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

Artículo 28

Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.