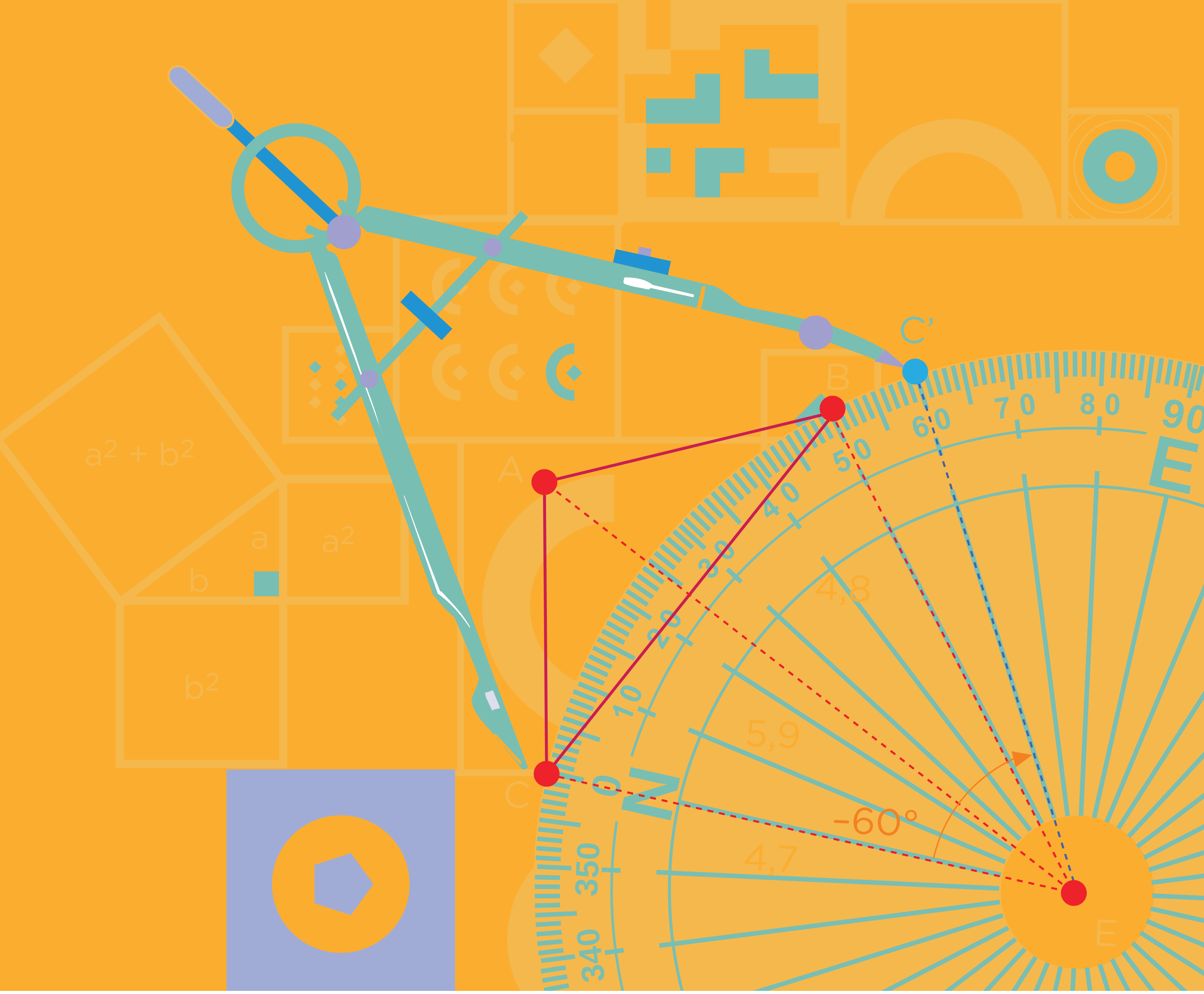
SECUNDARIA

Fichas de Matemática 5



REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

La ciudadana y el ciudadano que queremos

Perfil de egreso

Se **reconoce** como persona valiosa y se identifica con su cultura en diferentes contextos.

Desarrolla procesos autónomos de aprendizaje.

Gestiona proyectos de manera ética.

Interpreta la realidad y toma decisiones con conocimientos matemáticos.

Propicia la vida en democracia comprendiendo los procesos históricos y sociales.

Indaga y comprende el mundo natural y artificial utilizando conocimientos científicos en diálogo con saberes locales.

Se **comunica** en su lengua materna, en castellano como segunda lengua y en inglés como lengua extranjera.

Aprovecha responsablemente las tecnologías.

Comprende y aprecia la dimensión espiritual y religiosa.

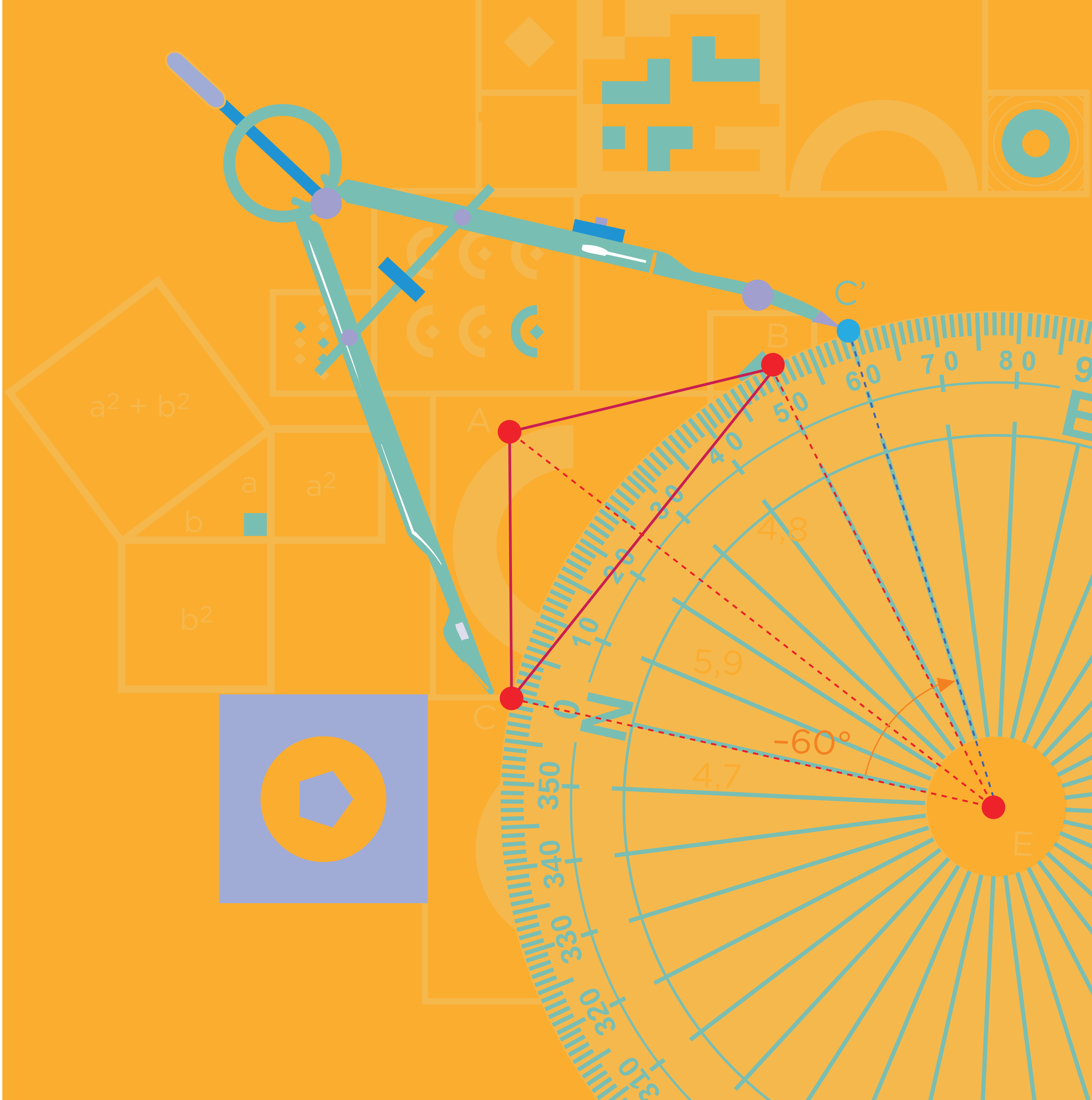
Aprecia manifestaciones artístico-culturales y crea proyectos de arte.

Practica una vida activa y saludable.

Currículo Nacional

SECUNDARIA

Fichas de Matemática 5



MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Fichas de Matemática 5

Este material educativo, *Fichas de Matemática 5* para estudiantes de quinto grado de Educación Secundaria, ha sido elaborado por la Dirección de Educación Secundaria para promover el desarrollo de las competencias "Resuelve problemas de cantidad", "Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio", "Resuelve problemas de forma, movimiento y localización" y "Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre" propuestas en el Currículo Nacional de Educación Básica.

Edición
© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.° 193, San Borja
Lima 15021, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Propuesta de contenidos
Larisa Mansilla Fernández
Olber Muñoz Solís
Juan Carlos Chávez Espino
Hugo Luis Támara Salazar
Hubner Luque Cristóbal Jave
Enrique García Manyari

Revisión pedagógica
Olber Muñoz Solís
Larisa Mansilla Fernández
Juan Carlos Chávez Espino
José Luis Maurtua Aguilar

Revisión académica
Nelly Gabriela Rodríguez Cabezudo

Diseño y diagramación
Carlos Héctor Boza Loayza

Corrección de estilo
Martha Silvia Petzoldt Diaz

Primera edición: setiembre de 2017
Segunda edición: junio de 2019
Primera reimpresión: agosto de 2020
Segunda reimpresión: diciembre de 2020
Tercera reimpresión: agosto de 2021
Tercera edición: noviembre de 2022

Tiraje
445 562 ejemplares

Impresión
Se terminó de imprimir en diciembre de 2022,
en los talleres gráficos de Pacífico Editores S.A.C.,
sito en Jr. Castrovirreyna 224 - Interior 1.er piso,
Urb. Azcona, Breña, Lima - Perú

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N.° 2022-11361

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Estimada/o estudiante:

Es de sumo agrado para nosotros poner en tus manos el material educativo **Fichas de Matemática 5**, que estamos seguros te ayudarán a descubrir la presencia de la matemática en la vida cotidiana y a utilizarla de manera adecuada y creativa en la resolución de problemas vinculados a la realidad.

En su estructura, te proponemos algunos ejemplos de estrategias heurísticas para que las puedas emplear en cada una de las fichas, las mismas que se encuentran organizadas en tres secciones: *Aplicamos nuestros aprendizajes*, *Comprobamos nuestros aprendizajes* y *Evaluamos nuestros aprendizaje*s.

En la primera sección, *Aplicamos nuestros aprendizajes*, te presentamos una situación relacionada con la vida cotidiana, que será abordada a través de interrogantes que pretenden movilizar tus capacidades y conocimientos, lo cual te ayudará a comprender el problema, diseñar o seleccionar una estrategia o plan, ejecutar la estrategia y reflexionar sobre lo desarrollado.

En la segunda sección, *Comprobamos nuestros aprendizajes*, te planteamos tres situaciones de contexto, en cuyo desarrollo podrás explicar el proceso de resolución, identificando estrategias y describiendo procedimientos utilizados. Este análisis te permitirá plantear otros caminos de resolución, así como identificar errores y realizar tu propia corrección.

En la tercera sección, *Evaluamos nuestros aprendizajes*, te presentamos situaciones de diverso grado de complejidad en contextos variados y apoyados en gráficos. Al desarrollar las actividades que contienen, te darás cuenta de tus progresos.

Finalmente, puedes desglosar las fichas para desarrollarlas y organizarlas en tu portafolio, de manera que, tu docente te brinde retroalimentación u orientación para que puedas seguir mejorando.

Esperamos que con esta experiencia sientas que hacer matemática es un reto posible de alcanzar. **Disfrútalo**.

Conociendo algunas estrategias

Un buen resolutor de problemas debe llegar a desarrollar la capacidad de resolver un problema con diversos métodos; además, necesita estar en capacidad de combinar estrategias creativamente. En cada etapa de desarrollo de la solución, debemos definir qué estrategia se utilizará en la siguiente fase.

1. Estrategias de comprensión

Lectura analítica

Leer analíticamente un texto es dividirlo en unidades que proporcionen algún tipo de información y establecer, luego, cómo estas partes se interrelacionan y muestran el panorama de lo que se quiere decir. Al leer un problema de manera analítica, uno puede hacerse estas preguntas: ¿quiénes participan en la historia?, ¿qué es lo que no varía a lo largo de la historia?, ¿cuáles son las condiciones del texto?, ¿cuáles son los datos que nos proporciona?, ¿qué datos son relevantes para resolver el problema?, ¿qué debemos encontrar?, ¿qué condiciones se imponen a lo que buscamos?, entre otras interrogantes que ayudarán a que el estudiante se familiarice y le pierda temor a resolver el problema.

La lectura analítica ayuda mucho en la comprensión lectora del problema, pero no garantiza el camino a su solución. Leer analíticamente no es identificar las palabras claves ni buscar *tips* para encontrar la variable (estos son procesos mecánicos que no ayudan a comprender cabalmente un problema). En la vida real, los problemas matemáticos pueden no contener esas palabras claves que aparecen en problemas diseñados para libros de texto, por lo que el estudiante enfocará erradamente un problema si hace uso de este mecanismo.

La lectura analítica es importante en la comprensión de problemas, pues estos textos contienen elementos matemáticos como números, diagramas, relaciones dentro de una historia o un contexto real complejo, por lo que no es lo mismo que leer un cuento o un ensayo. De hecho, hay personas que comprenden perfectamente textos humanísticos, pero no aquellos que contienen elementos matemáticos.

Parafrasear

Parafrasear es decir algo de otro modo para clarificar y comprender un texto. Explicar un problema con nuestras propias palabras ayuda mucho en el proceso de comprensión. Se debe decir que parafrasear no implica aprenderse de memoria un texto y repetirlo; es señalar lo más importante de una historia y expresarlo con palabras, evitando en lo posible particularidades como números, fechas, nombres, locaciones, etc.

Veamos un ejemplo:

Problema	Parafraseo
Jaime fue el organizador de la fiesta de fin de año de su colegio. Él proyectó ganar S/4800, para lo cual repartió 200 tarjetas; pero, lamentablemente, solo se vendieron 130, lo que le causó una pérdida de S/150. ¿Cuánto invirtió en la fiesta?	Una persona organiza una fiesta. Para ganar necesita vender una cantidad de tarjetas; pero vende menos y pierde. Nos piden saber cuánto invirtió en la fiesta.

Se sugiere que se realice una lectura analítica de ellos, que produzca sus propios esquemas de comprensión y realice al menos dos parafraseos por cada problema presentado.

Hacer esquemas

La capacidad de representar una situación compleja mediante esquemas es algo que se va aprendiendo desde los primeros años de escolaridad y continúa en proceso de construcción toda la vida. Hacer e interpretar esquemas son algunas de las capacidades más necesarias en nuestra vida. En diversas situaciones cotidianas se requiere de la esquematización de los sistemas, las situaciones, los procesos, con el fin de comprenderlos mejor. Un esquema apunta a encontrar una estrategia de solución; no existe una relación directa entre hacer un esquema y dar solución a un problema, pero ayuda mucho en este proceso.

2. Estrategias de resolución

Una estrategia importante en la búsqueda de soluciones es representar el problema mediante algún organizador visual. Aquí presentamos algunos organizadores de información que se utilizan frecuentemente en el proceso de resolver problemas matemáticos.

Diagramas de tiras

Se utilizan mayormente cuando la cantidad que interviene en el problema varía en el tiempo o es dividida en partes que se relacionan entre sí.

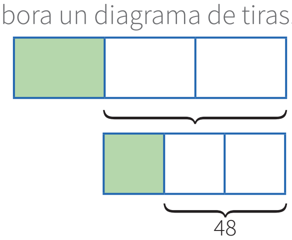
Ejemplo:

La tercera parte de las entradas para el estreno de una película se vendieron días antes de la función, y 1/3 del resto se vendió el día del estreno. Finalmente, quedaron 48 entradas sin vender. ¿Cuál era el número total de entradas previsto para la función de estreno?

Solución:

Cantidad: Número total de entradas.

Elabora un diagrama de tiras.



Diagramas tabulares (tablas)

Se emplean cuando se brinda información sobre características que relacionan dos grupos. También en problemas sobre edades o de proporcionalidad, en los que se debe buscar algún patrón o regla de formación.

Ejemplo:

Dos amigos tienen lápices, borradores y tajadores en sus cartucheras. Hay 8 borradores en total. Mónica tiene el doble de lápices que Felipe, quien tiene 5 tajadores más que lápices. Mónica tiene tantos tajadores como lápices posee Felipe. Mónica tiene 18 útiles y ningún borrador. ¿Cuántos lápices, tajadores y borradores tiene cada uno?

Solución:

Grupo 1: Mónica, Felipe.

Grupo 2: Lápices, borradores, tajadores.

	Lápices	Borradores	Tajadores	TOTAL
Mónica	$2x$	0	x	18
Felipe	x	8	$x+5$	
TOTAL		8		

Diagramas analógicos

Se suelen utilizar en problemas geométricos. Son dibujos que representan la realidad de manera similar, pero esquemática, sin considerar los elementos irrelevantes para el problema.

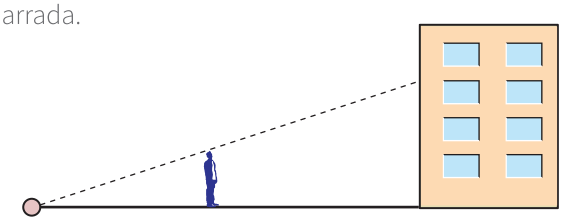
Mediante esta representación es posible visualizar las relaciones entre los datos y las incógnitas.

Ejemplo:

Un hombre de 1,8 m de estatura camina hacia un edificio a razón de 1,5 m/s. Si hay una lámpara sobre el suelo a 15 m del edificio, ¿cuánto mide la sombra del hombre sobre el edificio cuando se encuentra a 9 m de este?

Resolución:

Hagamos un diagrama que represente la situación narrada.



Diagramas de flujo

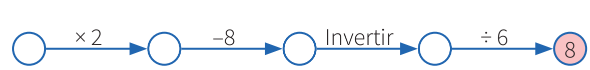
Se emplean cuando una cantidad varía a lo largo de la historia o si tenemos la situación final de esta cantidad. También cuando se dan secuencias de pasos para encontrar objetos matemáticos, entre otras aplicaciones.

Ejemplo:

Un número se duplica, luego se le resta 8 y después se invierten las cifras de este número. Finalmente, se divide por 6 y se obtiene 8. ¿Cuál era el número?

Resolución:

Haremos un diagrama que indique las fases por las que pasó el número.



Diagramas conjuntistas

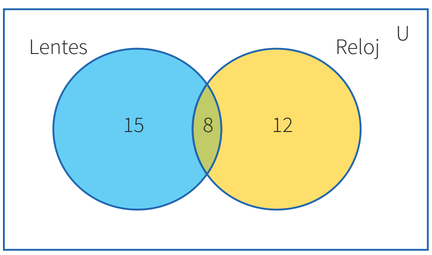
Se suele recurrir a estos cuando se trata de información acerca de dos o más grupos cuyos elementos pueden pertenecer a más de un conjunto. También cuando se deben realizar clasificaciones. Los más conocidos son los diagramas de Venn y los de Carroll.

Ejemplo:

De los 35 estudiantes de un aula, 23 usan lentes y 20, reloj. ¿Cuántos usan ambas cosas?

Resolución:

Grupo 1: Estudiantes que usan lentes.
Grupo 2: Estudiantes que usan reloj.



Diagramas cartesianos

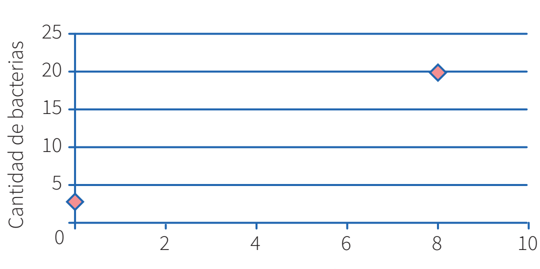
Son de gran utilidad cuando se requiere representar funciones o si tenemos pares ordenados o relaciones entre dos variables.

Ejemplo:

El crecimiento de un grupo de bacterias se da con el paso de los días de manera constante. Al inicio, había 3 bacterias, y después de 8 días llegan a 20. ¿Cuántos días transcurrirán desde el inicio para que la colonia tenga 400 bacterias?

Resolución:

Cantidad:
Organizaremos los datos en un gráfico cartesiano.
Pares ordenados: (0; 3) (8; 20)



Diagramas lineales

Se usan cuando se cuenta con información acerca de una característica de un solo grupo. Generalmente se emplean para ordenar los elementos del grupo con respecto a esa característica.

Ejemplo:

Si tanto Roberto como Alfredo están más alegres que Tomás, mientras que Alberto se encuentra menos alegre que Roberto, pero más alegre que Alfredo, ¿quién está menos alegre?

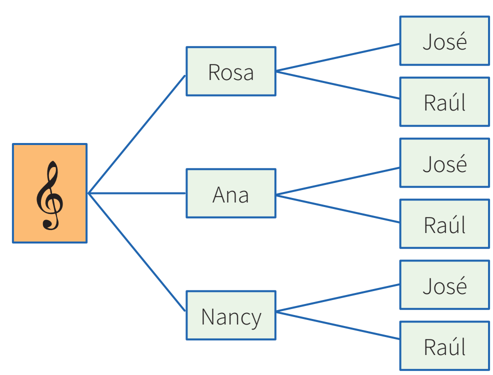
Resolución:

Tomás, Alfredo, Alberto, Roberto.

Diagrama de árbol

Se suelen utilizar en conteos de casos posibles o para hacer listas sistemáticas. Es la representación gráfica de los principios de adición y multiplicación.

Ejemplo: Un productor de cumbia quiere armar un dúo mixto (varón y mujer). Puede elegir entre 3 cantantes mujeres y 2 cantantes varones. ¿Cuántos dúos mixtos diferentes puede formar?



3. Otras estrategias

Busca patrones

En algunos problemas es necesario experimentar con varios casos con el fin de encontrar pautas o regularidades que después se podrán emplear para llegar a la solución.

Ejemplo:

El arreglo mostrado se conoce como el triángulo de Pascal.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

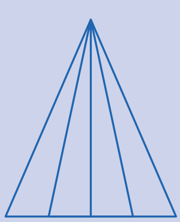
Escribe las tres filas siguientes de este arreglo. Como observas, cada fila empieza por uno. ¿Qué número sigue al 1 en la fila 75?, ¿cuál es la suma de los números que ocupan la fila número veinte?, ¿puedes encontrar un patrón en las diagonales del triángulo de Pascal?

Haz una lista sistemática

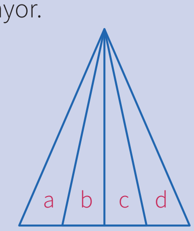
En los casos en que se requiere la enumeración de objetos matemáticos, es conveniente realizar un conteo o listado organizado, con el fin de no dejar de lado ninguna posibilidad. Esta estrategia es muy útil al buscar soluciones en una ecuación polinómica, para encontrar espacios muestrales o resolver problemas de permutaciones o combinaciones.

Ejemplo:

¿Cuántos triángulos hay en la siguiente figura?



Pongamos una etiqueta a cada uno de los cuatro triángulos en que se ha dividido el triángulo mayor.



Resolución:

- Contemos ahora los triángulos identificándolos por el número de letras:

  Triángulos con una letra: a-b-c-d

  Triángulos con dos letras: ab-bc-cd

  Triángulos con tres letras: abc-bcd

  Triángulos con cuatro letras: abcd

- En total tenemos: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ triángulos.

Generaliza

En algunos problemas puede ser muy útil simbolizar las expresiones o averiguar si lo que piden se refiere a un caso particular de alguna propiedad general; a esto se conoce como *la paradoja del inventor*. A veces, es conveniente investigar más de lo que piden.

Ejemplo:

Halla el valor de $(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2$.

Solución:

Se observa que elevar al cuadrado cada número y luego realizar la resta sería demasiado laborioso, así que se trata de ver en la estructura del problema alguna particularidad. Lo primero que se observa es que consiste en una diferencia de cuadrados, lo que nos hace recordar las fórmulas algebraicas pertinentes. Además, se aprecia que los números son consecutivos.

- Al generalizar el problema, se observa que se solicita:

  $(n + 1)^2 - n^2$, cuando n vale 234 756 473

- Factorizando por diferencia de cuadrados, se tiene:

  $$(n + 1 + n)\ (n + 1 - n) = (n + 1) + n$$

- Luego, podemos afirmar que, para cualquier n entero positivo, se cumple:

  $$(n + 1)^2 - n^2 = (n + 1) + n = 2n + 1$$

- Ahora el problema se ha simplificado bastante; para hallar la respuesta, solo basta duplicar el número dado y aumentarle 1.

  Entonces:

  $$(234\,756\,474)^2 - (234\,756\,473)^2 = 469\,512\,947$$

Particulariza

Conviene siempre utilizar casos particulares para familiarizarse con el problema; de este modo, es posible observar algún método que guíe hacia la solución de un problema genérico.

Ejemplo:

En una tienda de remates te ofrecen un descuento del 12 %, pero, al mismo tiempo, debes pagar el impuesto general a las ventas (18 %). ¿Qué preferirías que calculasen primero, el descuento o el impuesto?

Solución:

- Particularicemos para algunos casos: Si el artículo vale S/100 y elijo primero el descuento, termino pagando S/106. Pero si elijo pagar el impuesto antes, entonces termino pagando la misma cantidad.

- Podemos probar con otros precios y obtener un resultado análogo. Esta experimentación me da pie para inferir que es lo mismo elegir primero el descuento o el impuesto.
- Ahora deberé evaluar mi conjetura.

Razona lógicamente

El razonamiento lógico es muy importante al resolver problemas, pues gracias a él podemos engarzar los pasos y comprender las secuencias y cadenas de razonamientos que se producen en el desarrollo de su solución. Un ejemplo clásico es el siguiente acertijo.

Ejemplo:

José, Jaime, Tito y Rosa son guardias en un museo. Ellos hacen guardia cuatro días a la semana. Dos personas solamente hacen guardia cada día. Nadie hace tres días de guardia seguidos. ¿Cuál de los tres hombres no hace guardia con Rosa?

Solución:

- Veamos una lista parcial que muestra los días de la semana en los que cada uno hace guardia:

Dom.	Lun.	Mar.	Miér.	Juev.	Vier.	Sáb.
José	Tito	Rosa	José	Jaime	Tito	Rosa
Jaime						

Empieza por el final

La estrategia de utilizar el pensamiento regresivo se utiliza mayormente en problemas en los cuales tenemos información de una situación final; también para demostrar desigualdades. La combinación de métodos progresivos y regresivos es una potente técnica para demostrar teoremas.

La utilización del razonamiento regresivo nos evitará tener que trabajar con ecuaciones complicadas.

Ejemplo:

El nivel del agua de un pozo desciende 3 centímetros por debajo de su mitad en cada hora, hasta quedar vacío luego de 4 horas. ¿Qué profundidad tenía el agua inicialmente?

Solución:

- "3 cm debajo de su mitad" se interpreta como $\div 2, -3$.
- Esto ocurre en cada hora y se repite 4 veces, ya que todo el suceso ocurre en 4 horas; de modo que al final el nivel es cero (0).
- Las operaciones directas serían así:

  $x \to (\div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3, \div 2, -3) \to 0$
- Ahora, operando al revés, obtenemos: $x = 90$

Plantea una ecuación

Una de las técnicas de modelación por excelencia a nivel elemental es el planteo de ecuaciones. Lo primordial para poderla aplicar con éxito es el entrenamiento que se tenga en la traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico. Es conveniente ponerse de acuerdo en cuanto a convenciones generales de redacción para no crear ambigüedades.

Ejemplo:

Dos velas de la misma longitud se encienden al mismo tiempo. La primera se consume en 4 horas y la segunda, en 3. ¿Cuánto tiempo pasa, después de haberse encendido, hasta que la primera vela tenga el doble de longitud que la segunda?

Solución:

- La primera vela se consume en su cuarta parte cada hora.
- La segunda se consume en su tercera parte cada hora.

  Tiene que verificarse; por tanto:

  $L - (1/4)Lx = 2\,[L - (1/3)Lx]$; simplificando:

  $1 - (1/4)\,x = 2 - (2/3)x$; de donde $x = 2{,}4$ horas
- Es decir, pasan 2 horas 24 minutos.

Establece submetas

Muchas veces, para llegar a la solución de un problema, se deben resolver problemas más pequeños. Es como escalar una gran montaña: se sabe que se debe llegar a alturas menores para conquistar la cima. De igual manera, para resolver un problema original, se necesita de un problema auxiliar que sirva de medio.

Ejemplo:

Supongamos que la población actual del Perú es de 33 millones de habitantes y la tasa de crecimiento es de un 5 % anual. ¿En cuánto tiempo se duplicará la población?

©Shutterstock

Solución:

- La primera meta es hallar una fórmula que modele el comportamiento de la población, y solo después de formada se igualará a 66 millones. Si bien aquí la incógnita es el tiempo, se busca en su lugar la relación entre el tiempo y el número de habitantes.

Utiliza el ensayo y error

Tantear es una estrategia muy útil cuando se hace de forma organizada y evaluando cada vez los ensayos que se realizan. En realidad, algunos métodos específicos de solución, como el de regulación o el de aproximaciones sucesivas, se basan en el uso sistemático de numerosos ensayos y sus respectivas correcciones. La idea es que cada rectificación conduzca a un ensayo que se acerque más a la respuesta.

Ejemplo:

Un libro se abre al azar. El producto de las dos páginas observadas en ese momento es 3192. ¿Cuál es el número de las páginas en las que se abrió el libro?

©Shutterstock

Solución:

- Primero se observa que $50 \times 50 = 2500$, número que no llega; y que $60 \times 60 = 3600$, el cual se pasa. Con esto observamos que los números están en el rango entre 50 y 60.
- 55×56 no puede ser, pues el producto termina en 0. Se quiere que termine en 2 y que los números sean consecutivos.
- Al probar $53 \times 54 = 2862$, el resultado no corresponde.
- Pero, al hacer la prueba con $56 \times 57 = 3192$, se observa que cumple con el resultado que plantea el problema.
- Entonces, las páginas que se observaron fueron la 56 y la 57.

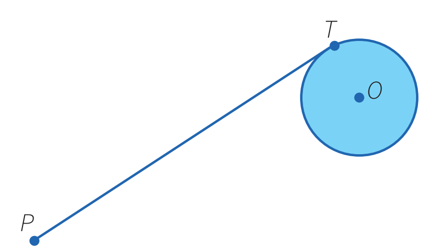
Supón el problema resuelto

Ejemplo:

Usando solo regla y compás construye una tangente a una circunferencia dada, desde un punto exterior a ella.

Solución:

Para resolver este problema, se supone que se debe hallar la tangente a una circunferencia, trazada desde un punto exterior a ella.



- El punto T es de tangencia. Entonces, ¿qué relación existe entre la tangente y algún elemento de la circunferencia? ¿Hay algún teorema que los relacione?
- Existe un teorema que nos dice que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- Por tanto, si unimos O con T, tendremos que OT es perpendicular a PT.
- Además, como tenemos tres puntos involucrados, P, T y O, es posible hacer un triángulo uniendo el punto P con el punto O. Se observa que el triángulo es rectángulo.

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre datos y acciones de comparar e igualar cantidades y las transformamos en expresiones numéricas que incluyen operaciones con descuentos sucesivos; además, seleccionamos, combinamos estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar descuentos sucesivos.

Campaña de grandes ofertas

Dos tiendas, “La Económica” y “Súper Oferta”, lanzan publicidad televisiva con anuncios de ofertas para clientes abonados a sus tarjetas.

Un cliente desea comprar una *tablet*, cuyo precio de lista en ambas tiendas es S/299 y cuenta con las dos tarjetas: *Feliz* y *de la Suerte*.

1. ¿En cuál de las tiendas obtendrá un menor precio por dicha *tablet*?
2. ¿Cuál es el precio que pagaría?
3. ¿A qué tanto por ciento equivalen los descuentos sucesivos en “La Económica”?
4. ¿Cuál es el descuento equivalente a los descuentos sucesivos en “Súper Oferta”?

Comprendemos el problema

1. ¿Cuáles son los datos que se tienen en la situación?

2. ¿Qué te solicitan determinar en la situación?

3. ¿Qué significa la oferta del 40 % + 30 % con la tarjeta *Feliz*?

4. ¿Significan lo mismo los descuentos de 40 % + 30 % y 50 % + 20 %? Justifica tu respuesta.

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. Explica el procedimiento que seguirías para responder las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Calcula el descuento que otorga “La Económica” y el precio con descuento.

2. Halla el descuento en la tienda “Súper Oferta” y el precio de venta.

3. Responde las dos primeras preguntas de la situación.

4. Determina a qué tanto por ciento equivalen los descuentos sucesivos en "La Económica". Responde la tercera pregunta de la situación.

5. De manera similar, procede con tus cálculos para responder la cuarta pregunta de la situación.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. Después de lo desarrollado, ¿qué estrategia o procedimiento consideraste importante para responder a la pregunta de la situación?

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito: Expresamos con diversas representaciones y lenguaje numérico la comprensión sobre las operaciones con descuentos porcentuales usando redondeos o aproximaciones y empleamos este entendimiento para interpretar las condiciones de un problema en su contexto. Además, planteamos afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con descuentos porcentuales.

Situación A

En el siguiente cuadro, se aprecian los símbolos de las figuras musicales y su tiempo de duración expresado en segundos.

Nombre	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Blanca
Símbolo	𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯	𝅗𝅥.
Duración (s)	100 % de 1 s	50 % de 1 s	25 % de 1 s	12,5 % de 1 s	6,25 % de 1 s	50 % + 25 %

Además, los puntillos de prolongación, colocados al lado derecho de una figura, son signos musicales que se utilizan para aumentar la duración de una figura en el 50 % de su valor. Según la información proporcionada, completa el siguiente cuadro:

Nombre	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Blanca
Símbolo	𝅝.	𝅗𝅥.	♩.	♪.	𝅘𝅥𝅯.	𝅗𝅥.
Duración (s)						

Resolución

Considerando que nos han proporcionado la duración en segundos de cada figura musical y que, además, los puntillos de prolongación incrementan la duración de la figura musical respectiva en un 50 %, emplearemos esta información para completar el cuadro.

Nota musical	Duración (s)
Redonda.	100 % + 50 % = 150 %
Negra.	25 % + 12,5 % = 37,5 %
Blanca.	50 % + 25 % = 75 %
Corchea.	12,5 % + 6,25 % = 18,75 %
Negra.	25 % + 12,5 % = 37,5 %

1. ¿Qué utilidad tuvo la primera tabla en la resolución del problema?

2. Describe el procedimiento que se siguió para completar la segunda tabla.

3. ¿Qué diferencia presenta la forma de aplicar el tanto por ciento con respecto a la situación?

Situación B

Carla observa en una tienda la promoción de "2 × 1" en juegos de sábanas. Asimismo, advierte que si tiene la tarjeta de esta tienda, hay un descuento adicional del 20 %. Sabiendo que el precio de lista del juego de sábanas es 129 soles, ¿cuánto pagará Carla por 8 juegos de sábanas?


©Shutterstock

Resolución

- Como no sabemos si Carla tiene la tarjeta de la tienda, empezaremos a calcular el precio sin descuento. Ya que va a comprar 8 juegos, entonces comprará: $\frac{8}{2} = 4$ promociones.
- Como 2 juegos cuestan 129 soles, entonces Carla pagará por 4 juegos: 4 × 129 = S/516.
- Si pagase con la tarjeta de la tienda, le descontarían el 20 % de 516, es decir, 0,2 × 516 = S/103,20.
- Con el descuento pagaría: 516 – 103,20 = S/412,80.

Respuesta: Podría pagar S/516 o S/412,80.

1. ¿La información proporcionada permite dar un solo valor como respuesta? ¿Por qué?

2. Describe otro procedimiento que te permita dar respuesta a la situación.

Situación C

Diego y Sonia planean comprar un departamento mediante el Programa "Mi Vivienda". El precio del departamento es S/182 003. Al momento de concretar la compra, depositan el 30 % como cuota inicial, por lo cual se les descuenta el bono del buen pagador equivalente a S/17 000. Diego cree que pueden cancelar el saldo por medio de un crédito hipotecario en 10 años con una tasa de interés simple del 1,5 % mensual. ¿Qué porcentaje representa el precio final del departamento respecto al precio inicial?

Aprendemos a partir del error

Resolución

- Precio del departamento: S/182 003
- Cálculo de la cuota inicial:

  30 % × 182 003 = 0,3 × 182 003 = S/54 600,90
- El precio con bono de descuento sería:

  182 003 – 54 600,90 = S/127 402,10
- Para hallar los intereses, debemos expresar el tiempo en meses: 10 × 12 = 120 meses.
- La tasa de interés es: 1,5 % = 0,015
- Calculamos el interés:

  127 402,10 × 120 × 0,015 = S/229 323,78
- Entonces, el valor del préstamo hipotecario sería:

  127 342,10 + 229 323,78 – 17 000 = S/339 665,88
- Luego, el precio final del departamento sería:

  54 600,10 + 339 665,88 + 17 000 = S/411 265,98

  Por regla de tres simple:

  S/182 003 — 100 %

  S/411 265,98 — x

  $$x = \frac{411\,265{,}98 \cdot 100\ \%}{182\,003} = 225{,}97\ \%$$

Respuesta: El precio final representa el 225,97 % del precio inicial.

1. ¿El procedimiento es correcto? ¿Por qué?

2. En el caso de que hubiera error, ¿cuál sería el procedimiento correcto?

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre datos y acciones de comparar e igualar cantidades y las transformamos en expresiones numéricas que incluyen operaciones con descuentos sucesivos; además, seleccionamos, combinamos estrategias de cálculo y procedimientos diversos para realizar descuentos sucesivos. También expresamos con diversas representaciones y lenguaje numérico la comprensión sobre las operaciones con descuentos porcentuales usando redondeos o aproximaciones y empleamos este entendimiento para interpretar las condiciones de un problema en su contexto. Asimismo, planteamos afirmaciones sobre las propiedades de las operaciones con descuentos porcentuales.

Una tienda vende estos celulares:

Para incentivar la compra de estos productos, el establecimiento realiza la siguiente promoción:

Equipo	1	2	3
Descuento	20 %	30 %	15 %

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4.

1. Para promocionar el EQUIPO 1, lo ofrecen al precio de lista del EQUIPO 3. ¿Qué porcentaje descuentan al precio de lista del EQUIPO 1?

a) 20 % b) 4 % c) 40 % d) 4,2 %

2. Por efectos de la inflación, el EQUIPO 1 incrementa su precio de lista hasta costar tanto como el precio actual del EQUIPO 2. ¿En qué porcentaje se incrementó el precio de lista del EQUIPO 1?

a) 10,1 % b) 11 % c) 10 % d) 1 %

3. Si esta semana todos los productos de la tienda sufrieron un incremento del 5 % en su precio de lista, ¿qué expresión representa el precio que se debe pagar por el EQUIPO 3 esta semana?

a) $480 + 480\left(\frac{5}{100}\right) - 480\left(\frac{105}{100}\right)\left(\frac{15}{100}\right)$

b) $480 + 480\left(\frac{5}{100}\right) - 480\left(\frac{95}{100}\right)\left(\frac{15}{100}\right)$

c) $480 + 480\left(\frac{0,5}{100}\right) - 480\left(\frac{100,5}{3}\right)\left(\frac{3}{100}\right)$

d) $480 + 480\left(\frac{3}{100}\right) - 480\left(\frac{97}{100}\right)\left(\frac{50}{100}\right)$

4. Si el precio de lista del EQUIPO 1 sufre un incremento del 10 % y luego un descuento del 15 %, ¿a qué precio se estará vendiendo este celular?

La octava edición de Mistura convocó a casi 400 000 visitantes durante los 10 días de la feria. La cifra significó un 20 % más de comensales que el 2014, donde se contabilizó un total de 321 000 *tickets* vendidos. Asimismo, fueron más de 390 los puestos que participaron en el evento gastronómico más grande e importante de América Latina.

Con la información dada, responde las preguntas 5; 6 y 7.

5. Haciendo el recuento oficial de *tickets* vendidos en la feria Mistura 2015, se obtiene que se vendieron 405 000. ¿Cuál fue el porcentaje aproximado de incremento de los *tickets* vendidos entre el 2014 y el 2015?

a) 20 % b) 26 % c) 21 % d) 8,4 %

6. Si en el 2016 se produjo un incremento del 1 % en los *tickets* vendidos (considera que en el 2015 se vendieron 405 000), ¿en cuánto varía la cantidad de *tickets* vendidos entre el 2014 y el 2016?

a) 30,48 % b) 29,71 % c) 25,34 % d) 27,43 %

7. Pierina afirma que, si en el 2014 se vendieron 321 000 *tickets* de entrada y en el 2015 se vendieron 400 000, no sería cierto que se ha incrementado la concurrencia a Mistura en un 20 %, sino en un 24,6 %. Según ella, la aproximación hecha por el medio es inexacta, ya que estaría dejando de considerar 14 766 *tickets* vendidos. ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Pierina? Justifica tu respuesta.

8. Un agricultor posee 180 hectáreas de tierras de cultivo. Decide plantar papas en el 20 % del terreno; 0,25 del terreno con maíz; 35,5 % con zanahorias, y el resto con tomates. ¿Cuántas hectáreas destina para cultivar tomates?

a) 63,9 hectáreas b) 144,9 hectáreas c) 35,1 hectáreas d) 40,5 hectáreas

9. José, Ana y Pedro son tres hermanos que reciben de sus padres una herencia de 199 000 soles, la cual deben repartirse considerando sus edades: 10, 18 y 22 años. El mayor opina que, como él ya está trabajando gracias a la profesión que le costearon sus padres, el hermano menor es el que más necesitará de la herencia. Por ello, propone realizar un reparto inversamente proporcional a sus edades. Ana, quien se encuentra estudiando su carrera, está de acuerdo. ¿Qué porcentaje del total le corresponde a cada uno? ¿Cuál es la diferencia porcentual entre el hermano mayor y el menor?

a) 49,8 %; 27,6 %; 22,6 % y 27,2 %

c) 45,6 %; 28,5 %; 25,9 % y 19,7 %

b) 52,8 %; 32,2 %; 15 % y 37,8 %

d) 49 %; 28 %; 23 % y 26 %

10. Rocío paga S/94,50 soles por un par de zapatos. Sabiendo que este precio es producto de dos descuentos sucesivos del 10 % y 30 %, ¿qué precio tenía el par de zapatos originalmente? ¿Cuál sería el descuento único?

Ficha
2

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos y transformamos estas relaciones a expresiones algebraicas que incluyen ecuaciones diofánticas o sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Asimismo, combinamos y adaptamos los procedimientos para dar solución al sistema de ecuaciones.

Consumo de gas natural en el Perú

La utilización del gas natural vehicular (GNV) como combustible disminuye la emisión de gases contaminantes como el monóxido de carbono (CO), los hidrocarburos (HC) y el dióxido de carbono (CO_2), que se emiten con el uso de la gasolina y demás combustibles. De esta manera, la utilización de gas natural contribuye a la reducción de las enfermedades respiratorias y del calentamiento global, mejorando así la calidad medioambiental.

En el Perú, cada día hay más personas que convierten sus vehículos a GNV y actualmente alrededor de 330 000 peruanos utilizan este combustible, como es el caso de Laura. Ella, al abastecerse en un grifo de la ciudad de Lima, pidió que completaran el tanque de su auto con GNV y, al mirar la pantalla del surtidor, se dio cuenta de que la venta total por consumo fue de 19 soles. Laura pagó con un billete de 100 soles, pero el grifero se percató de que solo contaba con monedas de 2 y 5 soles.

1. ¿De cuántas formas diferentes el grifero puede dar el vuelto a Laura?
2. ¿Qué dato le agregarías a la situación para que el grifero solo tenga una forma posible de dar el vuelto a Laura? ¿Cuál sería la representación algebraica del nuevo dato?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué datos se presentan en la situación?

2. ¿Qué piden hallar las preguntas de la situación?

3. ¿Tienes información suficiente para responder la primera pregunta de la situación? Explica.

4. ¿Puedes plantear el problema con tus propias palabras?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategia te ayudará a responder las preguntas de la situación? Argumenta tu respuesta.

   a) Diagrama de flujo **b)** Plantear una ecuación **c)** Utilizar el ensayo y error

2. Describe el procedimiento que realizarías para dar respuesta a las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Aplica la estrategia elegida y responde la primera pregunta de la situación.

2. ¿Qué dato agregarías a la situación para que solo haya una forma posible de dar el vuelto?

3. Escribe la representación algebraica del nuevo dato y responde la segunda pregunta de la situación.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cómo generalizarías tu solución de la primera pregunta de la situación?

2. Describe otro procedimiento algebraico que puedes emplear para dar respuesta a las preguntas de la situación.

3. Verifica de manera gráfica la solución de la segunda pregunta de la situación.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito: Expresamos con lenguaje matemático y expresiones algebraicas nuestra comprensión de las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, para interpretar un problema en su contexto, estableciendo relaciones entre dichas representaciones. Asimismo, planteamos afirmaciones y las justificamos con ejemplos; además, corregimos errores si los hubiera.

Situación A

La tienda de discos

"El palacio de los discos" recaudó en una semana 1415 soles por la venta de discos compactos de reguetón y rock. El precio de los CD de reguetón es S/40 y el de los de rock, S/45. Al momento de contabilizar la venta de la semana, la computadora se malogró y se perdió toda la información. La persona encargada solo recuerda que se vendieron 33 discos. Si fueras el encargado de contabilizar las ventas de la semana, ¿cuántos CD de cada género informarías que se vendieron? Grafica en el plano cartesiano.

Resolución

- Datos

  x: número de CD de reguetón

  y: número de CD de rock

  Importe en CD de reguetón: $40x$

  Importe en CD de rock: $45y$

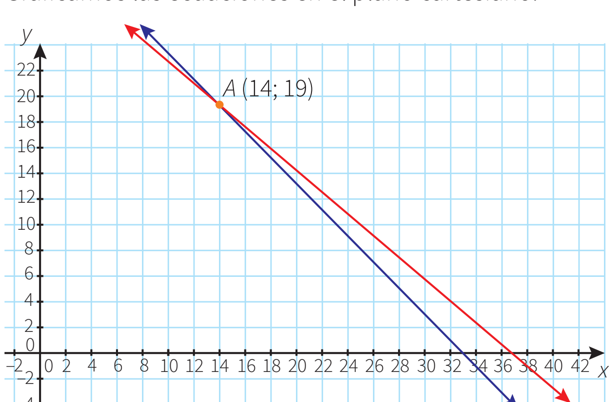
- Planteamos las ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 33 \text{.................} & (1) \\ 40x + 45y = 1415 \text{.........} & (2) \end{cases}$

- Multiplicamos la ecuación (1) por –40:

  $\begin{cases} -40x - 40y = -1320 \\ 40x + 45y = 1415 \end{cases}$

- Reduciendo: $5y = 95 \longrightarrow y = 19$
- Reemplazamos en la ecuación (1): $x + 19 = 33 \longrightarrow x = 14$

Graficamos las ecuaciones en el plano cartesiano:



Respuesta:

Se vendieron 14 CD de reguetón y 19 de rock.

1. ¿Qué estrategia se utilizó para resolver la situación?

2. ¿En qué consistió el método para resolver el sistema de ecuaciones? ¿Cómo se denomina?

3. ¿Qué significan los puntos de cada recta? ¿Cómo interpretas el punto de intersección de ambas rectas?

Situación B

Un técnico laboratorista requiere preparar 100 ml de solución azucarada al 50 % utilizando soluciones al 35 % y 60 %. ¿Qué cantidad de cada una de estas soluciones deberán mezclarse para obtener la concentración deseada?

Resolución

- Organizamos los datos en una tabla:

	Solución al 35 %	Solución al 60 %	Se desea obtener al 50 %
Volumen	x	y	100 ml
Concentración	0,35	0,60	0,50

- Planteamos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 100 \text{ ....(1)} \\ 0{,}35x + 0{,}60y = 0{,}50(100) \text{......(2)} \end{cases}$$

- Multiplicamos la ecuación (1) por (–0,35):

$$\begin{cases} -0{,}35x - 0{,}35y = -35 \\ 0{,}35x + 0{,}60y = 50 \end{cases}$$

- Reducimos y obtenemos: $0{,}25y = 15$, entonces $y = 60$
- Reemplazamos en la ecuación (1): $x + 60 = 100$, entonces $x = 40$

Respuesta: Se necesita mezclar 40 ml de la solución al 35 % y 60 ml de la solución al 60 %.

1. ¿Qué estrategia ayudó a plantear el sistema de ecuaciones?

2. Representa de manera sencilla la ecuación: $0{,}35x + 0{,}60y = 0{,}50(100) = 50$

Situación C

Daniela y sus amigas pagaron 72 soles por 4 sándwiches de pollo y 8 refrescos de chicha morada en una cafetería ubicada en el parque de Miraflores; pero la semana anterior consumieron 2 sándwiches de pollo y 2 refrescos de chicha morada en el mismo lugar, y la cuenta fue de 26 soles. ¿Cuál es el costo del sándwich y del refresco?

Aprendemos a partir del error

Resolución

- Datos:

  x: precio de un sándwich

  y: precio de un vaso de chicha morada

  La segunda vez pagaron: $4x + 8y = 72$.............(1)

  La semana anterior pagaron: $2x + 2y = 26$ .... (2)
- Conformamos el sistema de ecuaciones lineales:

  $$\begin{cases} 4x + 8y = 72 \text{.... (1)} \\ 2x + 2y = 26 \text{.... (2)} \end{cases}$$
- Aplicamos el método de reducción, multiplicando la ecuación (2) por (–2):

  $$\begin{cases} 4x + 8y = 72 \\ -4x - 4y = -26 \end{cases}$$
- Reduciendo obtenemos: $4y = 46$, de donde $y = 11{,}5$
- Reemplazamos en la ecuación (2):

  $2x + 2\ (11{,}5) = 26$, obtenemos el valor de $x = 1{,}5$

Respuesta:

Cada sándwich costó S/1,50 y el vaso de chicha, S/11,50.

1. Analiza las respuestas. ¿Estos costos los podemos encontrar por separado en lugares diferentes? ¿Es usual que el precio del sándwich sea mucho menor que el del vaso de chicha?

2. Utiliza otro método de resolución del sistema de ecuaciones para verificar la respuesta. Si no coincide, corrige.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos, transformamos estas relaciones en expresiones algebraicas que incluyen ecuaciones diofánticas o sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y expresamos con lenguaje algebraico nuestra comprensión sobre las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Asimismo, combinamos y adaptamos los procedimientos para dar solución al sistema de ecuaciones lineales y planteamos afirmaciones que justificamos con ejemplos y conocimientos, corrigiendo errores si los hubiera.

1. El director de una institución educativa organizó un proyecto de presentación teatral con sus estudiantes de quinto grado, con la finalidad de reunir fondos y terminar de construir el comedor estudiantil, por lo cual recibió el apoyo de los padres de familia y el de la Municipalidad, que le brindó gratuitamente su anfiteatro.

El costo de las entradas fue de 30 soles para los adultos y 20 soles para los niños. Si el sábado pasado asistieron 248 personas y se reunieron 5930 soles, ¿cuántos adultos y cuántos niños respectivamente asistieron a esa función?

a) 151 adultos y 97 niños

b) 124 adultos y 124 niños

c) 97 adultos y 151 niños

d) 69 adultos y 179 niños

2. Escribe verdadero (V) o falso (F), según corresponda, en cada una de las siguientes proposiciones.

I. Cuando dos rectas se cortan en un punto, es totalmente seguro que encontramos una solución al sistema de ecuaciones, al cual se denomina *sistema compatible determinado*. ( )

II. Cuando dos rectas son paralelas en un plano, se encuentran infinitas soluciones al sistema lineal, al cual se denomina *sistema indeterminado*. ( )

III. En un sistema de ecuaciones lineales, cuando hay más variables que ecuaciones, existe más de una solución. ( )

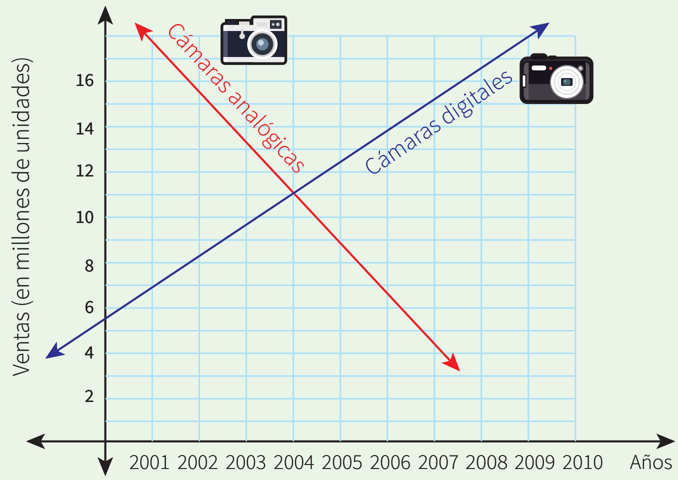
a) V V V

b) V F V

c) F F F

d) F V F

El siguiente gráfico muestra cómo han ido bajando las ventas de cámaras analógicas desde que aparecieron las cámaras digitales en el mundo.



Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. En el periodo 2000 a 2010, ¿en qué años las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas? ¿A partir de qué año las ventas de cámaras digitales superaron a las de cámaras analógicas?

a) Del 2000 al 2003, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas y, a partir del 2006, las ventas de cámaras digitales superaron a las de cámaras analógicas.

b) A partir del 2005, se vendieron más cámaras digitales y, entre el 2000 y 2008, las ventas de cámaras analógicas superaron a las de cámaras digitales.

c) Del 2000 al 2003, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas y, a partir del 2004, las ventas de cámaras digitales superaron a las de cámaras analógicas.

d) Del 2000 al 2002, las ventas de cámaras digitales fueron menores que las de cámaras analógicas y, a partir del 2003, las ventas de cámaras digitales fueron superiores.

4. Estima en qué año las ventas de los dos tipos de cámaras fueron iguales y la cantidad de cámaras que, aproximadamente, se vendieron.

5. Un comerciante de algodones de azúcar gana 40 céntimos por cada algodón vendido, pero si no logra venderlo pierde 50 céntimos. Un día en que preparó 120 algodones, obtuvo una ganancia de 39 soles. ¿Cuántos algodones no logró vender ese día?

a) 10 algodones b) 7 algodones c) 9 algodones d) 12 algodones

6. En el río Amazonas, un barco recorre 76 kilómetros en 1 hora con la corriente a su favor. De regreso, con la corriente en contra, tarda 4 horas para recorrer la misma distancia. ¿Cuál es la rapidez promedio de la corriente sabiendo que la distancia se calcula con $d = v \cdot t$ (d: distancia, v: rapidez y t: tiempo)?

a) 47,5 km/h b) 28,5 km/h c) 57 km/h d) 19 km/h

7. Sergio contrató dos camiones cuyas capacidades de carga son, respectivamente, 3 y 4 toneladas, los cuales hicieron en total 23 viajes para transportar 80 toneladas de varillas de fierro de construcción. Él necesita saber cuántos viajes realizó cada camión para adicionar los gastos por combustible.

Juan y Natalia, estudiantes de quinto grado de secundaria, preparan paletas de chocolate con el fin de venderlas y así juntar dinero para su viaje de promoción. La materia prima necesaria para hacer una paleta grande les cuesta 3 soles y, para una paleta chica, 2 soles. Ellos invierten en su proyecto la suma de 50 soles.

Con la información dada, responde las preguntas 8 y 9.

8. ¿Qué dato le adicionarías a esta situación para que la cantidad de paletas grandes sea igual a la cantidad de paletas chicas? ¿Cuántas paletas serán de cada tamaño?

a) Adicionar el dato: "Se hicieron un total de 20 paletas"; 10 de cada tamaño.

b) Adicionar el dato: "Se hicieron un total de 24 paletas"; 12 de cada tamaño.

c) Adicionar el dato: "Se hicieron un total de 22 paletas"; 11 de cada tamaño.

d) Adicionar el dato: "Se hicieron un total de 18 paletas"; 9 de cada tamaño.

9. Si las paletas chicas se vendieran más, ¿qué dato faltaría para afirmar que se ha preparado la mayor cantidad de paletas chicas? ¿Cuántas paletas serán de cada tamaño?

a) Faltaría el dato: "Se hicieron un total de 23 paletas"; 4 grandes y 19 chicas.

b) Faltaría el dato: "Se hicieron un total de 24 paletas"; 2 grandes y 22 chicas.

c) Faltaría el dato: "Se hicieron un total de 22 paletas"; 6 grandes y 16 chicas.

d) Faltaría el dato: "Se hicieron un total de 21 paletas"; 8 grandes y 13 chicas.

10. Un empresario textil de Gamarra desea distribuir un bono de productividad entre sus empleados por su buen desempeño en la semana. Haciendo cálculos, se percata de que si entregara a cada uno 800 soles, le sobrarían 200, y si les diera 900 soles, le faltarían 400. ¿Cuántos empleados hay en su fábrica? ¿Cuánto dinero tiene para repartir? ¿Cómo resolverías el problema sin usar ecuaciones?

Ficha
3

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Leemos textos o gráficos que describen las propiedades de los cuerpos de revolución, compuestos y truncados, y establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. Asimismo, empleamos diversas estrategias para determinar la longitud, el área y el volumen de cuerpos geométricos y de revolución.

Un elemento de seguridad en la señalización vial

Los conos de seguridad son de color anaranjado y deben ser reflectantes o equiparse con dispositivos luminosos para que sean vistos en las noches. Se usan en la señalización vial y representan un elemento de seguridad para transeúntes o conductores. Sirven en la indicación de desvíos, pozos y obras en caminos, calles y carreteras, para lo cual deben tener como mínimo una altura de 47,5 cm. Pueden fabricarse de diversos materiales, como goma, plástico, PVC, que permitan soportar el impacto sin que dañen los vehículos. Los conos de mayor tamaño se emplean cuando el volumen de tránsito, la velocidad u otros factores lo requieren.

La Municipalidad ha adquirido conos de seguridad de 48 cm de altura, cuyos diámetros de las bases mayor y menor son de 36 cm y 8 cm, respectivamente. Para el desvío del tránsito por las noches, deben tener una banda reflectante de 10 cm de ancho, aproximadamente.

1. Si la banda reflectante de un cono de seguridad adquirido por la Municipalidad se encuentra a 12 cm del diámetro menor, ¿cuál es la superficie cubierta por la banda reflectante?
2. ¿Qué volumen posee el cono de seguridad?

Comprendemos el problema

1. ¿Qué diferencia encuentras entre un cono y el cono de seguridad utilizado para la señalización vial? ¿Qué forma tienen los llamados conos de seguridad?

2. Escribe los datos presentados en la situación.

3. ¿Qué te piden hallar las preguntas de la situación?

4. Los datos obtenidos de la situación inicial, ¿te permiten responder las preguntas planteadas? ¿Será necesario calcular otros valores?

5. ¿Qué debes saber para responder las preguntas planteadas en la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. Describe el procedimiento que realizarías para dar respuesta a las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Representa gráficamente un cono de seguridad y ubica los datos presentados en la situación.

2. Utiliza la notación pertinente para los datos ubicados en el gráfico.

3. Observa el gráfico e identifica las incógnitas y las propiedades que se van a aplicar para conocer sus valores.

4. Aplica las propiedades relacionadas con las incógnitas y responde la primera pregunta planteada.

5. Selecciona los datos necesarios para dar respuesta a la segunda pregunta.

6. Aplica las propiedades relacionadas con las incógnitas y responde la segunda pregunta planteada.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. Si el ancho de la banda que se encuentra a 10 cm del radio menor del cono de seguridad aumenta, ¿el área lateral de la banda aumenta o disminuye? ¿Por qué?

2. ¿La estrategia empleada facilitó responder las preguntas planteadas en la situación? Justifica tu respuesta.

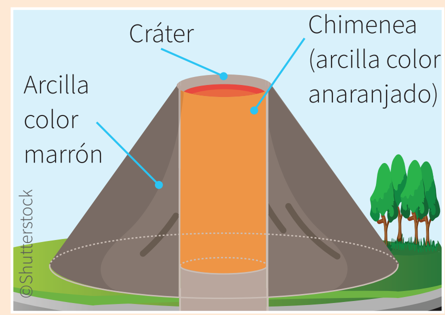
Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito: Empleamos diversas estrategias para determinar la longitud, el área y el volumen de cuerpos de revolución. Asimismo, adaptamos procedimientos para describir las diferentes vistas de una forma tridimensional compuesta (frente, perfil y superior); además, planteamos afirmaciones sobre las relaciones y propiedades que descubrimos entre los objetos y formas geométricas.

Situación A

Los estudiantes de quinto grado realizaron un proyecto de investigación sobre un volcán de su región y representaron sus medidas en una maqueta a escala de 1:2000. Para ello, tomaron en cuenta la siguiente información: el diámetro del cráter es 840 m; el diámetro de la base del volcán, 1800 m, y el ángulo de inclinación de la ladera del volcán, 37°.

Para el tronco de cono, utilizaron arcilla de color marrón; para la chimenea, la cual tiene forma de cilindro, emplearon arcilla de color anaranjado, tal como se muestra en la figura. ¿En cuánto excede el volumen de arcilla de color marrón a la arcilla de color anaranjado utilizada?



Resolución

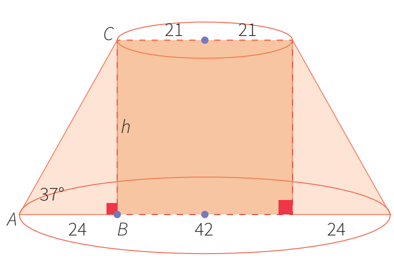
- Utilizando la escala 1:2000, determinamos las medidas para la maqueta.

  Diámetro del cráter: $840 \text{ m} = \dfrac{(840)\ (100)}{2000} = 42 \text{ cm}$

  Diámetro de la base del volcán:

  $1800 \text{ m} = \dfrac{(1800)\ (100)}{2000} = 90 \text{ cm}$

- Hacemos un dibujo de la situación:



- Como el triángulo rectángulo *ABC* es notable, se tiene que $AB = 4k = 24$; $k = 6$.

  Entonces: $BC = 3k = 3(6) = 18 \text{ cm} = h$

  También: $r = 21$ cm; $R = \dfrac{90}{2} = 45$ cm

- Cálculo del volumen de arcilla anaranjada:

  $V = \pi r^2 h = \pi(21)^2(18) = 7938\pi \text{ cm}^3$

- Cálculo del volumen de arcilla marrón:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h[\,R^2 + r^2 + R \cdot r\,] - \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 18[\,45^2 + 21^2 + 45 \cdot 21] - 7938\pi$$

$$V = 20\,466\pi - 7938\pi = 12\,528\pi \text{ cm}^3$$

Respuesta:

El volumen de arcilla de color marrón excede al volumen de arcilla de color anaranjado en

$$12\,528\pi - 7938\pi = 4590\pi \text{ cm}^3$$

1. Si se quisiera hacer un dibujo a escala en una hoja A4, ¿se mantendría la escala o propondrías otra?

2. Describe el procedimiento que se ha utilizado para responder la pregunta de la situación.

3. ¿Qué aspectos semejantes encuentras en relación con las preguntas de la situación de los conos de seguridad?

Situación B

Los estudiantes en el área de EPT elaboraron un portacuchillos con la forma de tronco de cilindro, utilizando un pedazo de madera forrado con una lámina de aluminio, como se muestra en la imagen. Calcula el volumen de madera que se utilizó para elaborar el portacuchillos y el área de lámina de aluminio para forrarlo.

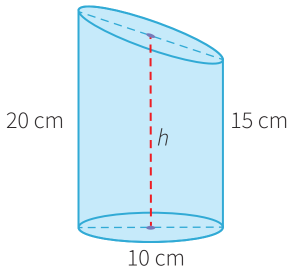
Resolución

- Hacemos un dibujo para visualizar mejor la situación e identificamos los datos de generatriz máxima (G), generatriz mínima (g) y diámetro de la base (D).

$G = 20$ cm

$g = 15$ cm

$D = 10$ cm



- Seleccionamos la fórmula que nos permita calcular el volumen (V) y reemplazamos los datos presentados en la situación.

$$V = \pi R^2 \left(\frac{G+g}{2}\right)$$

$$V = \pi \cdot 5^2 \left(\frac{20+15}{2}\right)$$

$$V = (3{,}14)\,(25)\,(17{,}5)$$

$$V = 1373{,}75 \text{ cm}^3$$

- Reemplazamos los datos obtenidos en la situación y hallamos el área lateral (A_L).

$$A_L = \pi R\,(G+g)$$

$$A_L = (3{,}14)\,(5)\,(20+15)$$

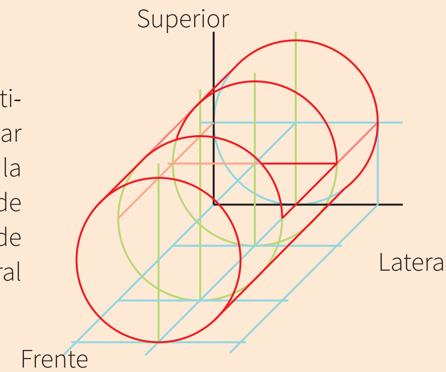
$$A_L = 549{,}5 \text{ cm}^2$$

1. ¿La expresión $\frac{G+g}{2}$ es igual a la h de la figura? ¿Por qué?

2. ¿Qué forma tiene la base oblicua? ¿Qué datos necesitas para calcular su área? Investiga y escribe la fórmula del área de una región elíptica.

Situación C

Desde la educación inicial, los estudiantes somos estimulados con actividades lúdicas, rompecabezas y piezas de madera para encajar, armar casas, carros y otros objetos que permitan desarrollar la imaginación y la creatividad. Un diseñador de estos materiales propuso la elaboración de una nueva pieza, como se muestra en la figura. Representa las vistas de frente (proyección vertical), de superior (proyección horizontal) y lateral (proyección lateral) de esta nueva pieza.

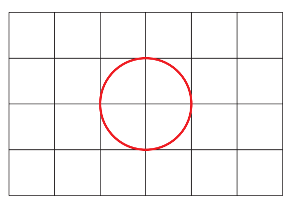


Aprendemos a partir del error

Resolución

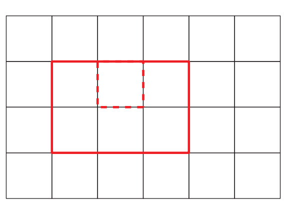
- Observamos de frente el objeto. Si lo viéramos todo en un plano, se vería solo un círculo.

Vista de frente

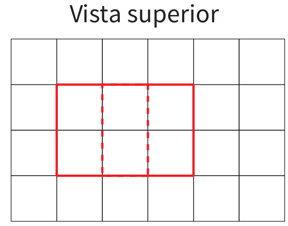


- Para la vista lateral, nos ubicamos a un costado (el derecho). Por último, mirando desde lo alto, obtenemos la vista superior.

Vista lateral



Vista superior



1. ¿Si varias personas vieran solo las representaciones, crees que harían la misma imagen mostrada en la situación? ¿Por qué?

2. Resuelve la situación utilizando otra técnica, para verificar la solución o corregirla.

Evaluamos nuestros aprendizajes

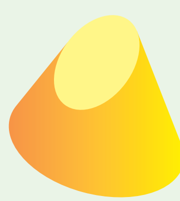
Propósito: Leemos textos o gráficos que describen las propiedades de los cuerpos de revolución, compuestos y truncados, y establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios. También empleamos diversas estrategias para determinar la longitud, el área y el volumen de cuerpos geométricos y de revolución. Asimismo, adaptamos procedimientos para describir las diferentes vistas de una forma tridimensional compuesta (frente, perfil y superior); además, planteamos afirmaciones sobre las relaciones y propiedades de los objetos y las formas geométricas.

1. Relaciona cada sólido con su respectivo desarrollo.

A

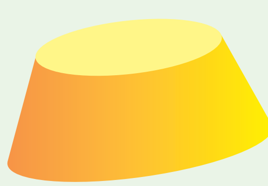
1

B



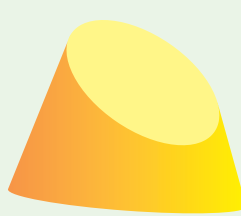
2

C



3

D



4

Después de un partido de fútbol, Andrés se tomó un vaso de chicha que le calmó la sed y lo ayudó a hidratarse.

Al observar el vaso vacío, que tenía una forma cónica, le entró curiosidad por saber la cantidad de chicha que había consumido. Le pidió a su amigo Manuel una regla y midió las dimensiones del vaso: el diámetro del fondo era 4 cm; el de la parte superior, 6 cm y el costado medía 10 cm.

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.

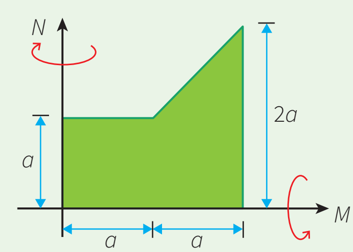
2. ¿Cuál es el área lateral del vaso?

a) 50π cm^2 b) 68π cm^2 c) 80 cm^2 d) 90π cm^2

3. ¿Qué volumen de chicha había bebido Andrés?

a) $187{,}82\pi$ cm^3 b) $124{,}16$ cm^3 c) 63π cm^3 d) 50π cm^3

4. Un mecánico automotriz diseña piezas que permiten la generación y transmisión del movimiento en sistemas automotrices. Para un proyecto nuevo, diseña dos piezas automotrices de acero a partir de la rotación de la región del plano coloreado de verde, primero alrededor del eje *M* y luego alrededor de *N*, como se muestra en la figura. Representa los sólidos de revolución al rotar en cada uno de sus ejes.



5. Una banda de músicos ha adquirido tres *ashikos*, tambores de origen africano con forma de cono truncado, cuyas dimensiones son 40 centímetros de alto por 26 centímetros de diámetro superior y 8 centímetros de diámetro en la boca inferior. ¿Cuántos centímetros cuadrados de tela serán necesarios para cubrir la parte lateral de los tres *ashikos*? (Considera $\pi \approx 3{,}14$).

http://pdgood.us/handdrum/pic_ashiko_fienddrummer13.jpg

a) $6565{,}74\ cm^2$ b) $6405{,}60\ cm^2$ c) $2188{,}58\ cm^2$ d) $248{,}06\ cm^2$

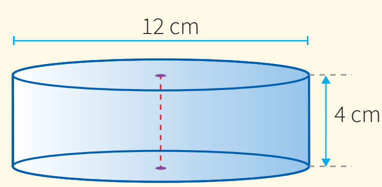
6. Los dueños de una fábrica de mermelada promocionan su producto en nuevos tamaños de recipientes con etiquetas novedosas. ¿Cuál de los dos tiene mayor volumen?

a) Envase 1 cuyo volumen es $144\pi\ cm^3$

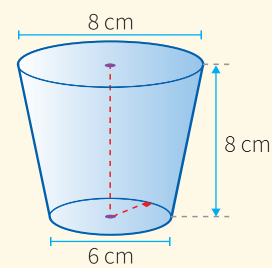
b) Envase 2 cuyo volumen es $296\pi\ cm^3$

c) Envase 1 cuyo volumen es $48\pi\ cm^3$

d) Envase 2 cuyo volumen es $98{,}67\pi\ cm^3$



Envase 1

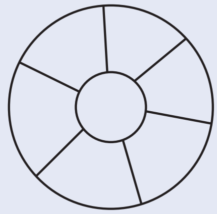


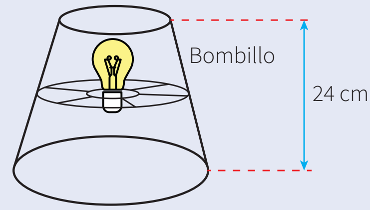
Envase 2

7. Se tienen 30 macetas en forma de tronco de cono. Los radios de las bases de estas macetas miden 9 cm y 27 cm, respectivamente, y su generatriz, 30 cm. Si se llenaran las ⅔ partes de la generatriz de la maceta con gel para hidroponía, ¿cuántas bolsas de 5 litros de gel serían necesarias para habilitar todas las macetas?

Los estudiantes de la I. E. Miguel Grau en el área de Educación para el Trabajo elaboran lámparas en forma de cono truncado con papel reciclado, colocando un armazón de alambre como base para el bombillo en la mitad de la altura del cono truncado.

Base para el bombillo





Con la información dada, responde las preguntas 8 y 9.

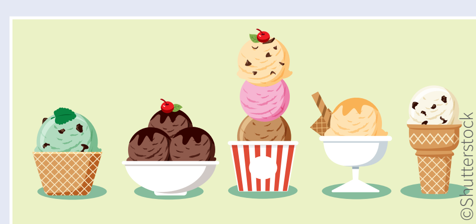
8. ¿Cuántos centímetros cuadrados de papel reciclado se requieren para la confección de la pantalla si se considera una pestaña rectangular de 2 cm en uno de sus extremos y si sus radios miden 8,5 cm y 15,5 cm?

a) $50(12\pi + 1)$ cm^2 b) $24(24\pi + 1)$ cm^2 c) $25(23\pi + 2)$ cm^2 d) 175π cm^2

9. ¿Cuántos centímetros de alambre se requieren para el armazón del bombillo si los radios están en relación de 1 a 6?

a) 28π cm b) 88π cm c) $2(14\pi - 30)$ cm d) $4(7\pi + 15)$ cm

10. En la heladería "Sabores Naturales", los vasos de helado tienen las siguientes medidas: 6 cm de profundidad, 8 cm de diámetro superior y 6 cm de diámetro inferior. Se da el caso de que se colocan dentro del vaso tres porciones de helado de forma esférica, cuyos diámetros miden 6 cm. Si estas porciones de helado se derriten, ¿rebasarán la capacidad del vaso? ¿Por qué?



Ficha
4

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Recopilamos datos de una variable cuantitativa de una muestra pertinente para el objetivo de estudio, adaptando y combinando procedimientos para determinar medidas de tendencia central como la media y medidas de dispersión como el rango, desviación media, desviación estándar y varianza.

Analizamos los resultados de la prueba de Matemática

En muchos ámbitos del quehacer laboral y de la investigación, es frecuente escuchar frases como "la desviación típica del peso de los estudiantes es muy grande" o "la media de las estaturas presenta poca desviación". Estas son medidas estadísticas de dispersión, que se utilizan para tomar decisiones y constituyen importantes fuentes para el análisis de datos y variables. A continuación, veamos un caso.

Los puntajes de una prueba de Matemática que rindió un grupo de diez estudiantes de quinto grado de secundaria se muestran en la siguiente tabla:

N.°	Puntaje
1	14
2	16
3	14
4	12
5	17
6	10
7	16
8	12
9	17
10	17


©Yeseline Martínez

1. El profesor cree que el rango de los puntajes obtenidos en la prueba es muy grande. ¿Cuál es este rango?
2. El profesor del curso ha señalado que, si la desviación media de dicha prueba es mayor que 2, rendirán otro examen. ¿Tomarán otra prueba de Matemática a los estudiantes de quinto? (Se sabe que la media de los datos es 14,5).
3. Al ver la media de la prueba (14,5), el profesor del curso ha señalado que "una varianza de hasta 4,5 indicaría buenos resultados". ¿Cuál es la varianza de los puntajes del examen de Matemática?
4. Con la finalidad de estar seguro de la distribución de los puntajes, el profesor decide que será la desviación estándar la que defina si se toma o no otra prueba. Por ello, ha señalado que "si el doble de la desviación estándar es mayor que 4,5, tomará otro examen".

Comprendemos el problema

1. ¿Cuál es la condición del profesor, con respecto a la desviación media, para que tome otro examen?

2. ¿Cuál es el valor de la media de los datos correspondientes a las pruebas de los diez estudiantes?

3. ¿Cuál es el valor de la varianza que indica buenos resultados en la prueba de Matemática?

4. ¿Qué condición debería tener la desviación estándar para que el profesor tome otro examen?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. Describe el procedimiento a seguir para responder las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Organiza los datos en la tabla de frecuencias, completa la frecuencia absoluta y la frecuencia absoluta acumulada.

Puntajes X_i	f_i	F_i
10	1	1
12		
14		
16		
17		
Total		

2. Determina el rango. En tu opinión, ¿crees que es grande?

3. Calcula la desviación media, luego de completar las columnas correspondientes de la tabla de frecuencias, y responde la segunda pregunta de la situación.

Recuerda que la desviación media (DM), denominada también desviación promedio, mide el promedio de los valores absolutos de las distancias de los datos con respecto a su media. Se calcula con la siguiente fórmula:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n}$$

Donde:

X_i: valor de cada observación

$\bar{x}$: media aritmética de los valores

f_i: frecuencia absoluta

n: número de observaciones

$|X_i - \bar{x}|$: valor absoluto de la diferencia $X_i - \bar{x}$

Puntajes X_i	f_i	F_i	$\lvert X_i - \bar{x}\rvert$	$\lvert X_i - \bar{x}\rvert \cdot f_i$
10	1	1		
12				
14				
16				
17				
Total				

4. Calcula la varianza, luego de completar la tabla con los valores correspondientes.

La varianza (V) es la media de los cuadrados de las diferencias entre el promedio y cada dato. Se calcula con la siguiente fórmula:

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}[(X_i - \overline{x})^2 \cdot f_i]}{n}$$

Puntajes X_i	f_i	F_i	$\lvert X_i - \overline{x} \rvert$	$(X_i - \overline{x})^2$	$(X_i - \overline{x})^2 \cdot f_i$
10	1	1			
12					
14					
16					
17					
Total					

5. A partir del resultado obtenido para la varianza, según lo señalado por el profesor, ¿los resultados de la prueba son buenos? Justifica tu respuesta.

6. Calcula la desviación estándar y responde si el profesor tomará o no otra prueba a sus estudiantes. Recuerda que la desviación estándar (s) expresa el grado de dispersión de los datos con respecto a la media aritmética ($\overline{x}$) de la distribución. Su valor es igual a la raíz cuadrada de la varianza ($s = \sqrt{V}$).

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿El procedimiento elegido fue el más adecuado para responder las preguntas de la situación? Justifica tu respuesta.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito: Expresamos con lenguaje matemático nuestra comprensión sobre la pertinencia de las medidas de tendencia con respecto a la media, en relación con la desviación estándar, desviación media y varianza, planteando y contrastando conclusiones sobre la tendencia de una población, reconociendo errores si los hubiera, así como proponiendo mejoras.

Situación A

La compañía farmacéutica "Mediplús" llevó a cabo un estudio clínico con 20 personas para probar la efectividad del medicamento "Radinul". Este fármaco se ha diseñado para reducir los elevados niveles de colesterol. El estudio se realizó en 12 semanas, en las cuales los participantes ingirieron una pastilla diaria de Radinul. La base de datos obtenida se muestra en la tabla, en la cual se aprecian los niveles de colesterol antes y después del tratamiento.

Código	Nivel de colesterol	
	Antes	Después
1	230	173
2	267	173
3	312	168
4	314	168
5	306	169
6	292	169
7	249	162
8	230	162
9	232	165
10	269	165
11	230	168
12	267	169
13	312	168
14	314	169
15	306	176
16	292	176
17	249	168
18	230	168
19	118	153
20	269	153

Se sabe que las medias del nivel de colesterol antes y después del tratamiento son 264,4 y 167,1, respectivamente.

a. ¿Cuál es el rango del nivel de colesterol antes del tratamiento con Radinul?

b. Con la finalidad de determinar el intervalo que agrupe los datos alrededor de la media antes del tratamiento, los responsables del estudio han decidido utilizar la desviación media (DM). ¿Cuál es el intervalo que agrupa los datos alrededor de la media utilizando la DM?

Resolución

a. Calculamos el rango del nivel de colesterol antes del tratamiento:

El rango es igual a la diferencia del valor máximo menos el valor mínimo.

Valor máximo: 314; valor mínimo: 118

Rango: 314 – 118 = 196

b. Calculamos la desviación media:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \overline{x}| \cdot f_i}{n}$$

Elaboramos la tabla de frecuencias con los datos correspondientes.

Consideramos el valor de la media del nivel de colesterol antes del tratamiento que se muestra en el enunciado de la situación, $\overline{x} = \frac{5281}{20} = 264,4$

Nivel de colesterol antes del tratamiento X_i	f_i	F_i	$\lvert X_i - \overline{x}\rvert \cdot f_i$
118	1	1	146,40
230	4	5	137,60
232	1	6	32,40
249	2	8	30,80
267	2	10	5,20
269	2	12	9,20
292	2	14	55,20
306	2	16	83,20
312	2	18	95,20
314	2	20	99,20
Total	20		Σ = 694,40

Luego de sumar los valores de la última columna (es decir: $\sum_{i=1}^{n} |X_i - \overline{x}| \cdot f_i = 694,40$),

aplicando la fórmula se tiene:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |X_i - \overline{x}| \cdot f_i}{n} = \frac{694,40}{20} = 34,72$$

El intervalo pedido es:

[Media – DM; Media + DM] = [264,4 – 34,72; 264,4 + 34,72] = [229,68; 299,12]

1. Describe el procedimiento realizado para calcular el intervalo que agrupa los datos alrededor de la media antes del tratamiento.

2. ¿Cuál es el nivel de colesterol que tiene la mayor cantidad de personas? ¿Se encuentra dentro del intervalo hallado?

3. ¿Qué crees que ocurra con los valores de las medidas de dispersión después del tratamiento? Argumenta tu respuesta.

4. Plantea dos ventajas del uso de las medidas de dispersión.

Situación B

Una compañía farmacéutica le había solicitado al equipo de investigadores que le informase sobre la tendencia en los niveles de colesterol antes del tratamiento y la variación del nivel después. ¿Cuál fue la respuesta?

Resolución

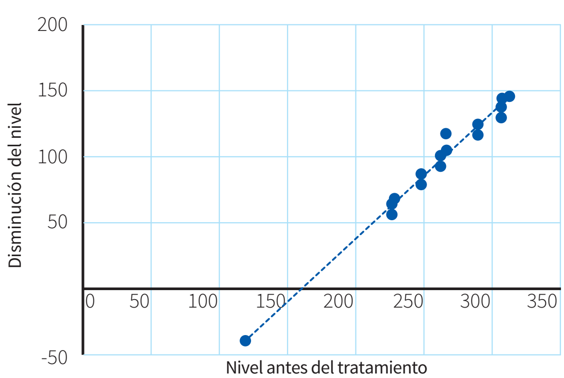
- Hallamos la variación del nivel de colesterol.

Nivel de colesterol antes del tratamiento	118	230	230	230	230	232	249	249	267	267	269	269	292	292	306	306	312	312	314	314
Disminución del nivel por el tratamiento	–35	57	68	62	62	67	87	81	94	98	104	116	123	116	137	130	144	144	146	145

- Hacemos el diagrama de dispersión para establecer la correlación entre las variables: nivel de colesterol antes del tratamiento y la disminución del nivel.

  Para corroborar, puedes ayudarte usando la hoja de cálculo de Excel.

  Para ver la tendencia, trazamos una recta que se ajuste a los datos:



Respuesta: Cuanto más colesterol se tenía antes, este disminuye más. Es decir, el medicamento tiene mayor efecto justamente en los pacientes con colesterol más alto.

1. ¿Cómo se ha hallado la disminución?

2. ¿Cómo es la dispersión de los datos en la recta?

3. ¿Qué información se puede obtener con la recta de tendencia?

Situación C

La tabla muestra la estatura de los jugadores de la selección peruana de fútbol.

Estatura (cm) $[L_i; L_s[$	f_i
[169; 173[	4
[173; 177[	5
[177; 181[	7
[181; 185[	4
[185; 189]	3
Total	23

© ANDINA/Juan Carlos Guzmán

Calcula la desviación estándar y el coeficiente de variación, luego interpreta los resultados.

Aprendemos a partir del error

Resolución

Para calcular la desviación estándar y el coeficiente de variación, agregamos columnas en la tabla de distribución de frecuencias.

Recuerda que el coeficiente de variación (CV) es la medida estadística que indica porcentualmente qué tan separados están los datos en relación con su promedio. Se obtiene al dividir la desviación estándar (s) entre el promedio ($\overline{x}$).

$$CV = \frac{s}{\overline{x}} \cdot 100\ \%$$

Estatura (cm) $[L_i; L_s[$	f_i	X_i	$X_i \cdot f_i$	$(X_i - \overline{x})^2$	$(X_i - \overline{x})^2 \cdot f_i$
[169; 173[	4	171	684	55,5	223,80
[173; 177[	5	175	875	12,11	60,55
[177; 181[	7	179	1253	0,27	1,89
[181; 185[	4	183	732	20,45	81,72
[185; 189]	3	187	561	72,62	217,77
Total	23		4105		585,74

Para completar la tabla, se calculó la media aritmética:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot f_i}{n} = \frac{4105}{23} = 178{,}48$$

La desviación estándar:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{n} = \frac{585{,}74}{23} = 25{,}47$$

El coeficiente de variación:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\ \% = \frac{25{,}47}{178{,}48} \cdot 100\ \% = 0{,}142 \times 100\ \% = 14{,}2\ \%$$

Por lo tanto, la desviación estándar de las edades es 25,47 años, que representa el 14,2 % de desviación respecto a la media.

Si el CV se encuentra entre el 10 % y el 15 %, es decir: 10 % < CV < 15 %, se dice que los datos son regularmente homogéneos.

1. ¿Es posible que la desviación estándar sea mayor que el rango de las estaturas? Explica.

2. Verifica el procedimiento y los resultados de la desviación estándar y del coeficiente de variación. Si son incorrectos, corrígelos e interpreta los nuevos resultados.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito: Recopilamos datos de una variable cuantitativa de una muestra pertinente para el objetivo de estudio, adaptando y combinando procedimientos para determinar medidas de tendencia central como la media y medidas de dispersión como el rango, desviación media, desviación estándar y varianza. Asimismo, expresamos con lenguaje matemático nuestra comprensión sobre la pertinencia de las medidas de tendencia central con respecto a la media, en relación con la desviación estándar, desviación media y varianza, planteando y contrastando conclusiones sobre la tendencia de una población, reconociendo errores si los hubiera, así como proponiendo mejoras.

Un estudio para determinar la relación entre el nivel de ansiedad y la autoestima se llevó a cabo a un grupo de 20 estudiantes de quinto de secundaria de una institución educativa. En la tabla se muestran los puntajes obtenidos en cada variable. También se sabe que las medias de las variables son:

$$\bar{x}_{autoestima} = 2{,}83; \bar{x}_{ansiedad} = 1{,}70$$

Se recomienda utilizar una hoja de cálculo para facilitar las operaciones.

Con la información dada, responde las preguntas 1; 2; 3 y 4 .

N.º	Nombres	Sexo	Autoestima	Ansiedad
1	Pedro	H	3,08	1,42
2	Noemí	M	2,92	1,96
3	Luis	H	1,75	2,43
4	Daniela	M	3,45	1,13
5	Danny	H	2,78	2,12
6	Angie	M	3,80	1,07
7	Fernando	H	1,84	2,38
8	Víctor	H	1,91	2,26
9	Armando	H	1,98	2,31
10	Celia	M	3,12	1,35
11	Eduardo	H	3,72	1,16
12	Juan	H	3,24	1,28
13	José	H	3,64	1,21
14	María	M	2,25	2,02
15	Larisa	M	3,78	1,15
16	Rocío	M	1,95	2,17
17	Carlos	H	2,09	2,18
18	Roberto	H	2,32	2,09
19	Jesús	H	3,25	1,18
20	Carmen	M	3,70	1,04

1. ¿Cuál es el rango del nivel de autoestima de los estudiantes de quinto de secundaria?

a) 2,50 b) 2,05 c) 2,09 d) 2,15

2. Con la finalidad de establecer la amplitud de los puntajes en el nivel de ansiedad, se desea calcular el rango de los valores de la tabla para el grupo de estudiantes. ¿Cuál es el rango de los puntajes mostrados en la tabla?

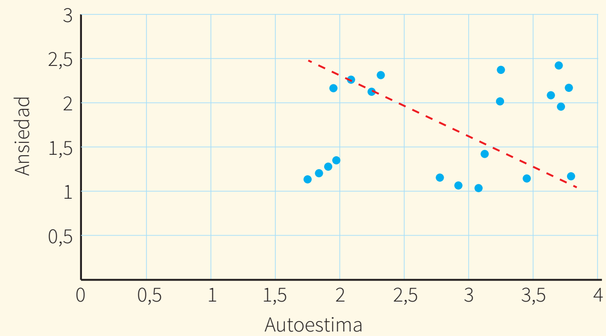
a) 1,35
b) 1,39
c) 1,57
d) 2,52

3. Con la finalidad de establecer diferencias en la variable "autoestima", los responsables de la encuesta desean saber si el rango de los puntajes de autoestima, mostrados en la tabla, es mayor en los hombres o en las mujeres.

a) El rango es mayor en los hombres.
b) El rango es mayor en las mujeres.
c) Es igual en ambos.
d) No se puede determinar.

4. Calcula el porcentaje de desviación con respecto a la media de la evaluación relacionada con los valores del nivel de ansiedad.

Considerando los valores de ansiedad y autoestima, se ha elaborado una gráfica de dispersión de puntos de dichos valores en el plano cartesiano.



Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

5. ¿Qué características tiene la recta de tendencia?

a) Es creciente y relaciona la autoestima con los hombres.

b) Es decreciente y relaciona la ansiedad de la mujeres con la autoestima de los hombres.

c) Es decreciente y relaciona la autoestima de los estudiantes con su ansiedad.

d) Es creciente la autoestima de los hombres en relación con la ansiedad de las mujeres.

6. ¿Qué se puede concluir de la gráfica anterior, en relación con la autoestima y la ansiedad de los estudiantes?

a) Existe relación inversa entre la autoestima y la ansiedad.

b) Existe relación directa entre la autoestima y la ansiedad.

c) No existe relación entre la autoestima y la ansiedad.

d) No se puede llegar a ninguna conclusión.

7. Los estudiantes del 5.° A obtuvieron en Matemática un rendimiento medio de 68,7 puntos con una desviación estándar de 15,4. Los del 5.° B obtuvieron en la misma área un promedio de 50,9 puntos con una desviación estándar de 19,6. Si el docente decide estimular a sus estudiantes con un paseo por el Día de la Juventud a la sección que tenga el rendimiento más homogéneo, ¿cuál de las dos secciones irá de paseo?

8. Los responsables de la encuesta han señalado que, si la desviación media de los niveles de ansiedad es menor o igual que 0,05 (DM ≤ 0,05), puede considerarse que la autoestima en dicho grupo de estudiantes requiere ser atendida por un psicólogo; mientras que si es superior, bastará con que su tutor converse con ellos.

Nivel de ansiedad X_i	f_i	F_i	$(X_i - \bar{x})^2$	$(X_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
1,04				
1,07				
1,13				
1,15				
1,16				
1,18				
1,21				
1,28				
1,35				
1,42				
1,96				
2,02				
2,09				
2,12				
2,17				
2,18				
2,26				
2,31				
2,38				
2,43				
Total				

Completa la tabla, luego calcula la desviación media y responde:

¿Cuál de las dos decisiones deberá tomarse con los estudiantes encuestados de quinto de secundaria?

a) Deberán ser atendidos por un psicólogo.

b) El tutor deberá conversar con los estudiantes.

c) No se puede determinar la DM de autoestima.

d) Debería intervenir el director.

9. Con la finalidad de determinar la dispersión de los niveles de ansiedad, los responsables de la encuesta deciden tomar en cuenta la varianza. ¿Cuál es el valor de la varianza del nivel de ansiedad en los estudiantes de quinto de secundaria? (Considera como dato la respuesta de la pregunta 8).

a) 1,24 b) 0,27 c) 0,26 d) 0,59

10. Considerando los valores de la tabla que muestra la estatura de los jugadores titulares y suplentes de la lista preliminar de la selección peruana de fútbol convocados por el director técnico para participar en la Copa América Argentina-Colombia 2020, se pide calcular la desviación estándar y el coeficiente de variación. Luego interpreta los resultados.

Estatura (cm) $[L_i; L_s[$	Jugadores titulares	Jugadores suplentes
[169; 173[	4	4
[173; 177[	5	5
[177; 181[	6	5
[181; 185[	3	4
[185; 189]	2	2
Total	20	20

Ficha
5

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Expresamos con diversas representaciones y lenguaje numérico nuestra comprensión sobre las tasas de interés simple y compuesto, así como términos financieros para interpretar el problema en su contexto. Además, adaptamos estrategias de cálculo para realizar operaciones con tasas de interés simple o compuesto.

Comprando un departamento

El Estado peruano, con su programa "Mi vivienda", brinda la oportunidad de adquirir departamentos, condominios y casas propias. Actualmente, en Lima hay un crecimiento tanto en la construcción como en la venta y alquiler de viviendas. El mercado inmobiliario se mueve por dos variables: la estabilidad económica y las tasas de interés hipotecario. En el Perú, la tasa de interés promedio de un crédito hipotecario en soles es de 9 % anual, y en dólares, de 8,5 %. Por este motivo, cada vez más personas tienen acceso a este tipo de crédito, como es el caso de la familia Ramírez Torres, cuyos miembros desean adquirir un departamento, pero solo disponen de $20 000 y les falta $40 000. Por ello, acuden a dos entidades crediticias con la intención de solicitar un crédito hipotecario y así comprar su departamento. En estas financieras les proponen las siguientes opciones:

Entidad financiera CREDICASA:

- Pago en cuotas mensuales iguales durante cinco años.
- Tasa de interés simple de 8,5 % anual.

Entidad financiera DAVIVIENDA:

- Pago en cuotas mensuales durante cinco años.
- Tasa de interés compuesto de 7,5 % anual.

1. ¿Cuál sería el análisis comparativo año a año con la propuesta de cada financiera?

2. ¿Cuál sería la mejor opción para la familia Ramírez Torres? Justifica tu respuesta.

Comprendemos el problema

1. ¿Cuál es la tasa de interés promedio en el Perú en el mercado inmobiliario?

2. ¿Con cuánto de dinero dispone la familia Ramírez Torres para comprar el departamento y cuánto de dinero necesita financiar?

3. ¿Cuál es la tasa de interés de las financieras CREDICA-SA y DAVIVIENDA respectivamente?

4. ¿Qué nos piden responder las preguntas de la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué procedimiento realizarías para dar respuesta a las preguntas de la situación?

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Elabora un tabla indicando el interés año por año de la financiera CREDICASA, ayúdate con una calculadora.

2. Elabora una tabla indicando el interés año por año de la financiera DAVIVIENDA, ayúdate con una calculadora.

3. Observa el desarrollo a la primera y segunda pregunta, ¿cómo son los resultados del interés en la financiera CREDICASA y financiera DAVIVIENDA durante los cinco años? Responde la primera pregunta de la situación.

4. Según lo analizado en la pregunta 3, responde la segunda pregunta de la situación.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. Investiga si las financieras o bancos de tu localidad cobran interés simple o compuesto. ¿Por qué?

2. ¿Puedes verificar los montos de manera directa? Si respondes que no, fundamenta. Si respondes que sí, verifica los valores de dichos montos.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre datos al trabajar con tasas de interés y las transformamos en expresiones numéricas que incluyen interés simple o compuesto u otros modelos a nuestro alcance; además, planteamos y comparamos afirmaciones sobre la conveniencia o no de determinadas tasas de interés y otras relaciones numéricas que descubrimos.

Situación A

Ricardo es un profesional con dos hijos, quienes actualmente acaban de ingresar a la universidad. Por ello, se ve en la necesidad de solicitar un préstamo a un banco. Como garantía, tiene que firmar un documento en el cual se detalla la forma de pago y los intereses que se compromete a pagar durante un determinado tiempo.

- El banco le prestará al inicio de este año S/12 500.
- Los pagos se realizarán en cuotas mensuales iguales.
- Al finalizar cada año, se contabilizarán intereses correspondientes al 18 % de los S/12 500 prestados, por un periodo de 5 años.

¿Qué tiempo transcurrió si Ricardo pagó S/14 250?

Resolución

Se tiene que C:capital, r: tasa, t: tiempo y M: monto

- Del enunciado, se desprende que es un modelo de interés simple.
- Datos:

  C = S/12 500

  r = 18 % = 0,18

  t = 5 años

  Pago realizado = S/14 250
- Calculamos el monto a pagar en 5 años:

  $M = C\,(1 + rt) = 12\,500\,(1 + 0{,}18 \times 5)$

  $M = 23\,750$ soles
- El pago mensual sería: $\dfrac{23\,750}{60} = 395{,}83$ soles
- El tiempo transcurrido es: $14\,250 \div 395{,}83 = 36$ meses

Respuesta: Han transcurrido 36 meses o 3 años.

1. ¿Qué expresiones te dan a entender que es una operación de interés simple?

2. Describe el procedimiento realizado para responder la pregunta de la situación.

3. ¿Se parece a la situación de la sección *Aplicamos nuestros aprendizajes* con relación a las dos financieras? ¿Por qué?

Situación B

Un *Smart TV* también se usa para Internet y Pedro decidió comprar uno de 42 pulgadas al crédito, con una cuota inicial de S/699 y un saldo restante financiado en 12 mensualidades de S/196,67 cada una. ¿Cuál es la tasa de interés compuesto anual que se aplica al crédito solicitado? ¿Cuánto le costó realmente el *Smart TV* en cuotas?

Resolución

Datos:

- Precio al *cash*: S/2699
- Cuota inicial: S/699
- Tiempo: 12 meses = 1 año
- Saldo a pagar: S/2000
- Cuota mensual: S/196,67
- Monto del crédito: 12 × 196,67 = S/2360,04
- Aplicamos la fórmula del monto:

$$M = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

$$2360{,}04 = 2000\left(1 + \frac{r}{100}\right)^1$$

$$2360{,}04 = 2000 + 20r$$

$$360{,}04 = 20r$$

$$r \approx 18\ \%$$

Respuesta:

La tasa de interés compuesto es, aproximadamente, 18 % y el costo total fue, aproximadamente, de S/2360,04 + S/699 = S/3059.

1. ¿En qué se parece y en qué se diferencia el procedimiento utilizado del que desarrollaste en la situación A?

2. Verifica si la respuesta es la correcta, en la fórmula del monto.

Situación C

Para pagar la gratificación de Fiestas Patrias de sus trabajadores, el administrador de la carpintería "Maestro" ha decidido depositar S/3600 durante 6 meses al 12 % capitalizable anualmente. ¿A cuánto asciende la gratificación de cada uno de sus 4 trabajadores?

Aprendemos a partir del error

Resolución

- Es una operación de interés compuesto, donde:

  C = S/3600

  t = 6 meses

  r = 12 % anual ≡ 1 % mensual = 0,01

  M = ?

  n = 4 trabajadores

- Calculamos el monto que se obtendrá:

  $M = C\,(1 + r)^t$

  $M = 3600\,(1 + 0{,}01)^6$

  M = 3821,47 soles.

- A cada trabajador le corresponde:

  $\frac{3821{,}47}{4}$ = 955,37 soles.

Respuesta:

La gratificación de cada trabajador asciende a S/955,37.

1. ¿Qué tipo de interés se da en esta situación? ¿Cómo te das cuenta?

2. ¿Qué capitalización se ha utilizado en la resolución planteada? ¿Es correcta?

3. Verifica que el procedimiento y la respuesta sean corrrectos. Si no lo son, corrígelos.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito: Expresamos con diversas representaciones y lenguaje numérico nuestra comprensión sobre las tasas de interés simple y compuesto, así como términos financieros para interpretar el problema en su contexto. Además, adaptamos estrategias de cálculo para realizar operaciones con tasas de interés simple o compuesto. Asimismo, establecemos relaciones entre datos al trabajar con tasas de interés y transformamos en expresiones numéricas que incluyen interés simple o compuesto.

Miguel ha recibido una bonificación de S/8000 por sus 10 años de trabajo en una empresa. Decide ahorrar este dinero en un banco durante un año. Tiene tres opciones: el Banco del Sur, a una tasa del 15 % anual capitalizable semestralmente; el Banco del Norte, a una tasa del 14 % anual capitalizable mensualmente, y el Banco del Centro, a una tasa de interés compuesto del 15,08 %. Sabe que para decidir puede efectuar cálculos usando la fórmula de interés compuesto o la tasa anual equivalente (TAE). Ayúdate con una calculadora.

$$\text{TAE} = 100 \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{k \cdot 100} \right)^{k \cdot t} - 1 \right]$$

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. El banco que proporciona el mayor monto es:

a) El Banco del Centro

b) El Banco del Sur

c) El Banco del Norte

d) No se puede determinar

2. El banco que ofrece la mejor TAE es:

a) El Banco del Sur
b) El Banco del Norte
c) El Banco del Centro
d) Cualquiera de los bancos

3. Una pareja de esposos solicita a un banco un crédito vehicular por un monto de S/43 000 para comprar una miniván de 15 asientos y realizar movilidad escolar. Esta entidad le cobra una tasa de interés del 18 % anual por un periodo de 3 años. ¿Cuánto pagará de interés al finalizar el préstamo?

a) S/7740
b) S/27 650,38
c) S/23 220
d) S/66 220,10

4. En tercero de secundaria, los padres de familia están realizando actividades para el viaje y la fiesta de promoción. Hasta hoy han logrado reunir S/12 000, los cuales han decidido depositar a un plazo fijo de 2 años. Para ello, tienen dos opciones:

a) La caja municipal, que ofrece el 10 % trimestral de interés simple.
b) Un banco, el cual asegura el 36 % de interés compuesto anual, con capitalización semestral.

¿Cuál será la mejor opción? Justifica tu respuesta teniendo en cuenta la variación porcentual.

5. La empresa "Multimax", a fin de renovar sus maquinarias, requiere de S/60 000 para finales del segundo año. ¿Cuánto es el capital inicial que se debe depositar hoy para obtener ese monto en el tiempo previsto si se sabe que la tasa de interés generada por el depósito es del 8 % anual capitalizable semestralmente?

a) S/51 288,25 b) S/51 440,32 c) S/55 473,37 d) S/57 692,31

6. Daniela se dedica a la producción y venta de joyas en oro y plata. En un tiempo determinado, invirtió S/150 000 y, en 4 años, ha reunido S/230 000. ¿Cuál es la tasa de interés compuesto anual que se aplicó al dinero que invirtió?

a) 12 % b) 11,28 % c) 10,55 % d) 53,33 %

7. Gilda acude a un prestamista con el fin de solicitar S/5000 para los gastos escolares de sus tres hijos. Debe cancelar el préstamo dentro de tres meses, con un interés simple mensual del 20 %. Ella firma un contrato en el cual una cláusula establece que, en caso de mora, le cobrarán el 1 % de interés simple diario sobre la cantidad que debía devolver, por el tiempo que exceda al plazo fijado. Si Gilda paga el total del préstamo 5 días después de los tres meses, ¿cuál será el monto de la mora y cuál será el monto total que pagará?

8. El profesor Hugo plantea a su estudiante Fernando la siguiente situación: Si se coloca un capital al 3,5 % mensual por un tiempo, genera un monto de S/2000; pero si se lo coloca al 18,5 % mensual por el mismo tiempo, produce S/6000. ¿Cuál es el tiempo al que se debe colocar el capital y a cuánto asciende este capital?

a) 25 meses; S/1066,67
b) 2,5 meses; S/1839,08
c) 2 años; S/1869,16
d) 16 meses; S/1989,46

9. Ricardo recibe una bonificación en la empresa donde labora y la deposita en una entidad financiera, donde, por equivocación, le consideran una tasa de interés trimestral en lugar de mensual. Por este motivo, en un año deja de percibir S/240. ¿Cuánto recibiría Ricardo al cabo de tres años si la tasa de interés fuera la correcta?

a) S/3000
b) S/360
c) S/1080
d) S/540

10. Gerson reflexiona sobre la importancia del ahorro y decide abrir una cuenta con S/3500. Para ello, se le presentan tres opciones: Caxabank (3,08 % de tasa anual, capitalizable mensualmente), Bankia (3,09 % de rendimiento anual) y Kabank (3,05 % anual, capitalizable diariamente). ¿Cuál es la mejor opción? Justifica tu respuesta.

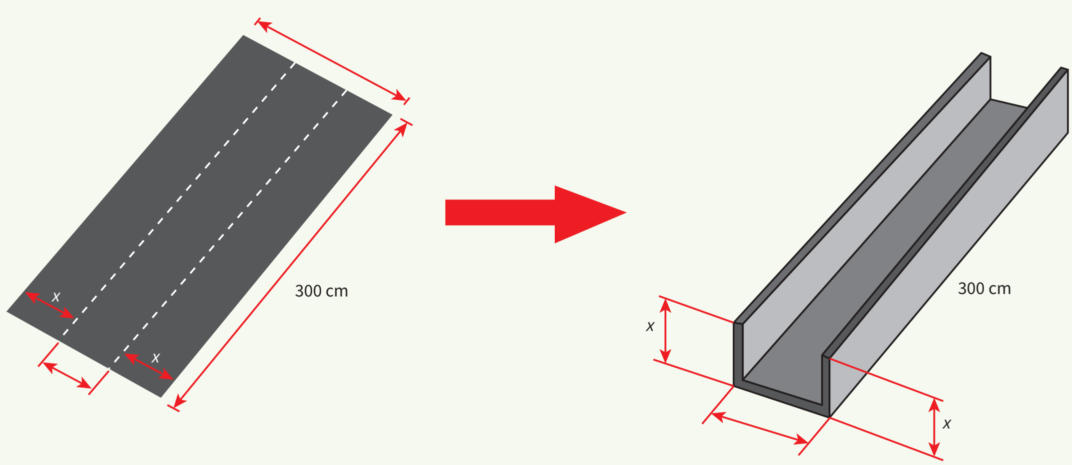
Ficha
6

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos, y transformamos esas relaciones en expresiones algebraicas; además, combinamos y adaptamos procedimientos diversos para calcular los valores que definen una función cuadrática.

Construyendo canaletas

Martín Fernández necesita construir canaletas para el techo de su casa por las inminentes lluvias que el Senamhi (Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú) ha pronosticado. Para ello, cuenta con planchas de 300 cm de largo por 16 cm de ancho con recubrimiento de zinc, que las hace resistentes a la acción corrosiva del medioambiente. Para concretar su proyecto, basta con doblar hacia arriba algunos centímetros a cada lado, como se muestra en la figura.



1. ¿Qué valores pueden tomar las pestañas que se van a doblar hacia arriba para obtener la canaleta del diseño que muestra la figura?
2. ¿Cuál es la función que modela la capacidad que va a tener la canaleta elaborada?
3. ¿Qué tipo de función es y qué forma tiene su gráfica?
4. ¿Cuántos centímetros deben doblarse para que la canaleta tenga el mayor volumen?

Comprendemos el problema

1. ¿Cuáles son las dimensiones de la plancha?

2. ¿Qué forma geométrica tiene la figura cuando se doblan los extremos de la canaleta?

3. Según la figura mostrada, ¿cuáles serían las dimensiones de la canaleta?

4. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen de la canaleta?

5. ¿Qué piden hallar las preguntas de la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. Describe el procedimiento que realizarías para dar respuesta a las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. El valor de la medida de una longitud siempre es positivo, es decir, mayor que cero. Según esta afirmación, determina qué valores tomará la variable x en la base de la canaleta.

2. Según los resultados obtenidos en la actividad anterior, responde la primera pregunta de la situación.

3. Si x, $16 - 2x$ y 300 representan las dimensiones de la canaleta, ¿cuál es la función $f(x)$ que modela el volumen de dicha canaleta? Responde la segunda pregunta de la situación.

4. ¿Qué tipo de función es $f(x)$ y qué forma tendría su gráfica? Responde la tercera pregunta de la situación.

5. En una función de segundo grado de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, para que $f(x)$ tenga un valor máximo, se determinan las coordenadas de sus vértices, en este caso $x = \frac{-b}{2a}$.
Calcula el valor de x para que $f(x) = x(16 - 2x)300$ tenga el máximo volumen.

6. Según el resultado de la actividad anterior, responde la cuarta pregunta de la situación.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿El procedimiento empleado ayudó para responder las preguntas de la situación? ¿Por qué?

2. Describe otro procedimiento para encontrar el valor de "x", de modo que el volumen de la canaleta sea el máximo.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito: Expresamos con diversas representaciones tabulares y con lenguaje algebraico nuestra comprensión sobre los valores máximos de una función cuadrática. Asimismo, justificamos o comprobamos la validez de una afirmación opuesta a otra mediante conocimientos geométricos.

Situación A

Un experto en anfibios realizó observaciones del salto de una rana y las registró en una tabla. Luego de analizar los resultados, se dio cuenta de que la altura que alcanzaba la rana en cada instante del salto podía modelarse como una función cuadrática. En la tabla adjunta, se muestra la altura (h) en metros, que alcanza la rana en un mismo salto, en cinco tiempos (t) diferentes expresados en segundos.

t	0	0,5	1	1,5	2
h	0	0,75	1	0,75	0

a. Escribe una función cuadrática para modelar la situación que planteó el experto en anfibios.

b. Determina algebraicamente la mayor altura que alcanza la rana y el tiempo que emplea en llegar ahí.

c. ¿Cuánto demora la rana en volver a tocar el suelo? ¿De qué modo algebraico lo podrías determinar?

Resolución

a. La función cuadrática tendrá la forma $h(t) = at^2 + bt + c$, donde h es la altura (h, en metros) y t es el tiempo. Con los datos de la tabla:

$0 = a(0)^2 + b(0) + c$, entonces $c = 0$

Similarmente: $1 = a(1)^2 + b(1) + c$, queda $1 = a + b$... (1)

$0 = a(2)^2 + b(2) + c$, queda $0 = 4a + 2b \longrightarrow 0 = 2a + b$... (2)

Resolviendo el sistema, obtenemos: $b = 2$ y $a = -1$

La función es: $h(t) = -t^2 + 2t$

b. Como $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo y la altura h tiene su máximo valor en el vértice: $b = 2$ y $a = -1$.

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

Reemplazamos $h = 1$ en la función para hallar t.

$1 = -t^2 + 2t$, entonces $t^2 - 2t + 1 = 0$. Resolviendo, tenemos que $t = 1$

c. Para encontrar el tiempo que demora en volver a tocar el suelo, se considera que, en ese momento, la altura es cero.

$0 = -t^2 + 2t$, entonces $0 = t(-t + 2)$. Resolviendo:

$t = 0$; $t = 2$. Tomamos el valor 2 porque el tiempo cero corresponde al punto de inicio del salto. A los 2 segundos, la rana llega al suelo nuevamente.

1. Describe el procedimiento usado para determinar la expresión algebraica de una función cuadrática.

2. ¿Qué estrategias se han utilizado en las tres situaciones planteadas?

Situación B

El contador de una empresa de comida rápida, especializada en la venta de pizzas, concluyó que los beneficios anuales para la empresa dependen del número de repartidores con los que cuenta; además, que estos beneficios se determinan según el siguiente modelo matemático $B(x) = -27x^2 + 1890x + 9831$, donde $B(x)$ es el beneficio en soles anuales para x repartidores.

a. ¿Cuántos repartidores ha de tener la empresa para que sus beneficios anuales sean máximos?

b. ¿Cuál será el valor de dichos beneficios máximos?

Resolución

Observamos la función cuadrática y vemos que $a < 0$; entonces, la parábola se abre hacia abajo, y tendrá un valor máximo cuando se determinen las coordenadas del vértice.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1890}{2(-27)} = \frac{1890}{54} = 35$$

Luego, reemplazando $x = 35$ en la función $B(x)$:

$$y = B(35) = -27(35)^2 + 1890(35) + 9831$$

$$y = -33\,075 + 66\,150 + 9831 = 42\,906$$

Respuestas:

a. Ha de tener 35 repartidores.

b. El máximo beneficio será de S/42 906 anuales.

1. ¿Por qué es importante saber que a es mayor o menor que cero?

2. ¿Qué significan las coordenadas del vértice de la parábola?

Situación C

Para motivar a Pablo, que gusta del fútbol, su docente le plantea el siguiente problema:

Un jugador se encuentra a 8 m del arco. El arquero, que es capaz de saltar hasta los 2,5 m de altura, está adelantado 4 m del arco. Para realizar el lanzamiento, el jugador puede escoger entre dos trayectorias:

I. $y = 0{,}4x - 0{,}05x^2$

II. $y = 1{,}6x - 0{,}2x^2$

¿Cuál de los dos modelos presentados será el más adecuado para meter gol? ¿Por qué?

Aprendemos a partir del error

Resolución

Ambas funciones tienen como gráfica una parábola que se abre hacia abajo. Entonces, hallando las coordenadas de los vértices, determinaremos la altura máxima que alcanza cada modelo de trayectoria.

- Para $y = 0{,}4x - 0{,}05x^2$; $a = -0{,}05$ y $b = 0{,}4$ la fórmula que aplicaremos es:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0{,}4}{2(-0{,}05)} = \frac{0{,}4}{0{,}1} = 4$$

- Para $y = 1{,}6x - 0{,}2x^2$; $a = -0{,}2$ y $b = 1{,}6$ la fórmula que aplicaremos es:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}6}{2(-0{,}2)} = \frac{1{,}6}{0{,}4} = 4$$

Respuesta: Da lo mismo aplicar cualquiera porque se obtiene el mismo resultado.

1. ¿Qué significan la abscisa y la ordenada en el vértice de la parábola?

2. Si el procedimiento es correcto, busca otra forma de solución. Si no lo es, corrígelo.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre datos y valores desconocidos, y transformamos esas relaciones en expresiones algebraicas. Además, combinamos y adaptamos procedimientos diversos para calcular los valores que definen una función cuadrática. Así también, expresamos con diversas representaciones tabulares y con lenguaje algebraico nuestra comprensión sobre los valores máximos de una función cuadrática; asimismo, justificamos o comprobamos la validez de una afirmación opuesta a otra mediante conocimientos geométricos.

1. Escribe verdadero (V) o falso (F) en el paréntesis, según corresponda, a las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de una función cuadrática es una parábola que se abre hacia arriba si el coeficiente del término cuadrático es mayor que cero y se abre hacia abajo si es menor que cero. ( )

II. La función cuadrática está bien definida cuando su representación simbólica es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ( )

III. En la función cuadrática de la forma $f(x) = -x^2$, su vértice se encuentra en el origen de las coordenadas y la parábola se abre hacia abajo. ( )

a) V V V   b) F V F   c) V F V   d) F F F

Un delfín salta con trayectoria parabólica dada por la función cuadrática $f(t) = -t^2 + 6t$, siendo $0 \leq t \leq 6$, donde t es el tiempo en segundos y $f(t)$ es la altura en metros que alcanza el delfín en determinado instante.

Con la información dada, responde las preguntas 2 y 3.

2. Calcula la altura máxima que alcanza el delfín y en qué instante.

a) La altura máxima fue 3 m a los 9 s.

b) La altura máxima fue 9 m a los 3 s.

c) La altura máxima fue 27 m a los 3 s.

d) La altura máxima fue 12 m a los 3 s.

3. Averigua cuánto tiempo demora en caer el delfín desde que alcanza la altura máxima.

a) 6 s

b) 9 s

c) 3 s

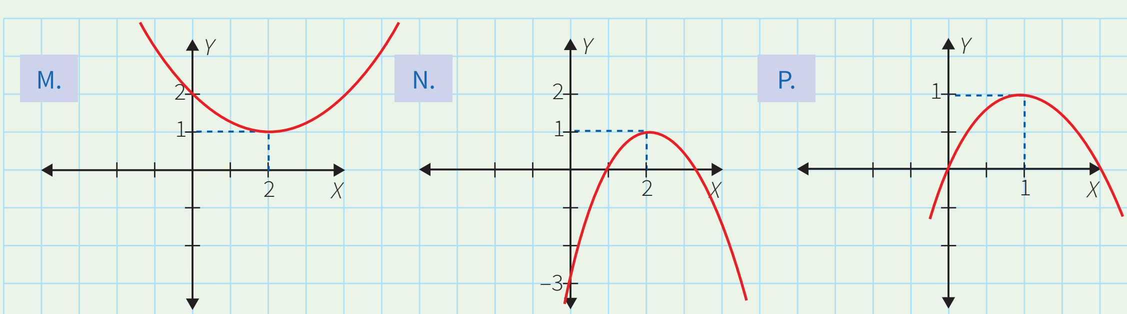
d) 12 s

4. Relaciona cada función representada simbólicamente con su respectiva gráfica, teniendo en cuenta el vértice de la parábola. Justifica tu respuesta.

a) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = 2x - x^2$

c) $f(x) = 0{,}25x^2 - x + 2$



En un partido de fútbol, un jugador patea un tiro libre de modo que la trayectoria de la pelota forma la parábola correspondiente a la función $y = -0{,}05x^2 + 0{,}7x$, donde y es la altura en metros que alcanza la pelota; mientras que x representa la distancia horizontal que hay desde el punto en el que fue lanzada la pelota.

Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

5. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota y a cuántos metros del punto de lanzamiento?

a) La altura máxima es 2,45 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

b) La altura máxima es 7,35 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

c) La altura máxima es 4,2 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

d) La altura máxima es 5,6 m y a una distancia de 7 m del punto de lanzamiento.

6. Si la barrera que forman los jugadores del equipo contrario está a 9,15 m del punto en que se lanzará la pelota y si los jugadores al saltar pueden alcanzar una altura de 2,3 m, ¿pasa el balón por encima de la barrera? ¿Por qué?

a) Sí pasa el balón por encima de la barrera, porque la supera en 8,3 m.

b) Sí pasa el balón por encima de la barrera, porque la supera en 0,08 m.

c) No pasa el balón por encima de la barrera, porque el salto de los jugadores supera en 0,08 m la altura que alcanza la pelota.

d) No pasa el balón por encima de la barrera, porque el salto de los jugadores supera en 0,8 m la altura que alcanza la pelota.

7. Una empresa de televisión por cable HD de un año de funcionamiento, actualmente, cuenta con 8000 clientes, a quienes cobra 50 soles mensuales. Un funcionario de la compañía manifestó su interés por incrementar el número de usuarios, para lo cual en una reunión de directorio planteó que, si se redujera en 5 soles el cobro mensual, tendrían 1000 clientes nuevos.

Determina un modelo matemático para calcular el número de clientes que tendrá la empresa si dicho modelo es una función cuadrática sin término independiente.

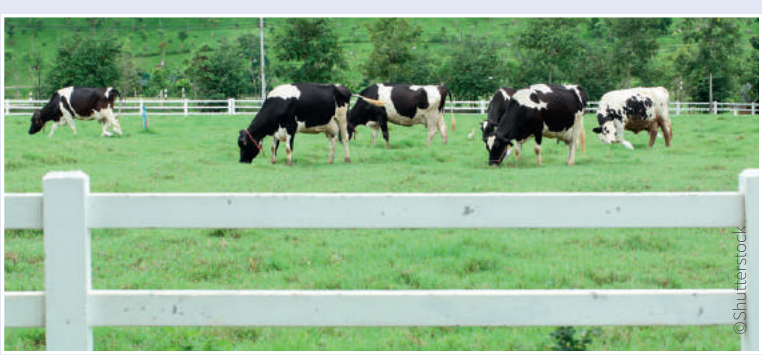
8. Para economizar malla metálica, Julia García construye un corral rectangular utilizando uno de sus muros. Ella emplea 18 m de malla metálica para cercar el corral. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el corral si Julia logró el área máxima?

a) 20,12 m^2 b) 20,05 m^2 c) 20,25 m^2 d) 40,5 m^2

9. Al proyectarse una imagen sobre una pantalla, su tamaño dependerá de la distancia del proyector con respecto a ella. Así, cuando el proyector está a 0,5 m de la pantalla, la imagen proyectada de forma cuadrada tiene un área de 0,0625 m^2; cuando se encuentra a 1 m, el área es de 0,25 m^2; cuando se halla a 1,5 m, el área es de 0,5625 m^2, y así sucesivamente. Determina un modelo matemático para hallar el área de la imagen proyectada (y) en función de la distancia entre el proyector y la pantalla (x), siendo este modelo una función cuadrática.

a) $y = 0{,}25x^2$ b) $y = 0{,}75x^2$ c) $y = 25x^2$ d) $y = 75x^2$

10. Un granjero tiene listones de madera para 80 metros de cerco, con los que desea construir un establo rectangular para sus vacas frente a su granero. El granjero intentará que el terreno cercado tenga el área máxima. ¿Cuál es el modelo matemático para esta situación y cuáles son las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima?



Ficha 7

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios, representamos estas relaciones con formas bidimensionales y las expresamos mediante razones trigonométricas. Asimismo, combinamos estrategias, recursos o procedimientos para determinar la longitud de cuerpos compuestos y distancias inaccesibles empleando razones trigonométricas.

Accesibilidad física

Una rampa es una superficie inclinada que nos permite conectar dos lugares a diferente altura.

Hoy en día, todos los edificios públicos deben contar con acceso para el desplazamiento de las personas con algún problema físico y adultos mayores. La construcción de rampas es obligatoria, siguiendo las especificaciones que indican que su ángulo de inclinación debe tener un rango de 10° a 15° respecto a la horizontal. Actualmente, en el hospital Nueva Esperanza están construyendo una rampa lineal, cuya altura será de 1,5 m al final de ella.

©Shutterstock

1. ¿Cómo se representa matemáticamente la longitud de la rampa en función del ángulo especificado?
2. Representa gráficamente cómo varía la longitud de la rampa.

Comprendemos el problema

1. ¿Qué ángulo de inclinación debe tener obligatoriamente una rampa?

2. ¿Qué altura tiene la construcción de la rampa del hospital Nueva Esperanza?

3. ¿Qué forma geométrica se observa en la imagen lateral de la rampa? Grafica y escribe sus elementos.

4. ¿Qué razones trigonométricas expresarían una relación entre un ángulo y los lados de la forma geométrica graficada?

5. ¿Qué te piden calcular las preguntas de la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. Describe el procedimiento que realizarías para dar respuesta a las preguntas de la situación.

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Grafica la forma geométrica que se observa en la imagen lateral de la rampa y escribe en cada lado y ángulo las características que presenta la rampa.

2. Aplica la razón trigonométrica que relaciona la longitud, altura y ángulo de inclinación de la rampa para representar matemáticamente la longitud de la rampa en función del ángulo especificado.

3. Responde la primera pregunta de la situación.

4. Completa la tabla.

Ángulo	5°	10°	15°	30°
Longitud de la rampa				

5. Representa gráficamente la variación de la longitud de la rampa.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. Considerando la información registrada en la tabla, ¿qué ocurre con la longitud de la rampa cuando la medida del ángulo de inclinación va aumentando? ¿Por qué?

2. ¿Qué longitudes de la rampa, según la altura presentada en la situación inicial, cumplen las especificaciones en la construcción de rampas? ¿Por qué?

Comprobamos nuestros aprendizajes

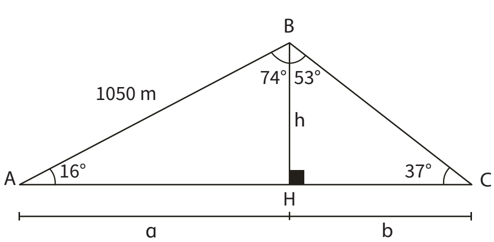
Propósito: Leemos textos o gráficos que describen las propiedades de semejanza entre formas geométricas, razones trigonométricas y ángulos de elevación o depresión. Asimismo, comprobamos la validez de una afirmación mediante contraejemplos y conocimientos geométricos, y corregimos los procedimientos si hubiera errores.

Situación A

Una empresa construyó un túnel que atraviesa un cerro y conecta dos distritos limeños, tal como se observa en el gráfico. Teniendo como información las medidas realizadas por los ingenieros, ayuda a determinar la longitud del túnel.

Resolución

- Trazamos la altura BH para formar los triángulos rectángulos, ◣ AHB y ◣ BHC.



- En el ◣ AHB, calcula a y la altura h:

  Para a:

  $\text{Cos } 16° = \frac{a}{1050}$, luego $\frac{24}{25} = \frac{a}{1050}$, el valor de $a = 1008$ m

  Para h:

  $\text{Sen } 16° = \frac{h}{1050}$, luego $\frac{7}{25} = \frac{h}{1050}$, el valor de $h = 294$ m

- En el ◣ BHC, calcula b:

  $\text{Tan } 16° = \frac{h}{b}$, luego $\frac{3}{4} = \frac{294}{b}$, el valor de $b = 392$ m

Respuesta: La longitud del túnel es $(a + b)$:

$1008 + 392 = 1400$ m

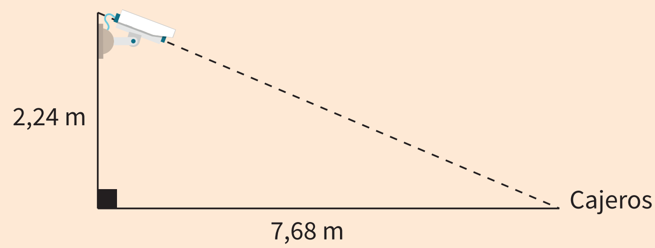
1. Describe el procedimiento realizado.

2. ¿Qué ventajas presenta hacer el dibujo?

3. ¿Qué condiciones habría que tener en cuenta para determinar la longitud del túnel mediante un gráfico?

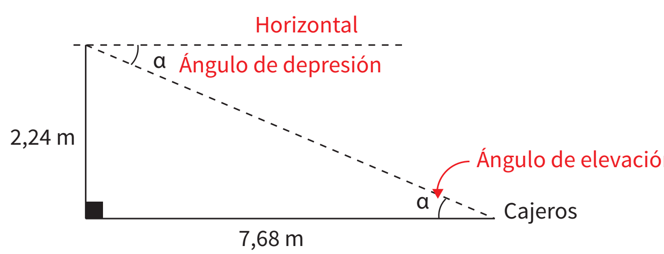
Situación B

Por la seguridad de su personal y clientes, en una agencia bancaria se instalará una cámara de video en un soporte de pared, de modo que brinde una buena vista de cajeros y usuarios. ¿Cuál es el ángulo de depresión que debe formar la lente con la horizontal?



Resolución

- Ubicamos los datos en el gráfico.



- Determinamos la razón trigonométrica que relaciona los lados del triángulo con el ángulo de depresión:

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} \rightarrow \text{Tan } \alpha = \frac{2{,}24}{7{,}68} = \frac{7}{24}$$

- Entonces, se deduce que la medida del ángulo es 16°, teniendo en cuenta el triángulo rectángulo aproximado de 16° y 74°.

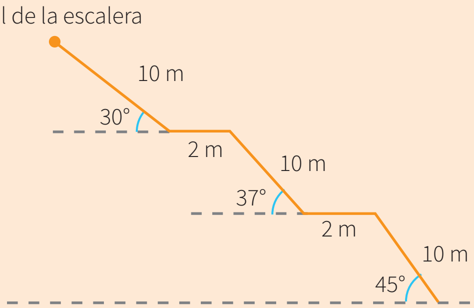
Respuesta: El ángulo de depresión que debe formar la lente con la horizontal es de 16°.

1. De acuerdo con el gráfico, ¿por qué el ángulo de depresión es igual al ángulo de elevación?

2. ¿Cómo podrías hallar de otra manera el valor del ángulo de depresión que debe formar la lente con la horizontal?

Situación C

Ante el crecimiento demográfico en la ciudad de Lima, numerosas familias recurren a la construcción de sus casas en los cerros, exponiéndose así a muchos peligros. Como paliativo para esta situación, la Municipalidad ha construido escaleras en diferentes asentamientos humanos ubicados en los cerros, así las personas que viven en esos lugares pueden acceder a sus casas con menos dificultad. Una de aquellas tiene la forma y las dimensiones de la figura. ¿A qué altura se encuentra el final de la escalera?



Aprendemos a partir del error

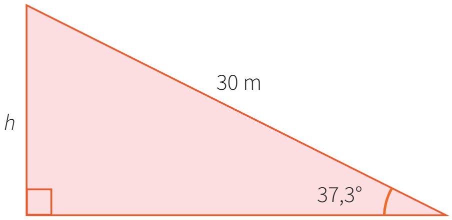
Resolución

La escalera sube de 10 m en 10 m, entonces habrá subido: 10 + 10 + 10 = 30 m.

Se considerará un ángulo promedio: $\dfrac{30° + 37° + 45°}{3} = 37{,}3°$

Luego, podemos tener el triángulo: $\dfrac{h}{30} = \text{Tan } 37{,}3°$

$h = 30 \cdot \text{Tan } 37{,}3°$, luego $h = 22{,}85$ m



Respuesta: El final de la escalera se encuentra a 22,85 m de altura.

1. Verifica con otro procedimiento o corrige según sea el caso.

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito: Establecemos relaciones entre las características y los atributos medibles de objetos reales o imaginarios y representamos estas relaciones con formas bidimensionales. También leemos textos o gráficos que describen las propiedades de semejanza entre formas geométricas, razones trigonométricas y ángulos de elevación o depresión, y combinamos estrategias, recursos o procedimientos para determinar la longitud de cuerpos compuestos y distancias inaccesibles empleando razones trigonométricas. Asimismo, comprobamos la validez de una afirmación mediante contraejemplos y conocimientos geométricos, y corregimos los procedimientos si hubiera errores.

Las escaleras mecánicas se usan para transportar con comodidad y rápidamente un gran número de personas entre los pisos de un edificio, especialmente en centros comerciales, aeropuertos, estaciones de transporte público, etc.

Para la construcción de un nuevo centro comercial de dos niveles, de 6 m de altura cada uno, se están acondicionando dos escaleras mecánicas (subida y bajada). El ingeniero encargado de la obra sugiere que deben tener una pendiente $m = 1/\sqrt{3}$ como máximo.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. ¿Cuál será la longitud de la escalera eléctrica?

a) $46\sqrt{3}$ m

b) 8 m

c) 10 m

d) 12 m

2. Si la altura de cada peldaño es de 200 mm, ¿cuántos peldaños tiene la escalera?

a) 25

b) 24

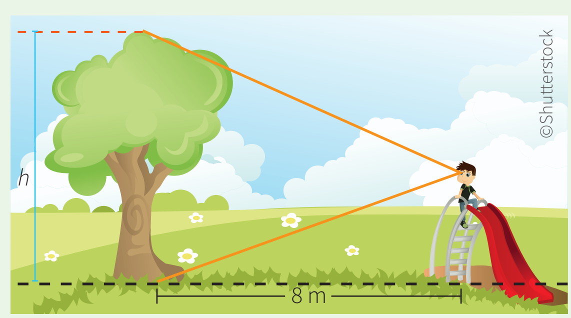
c) 30

d) 18

3. La NASA (*National Aeronautics and Space Administration*), la agencia del gobierno estadounidense responsable del programa espacial civil, así como de la investigación aeronáutica y aeroespacial, está a punto de lanzar un cohete para poner en órbita un satélite. ¿Cuál será la inclinación para iniciar su despegue? Observa la figura.

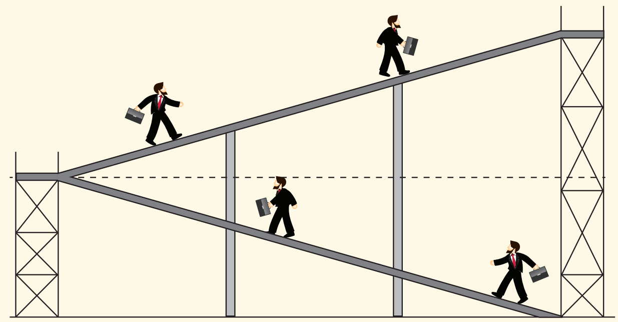
a) 31° b) 37° c) 53° d) 58°

4. Jairo acude con su familia a un centro de esparcimiento de Chosica. Él se sube a un tobogán y desde allí observa un árbol. Para ver la base de este, necesita bajar la vista 37° respecto a la horizontal, y para observar la punta de la copa del árbol, debe levantar su mirada 45° respecto a la horizontal. El tobogán está ubicado a 8 m del árbol. Con esta información, ¿será posible calcular la altura (h) del árbol? Efectúa el procedimiento.



De acuerdo con las estadísticas, los atropellos son los accidentes de tránsito más frecuentes. A pesar de la responsabilidad del conductor, entre las causas figura el cruce indebido por parte del peatón.

Una solución parcial planteada para mejorar la seguridad de las personas es la colocación de puentes peatonales, especialmente en las vías de tránsito rápido. Por ello, se construyó un puente de 7 m de altura; para subir se han acondicionado rampas cuya inclinación es α, y se sabe que Sen $\alpha = 0{,}28$.



Con la información dada, responde las preguntas 5 y 6.

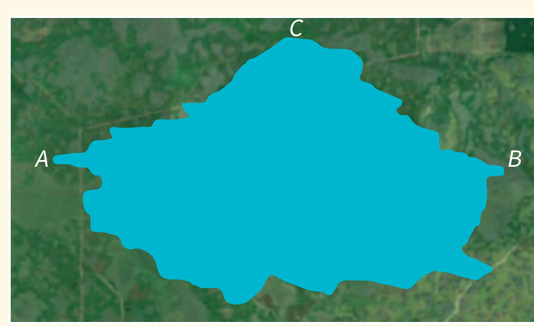
5. ¿Cuáles son los ángulos de inclinación de las rampas mostradas en la imagen?

a) 60° b) 16° c) 30° d) 74°

6. ¿Cuál es la longitud total de las rampas dadas?

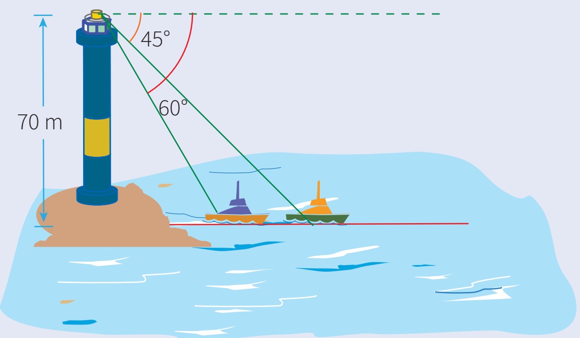
a) 156 m b) 25 m c) 24,5 m d) 49 m

7. Para estimar el ancho de un pantano, los topógrafos Raúl y David se ubican en el punto *B*. Desde allí, ambos caminan 130 m al punto *C*. Raúl gira 53° y camina 200 m al punto *A*. David continúa caminando en línea recta, hasta poder ver a su izquierda, perpendicularmente a su trayectoria, a Raúl, quien se encuentra en el punto *A*. Utilizando esta estrategia, los topógrafos podrían determinar, aproximadamente, el ancho del pantano entre los puntos *A* y *B*. Realiza tu procedimiento.



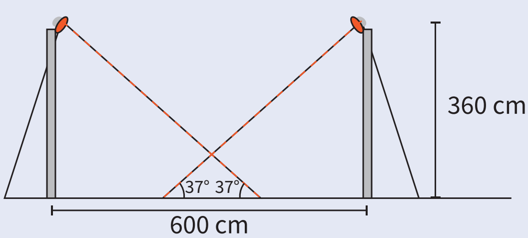
8. Un faro es una torre de señalización luminosa situada cerca de la costa. Se ubica en lugares de paso de las rutas de navegación de los barcos. En su parte superior, dispone de una lámpara potente, cuya luz se utiliza como guía.

Juan es el encargado del faro Salaverry, en Barranca, el cual tiene una altura de 70 m. Desde el balcón observa dos barcos situados al este del faro con ángulos de depresión de 60° y 45°. Según la información dada, ¿cuál es la distancia que separa a un barco del otro?



a) 70 m b) 29,59 m c) 59,29 m d) 140 m

9. Se observa que dos postes de luz de 360 cm de altura, ubicados a una distancia de 600 cm, iluminan una calle, como lo muestra la figura. Determina la longitud del segmento que queda iluminado por los dos postes.



a) 1,2 m b) 2,4 m c) 3,6 m d) 4,8 m

10. Una asociación que vela por el cuidado ambiental de nuestro litoral contrata una avioneta que sobrevuela las playas más concurridas de Lima para desplegar avisos de difusión.

Dos salvavidas, Carla y Miguel, están ubicados en una misma línea recta en la misma dirección, separados por 153 m de distancia. En un determinado momento, entre ellos ven la avioneta, que sobrevuela a una altura constante, con ángulos de elevación de 82° y 53°, respectivamente.

¿A qué altura, aproximadamente, vuela la avioneta?

Ficha 8

Aplicamos nuestros aprendizajes

Propósito: Determinamos las condiciones y restricciones de una situación aleatoria, analizamos la ocurrencia de sucesos compuestos y la representamos con el valor de su probabilidad condicional; además, adaptamos y combinamos procedimientos para determinarlos y utilizarlos en otros contextos de estudio.

Las probabilidades en la investigación médica

Un informe médico sobre la anemia indica que, de los 200 adolescentes de una población, el 20 % señala que no conoce su situación respecto al padecimiento de esta enfermedad. Del resto, solo el 40 % dice estar en tratamiento riguroso. Maricielo, estudiante de medicina que está abordando este tema como parte de su trabajo de investigación, toma esta información como referencia para calcular la probabilidad de que, al escoger un adolescente al azar, este no se encuentre en tratamiento a pesar de que conoce su enfermedad.

©ANDINA / Melina Mejía

1. ¿Cuál será el valor de la probabilidad obtenida por Maricielo? Interpreta este valor.
2. ¿Cuál será el valor de la probabilidad, tal que al escoger un adolescente al azar, este no conozca su situación con respecto al padecimiento de la anemia?

Comprendemos el problema

1. ¿De qué trata la situación?

2. ¿Cuál es la población del estudio que realiza Maricielo y qué porcentaje no conoce el padecimiento de la anemia?

3. ¿Qué porcentaje de adolescentes conoce su situación respecto al padecimiento de la anemia?

4. ¿Qué te piden calcular las preguntas de la situación?

Diseñamos o seleccionamos una estrategia o plan

1. ¿Qué estrategias te servirán para responder las preguntas de la situación? Justifica tu respuesta.

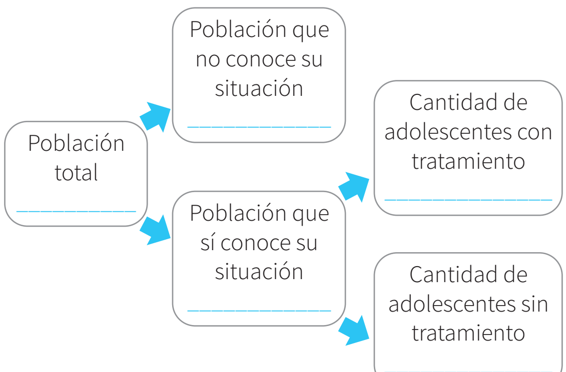
a) Diagrama de árbol y usar una fórmula

b) Diagrama de tiras y diagrama tabular

c) Diagrama cartesiano y ensayo y error

Ejecutamos la estrategia o plan

1. Empleando la primera estrategia, completa la información correspondiente en el siguiente diagrama:



2. Si el suceso de A es:

A = {población que sí conoce la enfermedad}, halla el cardinal de A.

n(A) = ______________________________

3. Si el suceso de B es:

B = {población que no está en tratamiento}, halla el cardinal de B.

n(B) = ______________________________

4. Determinamos la intersección de ambos sucesos:

$A \cap B$ = {población que sí conoce la enfermedad y no está en tratamiento}

$n(A \cap B)$ = ______________________________

5. Calcula la probabilidad de la intersección entre A y B.

$P(A \cap B)$ = ______________________________

6. Calcula la probabilidade de A.

P(A) = ______________________________

7. Aplica la segunda estrategia que seleccionaste para calcular la probabilidad de que, al escoger un adolescente al azar, este no se encuentre en tratamiento a pesar de que conoce su enfermedad. Responde la primera pregunta.

Por las características de los sucesos, se aplica la probabilidad condicional.

Probabilidad condicional

Sea A un suceso cualquiera de un espacio muestral. La probabilidad de que se realice el suceso B habiéndose realizado el suceso A es una probabilidad condicionada, se simboliza con P(B/A) y se calcula así:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \text{ con } P(A) > 0$$

8. ¿Cuál es la interpretación del resultado?

9. Según la información de la pregunta 1, responde la segunda pregunta de la situación.

Reflexionamos sobre el desarrollo

1. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un adolescente al azar, se encuentre con tratamiento, dado que conoce su enfermedad?

2. ¿Cuántos adolescentes deben recibir el tratamiento con la ingesta de sulfato ferroso?

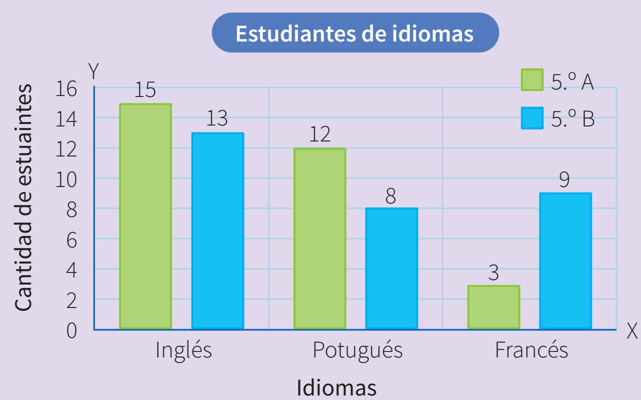
3. ¿Consideras importante valernos del conocimiento probabilístico para proyectar un tratamiento a cualquier tipo de enfermedad? Explica por qué.

Comprobamos nuestros aprendizajes

Propósito: Leemos, interpretamos y explicamos tablas y gráficos, así como diversos textos que contengan valores sobre las medidas probabilísticas. Asimismo, planteamos afirmaciones o conclusiones sobre las características de una situación aleatoria o probabilidad condicional, eventos dependientes e independientes; además, analizamos los datos de una probabilidad, la justificamos con conocimientos y corregimos errores si es que los hubiera.

Situación A

El gráfico representa las preferencias de estudiar un idioma extranjero de los estudiantes del 5.° A y del 5.° B. El director de la institución educativa escoge a un estudiante al azar para que participe en un concurso y resulta ser del 5.° A. ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera estudiar portugués?



Resolución

Determinamos los sucesos y sus respectivos cardinales:

A = {Estudiantes del 5.° A}, entonces: $n(A) = 15 + 12 + 3 = 30$

B = {Estudiantes que prefieren estudiar portugués}, entonces: $n(B) = 20$

Determinamos la intersección de ambos sucesos y su cardinal:

$A \cap B$ = {Estudiantes del 5.° A que prefieren estudiar portugués}, entonces: $n(A \cap B) = 12$

Hallamos el cardinal del espacio muestral:

$n(\Omega) = 15 + 13 + 12 + 8 + 3 + 9 = 60$

Hallamos la probabilidad de que el estudiante escogido al azar prefiera estudiar portugués:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{12}{60}}{\frac{30}{60}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

Respuesta

La probabilidad de que el estudiante escogido al azar del 5.° A prefiera estudiar portugués es de $\frac{2}{5}$

1. Describe el procedimiento realizado para resolver y dar respuesta a la pregunta de la situación.

2. ¿Por qué el espacio muestral considera a la totalidad de estudiantes y no solamente a los del 5.° A ? Justifica tu respuesta.

3. Si el estudiante escogido al azar hubiera sido del 5.° B, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera estudiar francés?

Situación B

La imagen muestra la urna 1 que contiene 2 pelotitas blancas y 4 negras, la urna 2 que contiene 5 pelotitas blancas y 3 negras y la urna 3 que tiene 2 pelotitas negras y 6 amarillas. Una urna se escoge aleatoriamente y de ella se extrae una pelotita. Se pide calcular: ¿cuál es la probabilidad de que la pelotita elegida sea de color negro?

Urna 1	Urna 2	Urna 3
N.° de casos posibles: 6	N.° de casos posibles: 8	N.° de casos posibles: 8
N.° de casos favorables: 4	N.° de casos favorables: 3	N.° de casos favorables: 2
P(negra) = $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	P(negra) = $\frac{3}{8}$	P(negra) = $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Resolución

La probabilidad de escoger una urna cualquiera es de $\frac{1}{3}$, puesto que no se sabe de cuál de las tres urnas se extrae la pelotita.

Por lo tanto:

$$\text{P(pelotita elegida de color negro)} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$$

$$\text{P(pelotita elegida de color negro)} = \frac{31}{72} \approx 0{,}43$$

1. Describe el procedimiento realizado para dar respuesta a la pregunta de la situación.

2. Si quisiéramos conocer la probabilidad de que la pelotita elegida sea de color blanco, ¿solo se tomarán en cuenta las urnas 1 y 2? Explica por qué, luego calcula dicha probabilidad.

Situación C

A fin de determinar un experimento aleatorio, se lanza un dado y, acto seguido, se lanzan dos monedas, una después de la otra. Para ello, se dan las siguientes condiciones:

- Si en el dado sale número impar, se lanza una moneda.
- Si sale número par, se lanzan dos monedas.

¿Cuál es el espacio muestral?

©Shutterstock

Aprendemos a partir del error

Resolución

Para construir el espacio muestral, utilizamos como ayuda la siguiente tabla de posibilidades:

Lados del dado	1		2		3		4		5		6	
Primera moneda	C	S	C	S	C	S	C	S	C	S	C	S
Segunda moneda	No se lanza		C	S	No se lanza		C	S	No se lanza		C	S

Respuesta:

Luego, el espacio muestral solicitado es:

Ω = {(1,C); (1,S); (2,C,C); (2,S,S); (3,C); (3,S); (4,C,C); (4,S,S); (5,C); (5,S); (6,C,C); (6,S,S)}

1. ¿Es correcto el procedimiento en la resolución? De no ser así, corrige y responde la pregunta de la situación.

2. Dado el experimento aleatorio, ¿cuál es la probabilidad de que salgan dos caras?

Evaluamos nuestros aprendizajes

Propósito: Determinamos las condiciones y restricciones de una situación aleatoria, analizamos la ocurrencia de sucesos compuestos y los representamos con el valor de su probabilidad; además, adaptamos y combinamos procedimientos para adecuarlos a otros contextos de estudio. Leemos, interpretamos y explicamos tablas y gráficos, así como diversos textos que contengan valores sobre las medidas probabilistas; también planteamos afirmaciones o conclusiones sobre las características de una situación aleatoria o probabilidad condicional, eventos dependientes e independientes, así como analizamos los datos de una probabilidad, la justificamos con conocimientos y corregimos errores si es que los hubiera.

En un grupo de amigos, el 80 % están casados. Entre los casados, el 75 % tienen trabajo. Finalmente, un 5 % no están casados y se encuentran desempleados.

Con la información dada, responde las preguntas 1 y 2.

1. Uno de ellos postula a un trabajo. ¿Qué probabilidad hay de que sea de los que están desempleados?

a) 0,15 b) 0,20 c) 0,21 d) 0,40

2. Si uno de ellos tiene trabajo, ¿qué probabilidad hay de que esté casado?

a) 0,50 b) 0,76 c) 0,80 d) 0,95

Un grupo de 120 turistas participa en un viaje por varias ciudades de Europa; 48 de ellos hablan inglés; 36, francés, y 12, los dos idiomas.

Con la información dada, responde las preguntas 3 y 4.

3. Si se escoge un turista al azar del grupo en mención, ¿cuál es la probabilidad de que hable francés, sabiendo que habla inglés?

a) 0,15 b) 0,25 c) 0,45 d) 0,55

4. ¿Y cuál es la probabilidad de que ese turista hable alguno de los dos idiomas?

5. En una caja de 100 artículos hay 10 con defectos. Se toman al azar tres artículos, uno tras otro. Halla la probabilidad de que los tres no sean defectuosos. (*P*: Probabilidad).

a) 0,73 b) 0,53 c) 0,40 d) 0,28

6. El profesor Antonio tiene dos urnas, en la primera hay 3 bolas azules y 6 rojas; en la segunda, 4 bolas azules, 3 rojas y 2 blancas. Si un estudiante extrae una bola al azar, determina la probabilidad de que la bola extraída sea azul.

a) $\frac{5}{18}$ b) $\frac{7}{18}$ c) $\frac{5}{9}$ d) $\frac{7}{9}$

7. Se tienen 20 botellas de gaseosa para la venta y se sabe que existen 10 botellas que traen la palabra "PREMIO" en su tapa.

¿Cuál es la probabilidad de que la tercera botella que se venda sea la primera que tenga la palabra "PREMIO" en su tapa?

8. Se encuesta a un grupo de 120 personas, en la que se les pregunta si les gusta leer y ver televisión. Los resultados son los siguientes:

- A 32 personas les gusta leer y ver televisión.
- A 92 personas les gusta leer.
- A 47 personas les gusta ver televisión.

Si elegimos al azar a una de esas personas, ¿cuál es la probabilidad de que le guste leer, sabiendo que le gusta ver televisión?

a) 0,73 b) 0,63 c) 0,55 d) 0,68

9. En una ciudad, el 40 % de la población tiene cabellos castaños; el 25 %, ojos castaños, y el 15 %, cabellos y ojos castaños. Se escoge una persona al azar. Si tiene los cabellos castaños, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también ojos castaños?

a) 0,225 b) 0,375 c) 0,450 d) 0,265

10. Una urna *A* contiene 7 bolas numeradas del 1 al 7. En otra urna *B*, hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que, si sale cara, extraemos una bola de la urna *A*; en cambio, si sale sello, la extraemos de la urna *B*.

Sabiendo que salió una bola con número par, ¿cuál es la probabilidad de que fuera de la urna *A*?

Enfoques transversales

Enfoque Inclusivo o de Atención a la Diversidad

Busca reconocer y valorar a todas las personas por igual, con el fin de erradicar la exclusión, discriminación y desigualdad de oportunidades.

Enfoque Ambiental

Busca formar personas conscientes del cuidado del ambiente, que promuevan el desarrollo de estilos de vida saludables y sostenibles.

Enfoque de Derechos

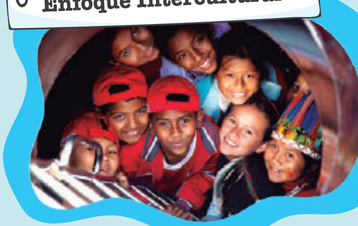
Fomenta el reconocimiento de los derechos y deberes; asimismo, promueve el diálogo, la participación y la democracia.

Son los valores y actitudes que tenemos al relacionarnos con otras personas y con nuestro entorno, con el fin de generar una sociedad más justa, inclusiva y equitativa para todos.

Enfoque Igualdad de Género

Busca brindar las mismas oportunidades a hombres y mujeres, eliminando situaciones que generan desigualdades entre ellos.

Enfoque Intercultural



Promueve el intercambio de ideas y experiencias entre las distintas formas de ver el mundo.

Enfoque Búsqueda de la Excelencia

Incentiva a los estudiantes a dar lo mejor de sí mismos para alcanzar sus metas y contribuir con su comunidad.

Enfoque Orientación al Bien Común

Busca que el conocimiento, los valores y la educación sean bienes que todos compartimos, promoviendo relaciones solidarias en comunidad.

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I
La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1
Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.
La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

Artículo 2
El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base delestado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

Artículo 3
Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

Artículo 4
Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.
La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

Artículo 5
El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.

Artículo 6
La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia. Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II
La democracia y los derechos humanos

Artículo 7
La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

Artículo 8
Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.
Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

Artículo 9
La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

Artículo 10
La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III
Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11
La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

Artículo 12
La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

Artículo 13
La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

Artículo 14
Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

Artículo 15
El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

Artículo 16
La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV
Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17
Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

Artículo 18
Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

Artículo 19
Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

Artículo 20
En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.
El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.
Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.
Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Artículo 21
Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.
El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.
Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

Artículo 22
Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V
La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23
Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.
Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

Artículo 24
Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.
Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.
Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

Artículo 25
Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.
La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI
Promoción de la cultura democrática

Artículo 26
La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

Artículo 27
Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

Artículo 28
Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. Democracia y Estado de Derecho
La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos sólo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. Equidad y Justicia Social
Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

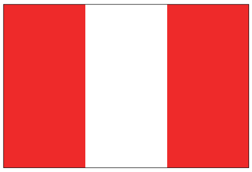
3. Competitividad del País
Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado
Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

SÍMBOLOS DE LA PATRIA

Artículo 49 de la Constitución Política del Perú



BANDERA NACIONAL

ESCUDO NACIONAL

HIMNO NACIONAL DEL PERÚ

CORO

Somos libres, seámoslo siempre,
y antes niegue sus luces el sol,
que faltemos al voto solemne
que la patria al Eterno elevó.

HIMNO NACIONAL

Declaración Universal de los Derechos Humanos

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1
Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2
Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3
Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4
Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5
Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6
Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7
Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8
Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9
Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10
Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11
1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12
Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13
1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14
1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15
1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16
1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17
1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18
Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19
Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20
1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21
1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22
Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23
1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24
Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25
1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26
1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27
1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28
Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29
1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunidad(...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30
Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.